数学分析 III 课件

叶胥达

2022 年 10 月 27 日

1　期中试卷讲解

1. 函数 $\dfrac{x^3}{x^2+y^3}$ 在参数曲线 $x=t^3, y=-t^2$ 上无法定义, 因此极限不存在.

2. 容易计算得到, 当 $z \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y,z) &= \left(\frac{y}{z}, \frac{x}{z}, -\frac{xy}{z^2}\right), \\ \nabla g(x,y,z) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

由于 $f(x,y,z), g(x,y,z)$ 的切平面的法向量分别为 $\nabla f(x,y,z)$ 和 $\nabla g(x,y,z)$, 因此只需验证

$$\nabla f(x,y,z) \cdot \nabla g(x,y,z) = 0, \tag{2}$$

由 (1) 可以得到

$$\nabla f(x,y,z) \cdot \nabla g(x,y,z) = \frac{xy}{z\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{xy}{z\sqrt{y^2+z^2}} - \left(\frac{xy}{z\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{xy}{z\sqrt{y^2+z^2}}\right) = 0.$$

因此 (2) 成立. 命题得证.

3. (1) 由于 $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, 故

$$\nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \Delta u.$$

(2) 反证法. 若存在 $x^0 \in \Omega$ 使得 $u(x^0) = M > 0$, 则 x^0 是 $u(x)$ 的极值点, 因此 $\nabla u(x^0) = 0$, 且

$$\Delta u(x^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^0) = u(x^0) > 0,$$

因此存在下标 $i \in \{1, \cdots, N\}$ 使得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^0) > 0$.

设 e_i 是第 i 个分量上的单位向量. 在 $t=0$ 附近作函数 $g(t) = u(x^0 + te_i)$, 则 $g(t)$ 的一阶和二阶导数由 e_i 方向上的方向导数给出:

$$g'(t) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0 + te_i), \qquad g''(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i}^2(x^0 + te_i).$$

特别的,

$$g'(0) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) = 0, \qquad g''(0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x^0) > 0.$$

由于 $g(t)$ 在 $t=0$ 处的二阶 Taylor 展开形如

$$g(t) = g(0) + \frac{1}{2}g''(0)t^2 + o(t^2),$$

存在 $\delta > 0$ 使得当 $t \in U_0(0, \delta)$ 时总有 $g(t) > g(0)$, 即

$$u(x^0 + te_i) > u(x^0), \qquad t \in U_0(0, \delta).$$

因此 x^0 不是 $u(x)$ 的最大值点, 矛盾!

另证: 由于 x^0 是 $u(x)$ 的极大值点, 故其 Hesse 矩阵 $\nabla^2 u(x^0)$ 非正定. 因此该矩阵的迹

$$\mathrm{tr}\big(\nabla^2 u(x^0)\big) = \Delta u(x^0) \leqslant 0.$$

但根据方程, $\Delta u(x^0) = u(x^0) > 0$, 矛盾!

(3) 和 (2) 的证明方法完全相同, 或者可以对 $-u$ 进行讨论.

(4) 若 $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最大值 $M > 0$, 则最大值点 $x^0 \in \Omega$. 这与 (2) 的结果矛盾!
若 $u(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的最小值 $m < 0$, 则最小值点 $x^0 \in \Omega$. 这与 (3) 的结果矛盾!

4. 在方程 $x + e^{yz} + z^2 = 0$ 的两端分别对 x, y 求偏导数, 可以得到

$$1 + \big(ye^{yz} + 2z\big)\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$ze^{yz} + \big(ye^{yz} + 2z\big)\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

在 (1) 中取 $(x, y, z) = (-2, 0, 1)$, 可以得到 $\dfrac{\partial z}{\partial x}(-2, 0) = -\dfrac{1}{2}$.

在 (2) 中令 $y = 0$, 则在 $x = -2$ 附近, 恒有 $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x, 0) = -\dfrac{1}{2}$. 对 x 求偏导得到 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(-2, 0) = 0$.

将 (1)(2) 两式相除可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = ze^{yz}\frac{\partial z}{\partial x}. \tag{3}$$

在 (3) 两边对 x 求偏导数得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \big(e^{yz} + yz\big)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + ze^{yz}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

代入 $(x, y, z) = (-2, 0, 1)$ 可得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}$.

在 (3) 两边对 y 求偏导数得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{yz}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + e^{yz}\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + ze^{yz}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

代入 $(x, y, z) = (-2, 0, 1)$ 可得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{4}$. 综上, 可以得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

注意: 如果直接在等式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{ye^{yz} + 2z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{ze^{yz}}{ye^{yz} + 2z}$$

的两端对 x, y 求偏导数, 计算量将显著增加. 使用简单的方式来表示偏导数是解题的关键. 此外, 在计算得到 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 之后, 也可待定系数

$$z(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{2}y + \frac{a}{2}(x+2)^2 + \frac{b}{2}y^2 + o\big((x+2)^2 + y^2\big)$$

来得到常数 a, b 的值.

5. 如果 f 是 m 次齐次函数, 则

$$f(tx) = t^m f(x)$$

对一切 $t > 0$ 成立. 在两端关于 t 取导数, 并根据链式法则, 得到

$$x^{\mathrm{T}}\nabla f(tx) = mt^{m-1}f(x).$$

取 $t = 1$, 则得到 $x^{\mathrm{T}}\nabla f(x) = mf(x)$.

如果 $x^{\mathrm{T}}\nabla f(x) = mf(x)$ 成立, 考察函数 $g(t) = f(tx)/t^m$, 其中 $t > 0$. 则

$$g'(t) = \frac{tx^{\mathrm{T}}\nabla f(tx) - mf(tx)}{t^{m+1}} = 0,$$

故 $g(t)$ 在 $t>0$ 上为常数函数. 因此 $g(t)=g(1)$, 即 $f(tx)=t^m f(x)$. 因此 f 为 m 次齐次函数.

6. (1) 容易知道

$$u(x)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

由于满足 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 的 (i,j) 对有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个, 故 $u(x)$ 是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次齐次函数, 故结论成立.

(2) 先假设 $x_1,\cdots,x_n$ 互不相等. 对每个 $k\in\{1,\cdots,n\}$, 有

$$u(x)=\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant N\\ i,j\neq k}}(x_j-x_i)\Big[(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)\Big](-1)^{n-k}$$

对 x_k 求偏导数可得

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=u(x)\left[\frac{1}{x_k-x_1}+\cdots+\frac{1}{x_k-x_{k-1}}+\frac{1}{x_k-x_{k+1}}+\cdots+\frac{1}{x_k-x_n}\right],$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=u(x)\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant n\\ l\neq k}}\frac{1}{x_k-x_l}.$$

对 k 求和有

$$\sum_{k=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_k}=u(x)\sum_{\substack{1\leqslant k,l\leqslant n\\ l\neq k}}\frac{1}{x_k-x_l}=u(x)\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\left(\frac{1}{x_k-x_l}+\frac{1}{x_l-x_k}\right)=0.$$

即若 $x_1,\cdots,x_n$ 互不相等, 总有 $\nabla\cdot u(x_1,\cdots,x_n)=0$. 对于一般的 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\nabla\cdot u(x_1,\cdots,x_n)=\lim_{t\to0}\nabla\cdot u(x_1+t,x_2+2t,\cdots,x_n+nt).$$

由于当 $t>0$ 充分小时, $\{x_k+kt\}_{k=1}^n$ 互不相等, 故 $\nabla\cdot u(x_1,\cdots,x_n)=0$.

7. 为了求 $\displaystyle\sum_{i=1}^n(x_i-x_i^0)^2$ 在约束条件 $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_ix_i+b=0$ 下的最小值, 利用 Lagrange 乘数法, 定义

$$F(x_1,\cdots,x_n,\lambda)=\sum_{i=1}^n(x_i-x_i^0)^2-\lambda\bigg(\sum_{i=1}^n a_ix_i+b\bigg).$$

如果 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为约束优化问题的最小值点, 则

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=0\Longrightarrow 2(x_i-x_i^0)=\lambda a_i,\qquad i=1,\cdots,n \tag{1}$$

因此由 (1) 可得

$$\lambda\sum_{i=1}^n a_i^2=2\sum_{i=1}^n a_i(x_i-x_i^0)=-2\Big(\sum_{i=1}^n a_ix_i^0+b\Big)\Longrightarrow\lambda=-\frac{2\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i^0+b\Big)}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}.\tag{2}$$

由 (1)(2) 得到

$$\sum_{i=1}^n(x_i-x_i^0)^2=\frac{\lambda^2}{4}\sum_{i=1}^n a_i^2=\frac{\Big(\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i^0+b\Big)^2}{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}.$$

因此最短距离为

$$d=\frac{\Big|\sum\limits_{i=1}^n a_ix_i^0+b\Big|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}}.$$

8. 对 $x\in[a,b]$ 定义三角形区域

$$\triangle_x=\{(\xi,y):a\leqslant y\leqslant\xi\leqslant x\}\subset[a,b]\times[a,b].$$

则 $\varphi(x)$ 的定义可以写为

$$\varphi(x)=\max_{(\xi,y)\in\triangle_x}f(\xi,y).$$

当 $x_1<x_2$ 时, 有 $\triangle_{x_1}\subset\triangle_{x_2}$, 因此 $\varphi(x_1)\leqslant\varphi(x_2)$, 即 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上是单调递增函数.

由于 $f(\xi,y)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上是一致连续的, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$|(\xi_1,y_1)-(\xi_2,y_2)|\leqslant\sqrt{2}\delta\Longrightarrow|f(\xi_1,y_1)-f(\xi_2,y_2)|\leqslant\varepsilon.\tag{1}$$

对于 (1) 中确定的 $\delta>0$, 我们希望证明:

$$|x_1-x_2|\leqslant\delta\Longrightarrow|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leqslant\varepsilon.\tag{2}$$

不妨设 $x_1<x_2$, 则由于 $\varphi(x_1)\leqslant\varphi(x_2)$, 只需验证 $\varphi(x_2)\leqslant\varphi(x_1)+\varepsilon$. 根据 $\varphi(x_2)$ 的定义, 存在 $(\xi_2,y_2)\in\triangle_{x_2}$ 使得 $\varphi(x_2)=f(\xi_2,y_2)$. 注意到 $a\leqslant y_2\leqslant\xi_2\leqslant x_2$, 考察下面两种情形:

- 若 $\xi_2\leqslant x_1$, 则 $a\leqslant y_2\leqslant\xi_2\leqslant x_1\Longrightarrow(\xi_2,y_2)\in\triangle_{x_1}$. 故

$$\varphi(x_2)=f(\xi_2,y_2)\leqslant\max_{(\xi,y)\in\triangle_{x_1}}f(\xi,y)=\varphi(x_1)<\varphi(x_1)+\varepsilon.$$

- 若 $\xi_2 > x_1$, 取 $\xi_1 = x_1$, $y_1 = \min(x_1, y_2)$. 此时 $(\xi_1, y_1) \in \triangle_{x_1}$, 且

$$|\xi_2 - \xi_1| \leqslant |x_2 - x_1| \leqslant \delta, \qquad |y_2 - y_1| \leqslant |x_2 - x_1| \leqslant \delta.$$

  故由 (1) 可以得到 $|f(\xi_1, y_1) - f(\xi_2, y_2)| \leqslant \varepsilon$. 因此

$$\varphi(x_2) = f(\xi_2, y_2) \leqslant f(\xi_1, y_1) + \varepsilon \leqslant \max_{(\xi,y)\in\triangle_{x_1}} f(\xi, y) + \varepsilon \leqslant \varphi(x_1) + \varepsilon.$$

因此, 无论何种情形我们都可以得到 $\varphi(x_2) \leqslant \varphi(x_1) + \varepsilon$, 因此 (2) 成立. 根据连续性的定义, $\varphi(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 上一致连续.