数学分析 III 课件

叶胥达

2022 年 11 月 10 日

1　知识回顾

$\mathbb{R}^n$ 中集合的体积

对任何有界集合 $E \subset \mathbb{R}^n$, 可定义其大体积和小体积为

$$M(E) = \inf M(\mathcal{A}_E), \quad m(E) = \sup m(\mathcal{A}_E),$$

其中 $M(\mathcal{A}_E)$ 和 $m(\mathcal{A}_E)$ 表示, 在闭长方体族 $\mathcal{A}_E$ 中, 与 E 的交非空以及与完全包含于 E的长方体的体积之和. 我们可以使用下面的方式来判断集合 E 是否可求体积:

- E 可求体积 $\Longleftrightarrow M(E) = m(E) \Longleftrightarrow \inf\big(M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E)\big) = 0 \Longleftrightarrow V(\partial E) = 0$.

  因此, 可以通过计算 E 的边界 ∂E 或者估计 $M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E)$ 来判断 E 是否可求体积. 注意, $M(E) = m(E) \Longrightarrow \inf\big(M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E)\big) = 0$ 的证明需要用到公共加细的一个技巧.

  根据 $M(E)$ 的定义, 存在包含整个 E的长方体族 $\mathcal{A}^{(1)}$ 使得 $V(\mathcal{A}^{(1)}) < M(E) + \varepsilon$. 类似的, 根据 $m(E)$ 的定义, 存在完全包含于 E的长方体族 $\mathcal{A}^{(2)}$ 使得 $V(\mathcal{A}^{(2)}) > m(E) - \varepsilon$. 将 $\mathcal{A}^{(2)}$ 中的每个长方体的每个面 (这是一个 $n-1$ 维的超平面) 对 $\mathcal{A}^{(1)}$ 中的长方体进行切割, 可以得到一个长方体族 $\mathcal{A}_E$, 它是 $\mathcal{A}^{(1)}$ 和 $\mathcal{A}^{(2)}$ 的加细, 并且

  $$V(\mathcal{A}^{(2)}) \leqslant m(\mathcal{A}_E) \leqslant M(\mathcal{A}_E) \leqslant V(\mathcal{A}^{(1)}) \Longrightarrow M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E) < 2\varepsilon.$$

  由于 ε 可以任意小, 我们得到 $\inf\big(M(\mathcal{A}_E) - m(\mathcal{A}_E)\big) = 0$.

- $V(E) = 0 \Longleftrightarrow \inf M(\mathcal{A}_E) = 0$.

  这就是说, E 是零体积集当且仅当对任何 $\varepsilon > 0$, 存在一个闭长方体族 $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k=1}^K$ 使得

  $$E \subset \bigcup_{k=1}^K A_k, \quad V(\mathcal{A}) = \sum_{k=1}^K V(A_k) < \varepsilon.$$

- 由于 E 可求体积当且仅当 $V(\partial E)=0$, 可以得到如下推论:

  1. 设 A,B 是 $\mathbb{R}^n$ 中可求体积的有界集合, 则 $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$ 均可求体积.
     这是因为 $\partial(A\cup B),\partial(A\cap B),\partial(A\backslash B)\subset\partial A\cup\partial B$.
  2. 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, 则 D 可求体积 $\Longleftrightarrow$ $\bar{D}$ 可求体积.
     注意, 区域是指道路连通的开集, 而闭区域是指区域的闭包.

例 1 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是可求体积的有界闭区域, 函数 $y=h(x)$ 在 Ω 上连续, 且 $h(x)\geqslant 0$. 证明集合 $D=\{(x,y):x\in\Omega,0\leqslant y\leqslant h(x)\}$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中可求体积.

在上述问题中, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的集合, 而 D 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的集合, 因此直接证明 D 边界 (包括上下底和侧面) 的体积为 0 可能并不容易. 因此我们直接来估计 $M(D)-m(D)$.

证明 由于 $h(x)$ 在 Ω 上一致连续, 故可设 $0\leqslant h(x)\leqslant H$, 且对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得

$$|x-y|\leqslant\delta\Longrightarrow|h(x)-h(y)|\leqslant\varepsilon.\tag{1}$$

由于 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 可求体积, 故存在长方体族 $\mathcal{A}_\Omega$ 使得 $M(\mathcal{A}_\Omega)-m(\mathcal{A}_\Omega)<\varepsilon$. 不妨设 $\mathcal{A}_\Omega$ 中的每一个长方体的直径都不超过 δ, 否则将 $\mathcal{A}_\Omega$ 替换为 $\mathcal{A}_\Omega$ 的细分即可. 设长方体族 $\mathcal{A}_\Omega$ 由

$$\mathcal{A}_\Omega=\{A_k\}_{k=1}^L,\qquad A_k\text{ 为 }\mathbb{R}^n\text{ 中的闭长方体且与 }E\text{ 交集非空}$$

给出, 并且 $\{A_k\}_{k=1}^K$ 是完全包含于 E 的那些闭长方体. 进一步, 对 $1\leqslant k\leqslant L$, 定义

$$m_k=\inf_{x\in A_k\cap E}h(x),\qquad M_k=\sup_{x\in A_k\cap E}h(x).$$

由于 $h(x)$ 的一致连续性 (1), 有 $M_k-m_k\leqslant\varepsilon$. 注意到, $D\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 满足

$$\bigcup_{k=1}^K\Big(A_k\times[0,m_k]\Big)\subset D\subset\bigcup_{k=1}^L\Big(A_k\times[0,M_k]\Big),$$

因此 $M(D)-m(D)$ 不超过这两个长方体族的体积之差, 即

$$\begin{aligned}
M(D)-m(D)&\leqslant\sum_{k=1}^L V(A_k)M_k-\sum_{k=1}^K V(A_k)m_k\\
&=\boxed{\sum_{k=1}^K V(A_k)(M_k-m_k)+\sum_{k=K+1}^L V(A_k)M_k}\\
&\leqslant\sum_{k=1}^K V(A_k)\varepsilon+\sum_{k=K+1}^L V(A_k)H\\
&\leqslant V(\Omega)\varepsilon+\big(M(\mathcal{A}_\Omega)-m(\mathcal{A}_\Omega)\big)H\\
&\leqslant V(\Omega)\varepsilon+H\varepsilon.
\end{aligned}$$

注意, $V(\Omega)$ 和 H 均为有限值, 而 ε 可以充分小, 因此 $M(D)=m(D)$, 即 D 可求体积. $\square$

重积分的定义

我们可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上的 Riemann 积分:

定义 1 设 $f(\boldsymbol{x})$ 在可求体积的有界闭区域 D 上有定义. 若对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对一切满足 $\lambda(\Delta)\leqslant\delta$ 的分割 $\Delta=\{\Delta D_k\}_{k=1}^K$, 都有

$$\left|\sum_{k=1}^K f(\boldsymbol{\xi}_k)\Delta V_k - I\right|<\varepsilon,\qquad \forall \xi_i\in\Delta D_i,$$

则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上可积, 且称 I 为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上的 n 重积分, 记为

$$I=\int_D f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

在上面的定义中, $f(\boldsymbol{x})$ 是被积函数, 而 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的体积微元, 也可以写为 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$. 如果需要特别强调积分区域为 2 维或 3 维区域, 可以写为

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad I=\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

下面的结果可以方便地判定 $f(\boldsymbol{x})$ 是否在 D 上可积:

定理 1 设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在可求体积的有界闭区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上有界, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上可积的充分必要条件是: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 D 的分割 $\Delta D=\{\Delta D_k\}_{k=1}^K$, 使得

$$\omega(\Delta):=\sum_{k=1}^K (M_k-m_k)\Delta V_k<\varepsilon,$$

其中 $M_k=\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in D_k} f(\boldsymbol{x})$, $m_k=\inf\limits_{\boldsymbol{x}\in D_k} f(\boldsymbol{x})$.

注意, 上述定理和多重积分的定义的区别在于, 定理只要求存在一个分割 Δ 使得 $\omega(\Delta)<\varepsilon$, 而多重积分的定义要求对一切满足 $\lambda(\Delta)<\delta$ 的分割 Δ 成立. 这与一元情形的定积分是一致的.

例 2 设函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在可求体积的有界闭区域 D 上有界, 并且在除去 D 的一个零体积集上连续, 则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上可积.

证明 设 $|f(x)|\leqslant M$ 对某 $M>0$ 恒成立. 设此零体积集为 F, 则存在闭长方体的并 E_0 使得 $F\subset E_0$, 且 $V(E_0)<\frac{\varepsilon}{8M}$. 将 E_0 中的每个闭长方体都扩展为一个体积稍大的开长方体, 可以得到开集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 使得

$$F\subset E,\qquad V(\bar{E})<\frac{\varepsilon}{4M}. \tag{1}$$

注意到 $D\backslash E$ 为有界闭集, 从而 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $D\backslash E$ 上一致连续, 存在 $\delta>0$ 使得

$$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in D\backslash E,\quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant\delta\Longrightarrow|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y})|<\frac{\varepsilon}{2V(D)}. \tag{2}$$

将 $D\backslash E$ 划分为若干个直径不超过 δ 的闭区域之并, 可以得到分割 $\Delta_1=\{\Delta D_k\}_{k=1}^K$, 由 (2) 有

$$\omega(\Delta_1)=\sum_{k=1}^K\omega_k\Delta V_k\leqslant\frac{\varepsilon}{2V(D)}\sum_{k=1}^K\Delta V_k\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

在分割 Δ_1 中加上 $\bar{E}\cap D$ 可以得到一个新的分割 Δ_2, 它是 D 的一个分割, 由 (1) 有

$$\omega(\Delta_2)\leqslant\sum_{k=1}^K\omega_k\Delta V_k+2M\cdot V(\bar{E}\cap D)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon.$$

因此 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上是可积的. □

一些计算多重积分的技巧:

- 观察函数的奇偶性. 利用函数的对称性可以大幅简化被积函数或积分区域.
- 使用恰当的变量替换来简化简化被积函数或积分区域.
- 当积分区域十分复杂时, 对区域进行合适的划分, 使得每个小区域中的积分相对容易计算.

2 课本习题

2. 我们来证明 $m(D\cap E)=0$ 而 $M(D\cap E)=1$.

一方面, 不可能有任何闭长方体完全包含于 $D\cap E$, 因此 $m(D\cap E)=0$. 另一方面, 如果有一些闭长方体的并 A 使得 $D\cap E\subset A$, 则由于 A 是闭集, $D\cap E$ 的闭包也完全含于 A, 即 $[0,1]^2\subset A$. 因此 $M(D\cap E)=1$.

5. 不妨设 $\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$, 并定义

$$D_1=\{(x,y)\in D:g(x,y)>0\}.$$

由 $g(x,y)$ 在 D 上连续, D_1 为非空开集, 且 $\bar{D}_1$ 是 $g(x,y)$ 的支撑集. 由 $f(x,y)$ 在 $\bar{D}_1$ 上连续, 令

$$M=\max_{(x,y)\in\bar{D}_1}f(x,y),\qquad m=\min_{(x,y)\in\bar{D}_1}f(x,y).$$

由于 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$ 对 $(x,y)\in\bar{D}_1$ 恒成立, 有

$$mg(x,y)\leqslant f(x,y)g(x,y)\leqslant Mg(x,y),\qquad\forall(x,y)\in D.$$

两端对 $(x,y)\in D$ 积分后可得

$$m\leqslant Q:=\frac{\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\leqslant M.$$

下面进行分类讨论:

- 若 $Q=m$, 则有 $\big(f(x,y)-m\big)g(x,y)\geqslant 0$, 且

  $$\iint_D \big(f(x,y)-m\big)g(x,y)=0.$$

  由于 $g(x,y)$ 在 D_1 上恒正, 因此当 $(x,y)\in D_1$ 时总有 $f(x,y)=m$. 显然 D_1 有无穷元素.

- 若 $Q=M$, 可以使用与上面类似的方法论证.

- 若 $m<Q<M$, 设 $f(x_1,y_1)=M$, $f(x_2,y_2)=m$, 其中 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$. 由 $f(x,y)$ 的连续性, 在 (x_1,y_1) 的邻域内存在 $(x_1',y_1')\in D^\circ$, 在 (x_2,y_2) 的邻域内存在 $(x_2',y_2')\in D^\circ$,

  $$f(x_1',y_1')>Q,\qquad f(x_2',y_2')<Q.$$

  由于 D° 是道路连通的开集, 故在 D° 中存在无穷多条连接 (x_1',y_1') 和 (x_2',y_2') 的连续曲线; 在其中任何一条连续曲线上, 根据连续函数的介值定理, 都存在 (ξ,η) 使得 $f(\xi,\eta)=Q$.

注: 集合

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\in(0,1),\sin\frac{1}{x}-x<y<\sin\frac{1}{x}+x\right\}$$

是道路连通的开集, 但 $\bar{D}$ 不是道路连通的.

3 推荐习题

1. 计算积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(\int_0^{x^2+y^2}\frac{e^z}{1-z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

思路 $e^z/(1-z)$ 的不定积分并非初等函数, 因此需要考虑变换积积分变量 z 和 (x,y) 的顺序.

证明 直接计算得到

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\frac{e^z}{1-z}\mathrm{d}z\iint_{z\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\frac{e^z}{1-z}\pi(1-z)\mathrm{d}z\\&=\pi\int_0^1 e^z\mathrm{d}z=\pi(e-1).\end{aligned}$$

2. (周民强例 6.2.20) 计算曲面 $(x^2+y^2+z^2)^n = x^{2n-1}$ 围成的立体体积, 其中 n 为正整数.

证明 (1) 作换元 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$, $z = r\sin\varphi\sin\theta$, 则曲线的方程成为

$$r^{2n} = r^{2n-1}\cos^{2n-1}\varphi \Longrightarrow r = \cos^{2n-1}\varphi.$$

注意到, $r \geqslant 0$ 隐含着条件 $\cos^{2n-1}\varphi \geqslant 0$, 因此围成的立体的内部可以由 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant r \leqslant \cos^{2n-1}\varphi$ 来表示. 此时 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, 因此立体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos^{2n-1}\varphi} r^2\sin\varphi\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{3(2n-1)}\varphi}{3}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^{3(2n-1)}\varphi\mathrm{d}(\cos\varphi) \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_0^1 t^{3(2n-1)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3(3n-1)}. \end{aligned}$$

3. 设 $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ 是正定对称阵. 设 $x = (x_1, x_2, x_3)$, 计算积分

$$I = \iiint_{x^{\mathrm{T}}Ax\leqslant 1} e^{\sqrt{x^{\mathrm{T}}Ax}}\mathrm{d}x.$$

证明 由于 A 可正交对角化, 存在 3 阶正交矩阵 P 和对角矩阵 Λ 使得

$$P^{\mathrm{T}}AP = \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.$$

作变量替换 $y = P^{\mathrm{T}}x$, 则 $x^{\mathrm{T}}Ax = y^{\mathrm{T}}\Lambda y$, 且

$$I = \iiint_{y^{\mathrm{T}}\Lambda y\leqslant 1} e^{\sqrt{y^{\mathrm{T}}\Lambda y}}\mathrm{d}y.$$

再令 $z_i = \sqrt{\lambda_i}y_i$, $i = 1, 2, 3$, 则

$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(z_1, z_2, z_3)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}} = \frac{1}{\sqrt{\det(A)}}.$$

用变量 z_1, z_2, z_3 来表示上述积分, 可以得到

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \iint_{|z|\leqslant 1} e^{|z|}\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \int_0^1 e^r \mathrm{d}r \int_{x^2+y^2=r^2} \mathrm{d}\sigma(x,y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \int_0^1 e^r (4\pi r^2)\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi(e-2)}{\sqrt{\det(A)}}.
\end{aligned}$$

在上述解答过程中, 也可以关于 z 作球坐标变换, 以避免讨论 $x^2+y^2=r^2$ 上的曲面积分.

4. 记 $D=[0,1]^2$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的单位正方形. 若函数 $u(x,y)\in C^3(\mathbb{R}^2)$ 满足 $u\Big|_{\mathbb{R}^2\setminus D}=0$, 证明:

$$\iint_D |u''_{xy}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D u''_{xx}u''_{yy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

思路 本题考察化重积分为累次积分. 一般的, 可以证明函数 $u(x_1,\cdots,x_n)\in H_0^2(D)$ 满足

$$\int_D \sum_{i,j=1}^n |u''_{x_ix_j}|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_D |\Delta u|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

证明 化重积分为累次积分, 并由分部积分公式, 可以得到

$$\begin{aligned}
\iint_D |u_{xy}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 u_{xy}u_{xy}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \left(u_{xy}u_x\Big|_0^1 - \int_0^1 u_{xyy}u_x \mathrm{d}y \right) \\
&= -\iint_D u_{xyy}u_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 u_{xyy}u_x \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}y \left(u_{yy}u_x\Big|_0^1 - \int_0^1 u_{xx}u_{yy}\mathrm{d}x \right) \\
&= \iint_D u_{xx}u_{yy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

5. (谢惠民例 22.3.3) (1) 设常数 $a>b>0$, $R>0$. 计算二重积分

$$I = \iint_{\substack{x,y\geqslant 0\\ x^2+y^2\leqslant R^2}} \frac{xy}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 设常数 $a>b>c>0$, $R>0$. 计算三重积分

$$I=\iiint\limits_{\substack{x,y,z\geqslant 0\\ x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}}\frac{xyz}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

思路 本题考察二重积分和三重积分的变量替换.

证明 (1) 作换元 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 则 $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$. 由于 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$, 有

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^R r\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2r^2\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{R^3}{6}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}(\sin^2\theta)}{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\sin^2\theta}}\qquad(t=\sin^2\theta)\\
&=\frac{R^3}{6}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)t}}\\
&=\frac{R^3}{3}\left.\frac{\sqrt{a^2+(b^2-a^2)t^2}}{b^2-a^2}\right|_{t=0}^{t=1}\\
&=\frac{R^3}{3(a+b)}.
\end{aligned}$$

因此原积分的值为 $I=\dfrac{R^3}{3(a+b)}$.

(2) 作换元 $x=r\sin\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\varphi$, 则 $0\leqslant r\leqslant R$, $0\leqslant\theta,\varphi\leqslant\pi/2$. 由于

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$

我们有

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^R r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{r^3\sin\varphi^2\cos\varphi\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2r^2\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^R r^4\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{R^5}{5}\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi}}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

作换元 $u = \sin^2\varphi$, $v = \sin^2\theta$, 可以得到

$$\begin{aligned}
I &= \frac{R^5}{20}\int_0^1 u\mathrm{d}u \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{a^2u(1-v)+b^2uv+c^2(1-u)}} \\
&= \frac{R^5}{20}\int_0^1 u\mathrm{d}u \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{[c^2+(a^2-c^2)u]+(b^2-a^2)uv}} \\
&= \frac{R^5}{10}\int_0^1 u\mathrm{d}u \frac{\sqrt{c^2+(a^2-c^2)u]+(b^2-a^2)uv}}{(b^2-a^2)u}\Bigg|_{v=0}^{v=1} \\
&= \frac{R^5}{10(b^2-a^2)}\int_0^1 \left(\sqrt{c^2+(b^2-c^2)u}-\sqrt{c^2+(a^2-c^2)u}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{R^5}{10(b^2-a^2)}\left[\frac{2}{3(b^2-c^2)}\left(c^2+(b^2-c^2)u\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=0}^{u=1} - \frac{2}{3(a^2-c^2)}\left(c^2+(b^2-c^2)u\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=0}^{u=1}\right] \\
&= \frac{R^5}{15(b^2-a^2)}\left[\frac{b^3-c^2}{b^2-c^2}-\frac{a^3-c^3}{a^2-c^2}\right] \\
&= \frac{R^5}{15}\cdot\frac{ab+bc+ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}.
\end{aligned}$$

因此原积分的值为 $I = \dfrac{R^5}{15}\cdot\dfrac{ab+bc+ca}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

6. 设 $f \in C[0,1]$, $f(x) > 0$, 证明:

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{(M+m)^2}{4Mm},$$

其中 $m = \min\limits_{x\in[0,1]} f(x)$, $M = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x)$.

证明 记 $D = [0,1]^2$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的单位正方形. 设原积分值为 I, 则

$$I = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此

$$I = \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到 $f(x)/f(y) \in [\frac{m}{M}, \frac{M}{m}]$, 因此

$$2 \leqslant \frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)} \leqslant \frac{m}{M}+\frac{M}{m}, \qquad \forall (x,y)\in D.$$

在 D 中积分之后即得到原不等式成立.

7. (1) 记 n 维单纯形的体积为 V_n. 注意对任何 $x_n \in [0,1]$, 平面 $x_1+\cdots+x_{n-1} \leqslant 1-x_n$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中围成的体积为 $V_n(1-x_n)^{n-1}$. 因此

$$\begin{aligned}
V_n &= \int_0^1 \mathrm{d}x_n \int_{x_1+\cdots+x_{n-1}\leqslant 1-x_n} \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1} \\
&= \int_0^1 I_{n-1}(1-x_n)^{n-1}\mathrm{d}x_n \\
&= V_{n-1}\int_0^1 (1-x)^{n-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}V_{n-1}.
\end{aligned}$$

注意到, $V_1=1$, $V_2=\dfrac{1}{2}$, 故上述递推公式给出 $V_n=\dfrac{1}{n!}$.

(2) 作变量 $t=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 则 $0\leqslant t\leqslant 1$. 交换 t 和 $(x_2,\cdots,x_n)$ 的积分顺序, 可以得到

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\sum_{i=2}^n x_i\leqslant 1} \mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \int_0^{1-\sum_{i=2}^n x_i} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i}\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{\sum_{i=2}^n x_i\leqslant 1} \mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \int_{\sum_{i=2}^n x_i}^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{d}t \int_{\sum_{i=2}^n x_i\leqslant t} \mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_0^1 \sqrt{t}(V_{n-1}t^{n-1})\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 t^{n-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n-1)!(n+\frac{1}{2})}.
\end{aligned}$$