数学分析 III 课件

叶胥达

2022 年 12 月 5 日

1 知识回顾

设曲面 S 由参数方程 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ 确定, 其中 $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ 具有连续偏导数. 定义关于 (u, v) 的函数

$$A(u,v) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad B(u,v) = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad C(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

且假设对于任意的 (u, v) 都有 $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. 注意到, (A, B, C) 总是曲面 S 的一个法向量, 因为它与 S 的两个切向量

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \text{ 和 } \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

垂直. 特别的, 如果曲面 S 由 $z = f(x, y)$ 给出, 则 $A = -z'_x$, $B = -z'_y$, $C = 1$ 给出.

评注 当 (A, B, C) 是曲面 S 的法向量时, $(-A, -B, -C)$ 也为法向量.

I 型曲面积分

曲面 S 的面积微元表示为

$$\boxed{\mathrm{d}S = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,}$$

S 上的连续函数 $f(x, y, z)$ 的 I 型曲面积分的计算公式为

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

特别的, 如果 S 由 $z = z(x, y)$ 来确定, 则由 $A = -z'_x$, $B = -z'_y$, $C = 1$ 可以得到

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D f\big(x, y, z(x,y)\big)\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

评注 关于 I 型曲面积分的评注:

1. 在参数方程 $x = x(u, v)$ 中, 左边的 x 是指三维空间中的坐标, 右边的 $x(u, v)$ 是关于 (u, v) 的可微函数. 这里的符号混用是为了减少符号的数量.
2. 一条曲线由一个自由度确定, 而三维空间中的曲面由两个自由度确定. 因此, I 型曲面积分总是可以参数变量的代换化为平面区域上的二重积分.
3. I 型曲面积分和 I 型曲线积分的定义类似, 它们的被积分微元分别是曲面面积和曲线长度, 计算公式也较类似.

II 型曲面积分

不妨设法向量 (A, B, C) 指向所计算的那一侧, 否则取 $(-A, -B, -C)$ 为法向量. 如果曲面 S 由函数 $z = z(x, y)$ 给出, 那么法向量

$$(A, B, C) = (-z'_x, -z'_y, 1)$$

指向曲面的上侧. 当 (A, B, C) 为曲面的法向量时, 该方向上的单位法向量为

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right).$$

故曲面 S 上的法方向面积 (简称为法面积) 微元为

$$\boxed{\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = (A, B, C)\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = (A, B, C)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.}$$

于是, 向量场 $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 在曲面 S 上的 II 型曲面积分为

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iint_D (PA + QB + CR)\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{$*$}$$

II 型曲面积分计算了向量场 $\boldsymbol{F}$ 在穿过曲面 S 时的通量.

评注 关于 II 型曲面积分的评注:

1. II 型曲线积分和 II 型曲面积分计算的量稍有不同. II 型曲线积分计算的是向量场沿一条给定曲线的做功, 即被积微元是**向量 · 位移**; II 型曲面积分计算的是向量场穿过给定曲面的通量, 即被积微元是**向量 · 法面积**.
2. 计算 II 型曲面积分必须在其两个相反的法向量中指定一个, 作为 $\boldsymbol{n}$ 的方向. 当 S 为闭曲面时, 通常指定外法向量为法方向.

3. 课本上将 II 型曲面积分写为

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其含义与 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 完全相同. 不过, 对于复杂的曲面不推荐使用上面的写法: $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 在多重积分中一般指面积微元, 但是这里出现的 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 是带符号的, 它与法向量的方向选取有关. 只有在 S 可以直接投影到坐标平面时, 才推荐使用上面的写法.

Gauss 公式

Gauss 公式和 Green 公式类似, 它将低维边界上的积分转化为内部区域的积分计算. 设 $D\subset\mathbb{R}^3$ 是有界闭区域, ∂D 是 D 的外侧, 向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$ 在 D 上具有连续偏导数, 则

$$\iint_{\partial D}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \iiint_D \nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 代表向量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度. Gauss 公式可以方便地计算闭曲面上的 II 型曲面积分. 课本第 230 页的例 16.5.4 证明了如下结果:

例 1 *设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为封闭光滑曲面, 它的内部为有界闭区域 D. 已知原点 O 不在 S 上, 证明:*

$$\iint_S \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{r}|^2}\mathrm{d}S = \begin{cases}4\pi, & O\text{ 在 } D \text{ 内部},\\ 0, & O \text{ 在 } D \text{ 外部}.\end{cases}$$

其中, $\boldsymbol{r}$ 为曲面 S 上的坐标, $\boldsymbol{n}$ 为 S 上的外法向量.

上述积分也可以写为

$$\iint_S \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{r}|^2}\mathrm{d}S$$

其中 $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ 为 $\boldsymbol{r}$ 方向上的单位方向. 于是, 若将原点 O 视为一点电荷, $\hat{\boldsymbol{r}}/|\boldsymbol{r}|^2$ 恰好为 $\boldsymbol{r}$ 处的电场强度 (即电势的梯度), 因此上述积分计算的是原点处点电荷的电场在一给定闭曲面 S 上的通量. 上面的计算结果对应于电磁学中的 Gauss 定律, 其内容为: 指定曲面上电场强度的通量仅与曲面内部的电荷量有关.

Stokes 公式

Green 公式将平面曲线上的 II 型曲线积分转化为平面二重积分, 而 Stokes 公式将空间曲线上的 II 型曲线积分转化为空间中的 II 型曲面积分. 设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 是光滑双侧曲面, 且 ∂S 由有限条分段

光滑曲线构成. 设函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 均具有连续偏导数, 则

$$\int_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

其中向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 由以下公式给出:

$$\boldsymbol{F} = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

这里 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ 分别为 x,y,z 方向上的单位向量. Stokes 公式通常用于计算复杂空间曲线上的 II 型曲线积分.

2 补充习题

1. 求上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 被圆柱 $x^2+y^2=ax$ 截取部分的面积与质心坐标.

解答 记被截取的区域为 D, 则 D 是上半球面的子区域. 由于 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 满足

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \qquad z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

故 D 上指向上侧的法向量为

$$\boxed{(-z_x, -z_y, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, 1\right).}$$

因此, D 上的面积微元为

$$\boxed{\mathrm{d}S = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.}$$

故 D 的面积可表示为

$$\begin{aligned} S(D) &= \iint_{x^2+y^2\leqslant ax} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r \\ &= (\pi-2)a^2. \end{aligned}$$

这里, 我们使用了极坐标变换 $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, 其中 θ 取值范围是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的原因是在圆 $x^2 + y^2 = ax$ 内部, $x = a\cos\theta \geqslant 0$ 必须满足. 由于被截取的区域 D 关于坐标 y 对称, 因此其质心 (x_0, y_0, z_0) 满足

$$y_0 = \frac{1}{(\pi-2)a^2}\int_D y\mathrm{d}S = 0,$$

并且

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{(\pi-2)a^2}\iint_D x\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{(\pi-2)a^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant ax} \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(\pi-2)a^2}\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant ax \\ y\geqslant 0}} \frac{ax}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{2}{(\pi-2)a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}r \\
&= \frac{a}{\pi-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2a}{3(\pi-2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{1}{(\pi-2)a^2}\iint_D z\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{(\pi-2)a^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(\pi-2)a}\iint_{x^2+y^2\leqslant ax}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{\pi a}{4(\pi-2)}.
\end{aligned}$$

2. 设 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, 取外侧, 求

$$I = \iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解答 在 $(x, y, z) \in \Sigma$ 处指向外侧的法向量为

$$\boxed{(-z'_x, -z'_y, 1) = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right).}$$

因此 D 上的法面积微元可表示为

$$\boxed{\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}},1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.}$$

作向量 $\boldsymbol{e}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, I 可表示为第 II 型曲面积分

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\\&=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(\text{关于 }x,y\text{ 方向的对称性})\\&=\pi.\end{aligned}$$

3. 计算 II 型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\left[(x+\sqrt{1+x^2})^2+(y+\sqrt{1+y^2})^2+(1+z)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是 $x^2+y^2-z^2=0$ 在 $-2\leqslant z\leqslant 2$ 部分的外侧.

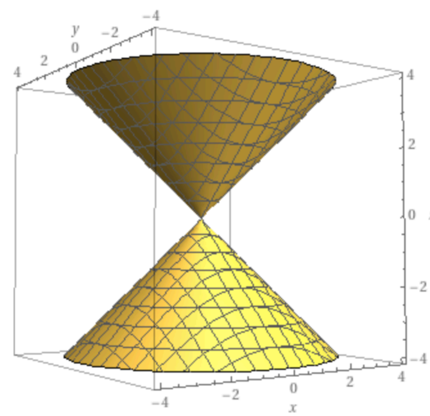

图 1: $x^2+y^2=z^2$ 的图像是一对圆锥

思路 在 II 型曲面积分中, $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的符号是与法向量的方向选取有关的.

解答 作函数

$$f(x,y,z)=(x+\sqrt{1+x^2})^2+(y+\sqrt{1+y^2})^2+(1+z)^2.$$

并设指向外侧的法向量 $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$. 则原积分可表示为

$$I = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) n_z \mathrm{d}S.$$

令 Σ_+ 为 Σ 在 $0 \leqslant z \leqslant 2$ 的部分, Σ_- 为 Σ 在 $-2 \leqslant z \leqslant 0$ 的部分. 则对每个 $(x, y, z) \in \Sigma_+$, 有 $(x, y, -z) \in \Sigma_-$, 并且在 (x, y, z) 和 $(x, y, -z)$ 两点处的法向量关于 xOy 平面对称. 因此, 由对称性可以得到

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma_+} f(x, y, z) n_z \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_-} f(x, y, z) n_z \mathrm{d}S \\ &= \iint_{\Sigma_+} f(x, y, z) n_z \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_+} f(x, y, -z)(-n_z) \mathrm{d}S \\ &= \iint_{\Sigma_+} [f(x, y, z) - f(x, y, -z)] n_z \mathrm{d}S \\ &= 4 \iint_{\Sigma_+} z n_z \mathrm{d}S. \end{aligned}$$

由于在 Σ^+ 上指向外侧的法向量方向为

$$\boxed{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right),}$$

因此 z 方向上的法面积微元可表示为

$$\boxed{n_z \mathrm{d}S = -\mathrm{d}x\mathrm{d}y,}$$

从而

$$\begin{aligned} I &= -4 \iint_{x^2+y^2 \leqslant 4} \sqrt{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -4 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 r^2 \mathrm{d}r \\ &= -4 \times 2\pi \times \frac{8}{3} \\ &= -\frac{64}{3}\pi. \end{aligned}$$

4. 令 Σ 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧. 给定常数 $a, b, c > 0$, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

解答 作三维向量场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\frac{(x,y,z)}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}},$$

则容易验证, 当 $(x,y,z)\neq 0$ 时, 总有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}(x,y,z)=\sum_{cyc}\frac{(ax^2+by^2+cz^2)-3ax^2}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{5}{2}}}=0,$$

即 $\boldsymbol{F}$ 为无散场. 取一充分小的常数 $\varepsilon>0$, 使得曲面 $S_\varepsilon=\{ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2\}$ 位于单位球面的内部. 根据 Gauss 公式, 可以得到

$$I=\iint_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_{S_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_{S_\varepsilon}\frac{(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}}{\varepsilon^3}\mathrm{d}S.$$

再次在 S_ε 内使用 Gauss 公式, 可得

$$I=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{ax^2+by^2+cz^2\leqslant\varepsilon^2}3\mathrm{d}V=\frac{4\pi}{\sqrt[3]{abc}}.$$