数学分析

习题演练（第三册）

（第二版）

周民强　编著

科学出版社

数学分析习题演练

（第三册）

（第二版）

周民强　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书是基于作者多年教学实践的积累，整理编写而成的.全书共分三册，本书为第三册，包括8章：多元函数的极限与连续性、多元函数微分学、隐函数存在定理、一般极值与条件极值、含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分、各种积分之间的联系.本书选择的习题起点适当提高，侧重理论性和典范性.书中还添加了若干注记，便于读者厘清某些误解.

本书适合理工科院校及师范院校数学专业的本科生、研究生及教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题演练.第3册/周民强编著.—2版.—北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-033372-8

Ⅰ.数… Ⅱ.周… Ⅲ.数学分析-高等学校-习题集 Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第007197号

责任编辑：林 鹏 刘嘉善 姚莉丽／责任校对：宋玲玲
责任印制：张克忠／封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京智力达印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年5月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2012年2月第 二 版 印张：27
2012年2月第二次印刷 字数：540 000

定价：49.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

学数学必须演算习题，这是大家的共识．通过演算我们不仅能熟悉理论的意义和应用，掌握解题的方法和操作过程，同时还可以洞察理论本身的适应性，预测其扩展前景．因此，关于数学各分支，都编写出了众多习题集或学习参考书，尤以微积分（或数学分析）类为最．作者在多年的教学实践中，积累了相当数量的练习题，且在培训学生过程中收到较好的效果．把它们整理并编写出版，供读者参考，以开阔视野和启示思路．

本习题集以上海科学技术出版社（2002 年）出版的《数学分析》教材为蓝本．因此，总的说来，选题的起点适当提高，侧重理论性和典范性，并力求多角度展示，减少了它在几何、力学方面的应用练习．解答也从简，不再在文字上多下功夫．书中还添加了若干注记，便于读者加深认识和厘清某些误解．带“*”的习题可酌情阅读．

第二版与第一版相比，补充了若干内容，也修正了若干笔误．这必将会提高读者的阅读兴趣，增添参考价值．

全书共分三册，本书是第三册，包括 8 章：多元函数的极限与连续性、多元函数微分学、隐函数存在定理、一般极值与条件极值、含参变量的积分、重积分、曲线积分与曲面积分、各种积分之间的联系．

由于作者的水平和视野所限，书中难免存在错误和不足，欢迎读者给予批评指正．

作　者
2012 年

技重于练，
巧重于悟．

目　录

第 1 章　多元函数的极限与连续性

1.1　集合与点集论

实数全体记为 $\mathbf{R}^1$，称为一维欧氏空间，即带有实数坐标的点组成的一条直线；由 n 个实数组成的有序组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 之全体称为 n 维欧氏空间，记为 $\mathbf{R}^n$. 该有序组也简记为 $\boldsymbol{X}$，也称为 $\mathbf{R}^n$ 中的点或向量，又称 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为点 $\boldsymbol{X}$ 的第 k 个坐标. 由点形成的集合称为点集. 特别地，全体有理数记为 $\mathbf{Q}$，全体正整数记为 $\mathbf{N}$.

定义 1.1.1　设 $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{Y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个点，令 $\alpha\boldsymbol{X}=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$，$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n)$，且称

$$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}\quad (\text{也记为 } d(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))$$

为点 $\boldsymbol{X}$ 到点 $\boldsymbol{Y}$ 的距离. $\|\boldsymbol{X}\|$ 表示点 $\boldsymbol{X}$ 到原点的距离，称为向量 $\boldsymbol{X}$ 的长度，又令

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}=\langle\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\rangle=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k,$$

称为向量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 的内积；

设 $E_1, E_2\subset\mathbf{R}^n$，则定义 $E_1\times E_2=\{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}):\boldsymbol{X}\in E_1, \boldsymbol{Y}\in E_2\}$（集合的乘积）.

定义 1.1.2　设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n$，令

$$d(\boldsymbol{X}_0, E)=\inf\{d(\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}):\boldsymbol{X}\in E\},$$

称为点 $\boldsymbol{X}_0$ 到点集 E 的距离. 称 $\operatorname{diam}\{E\}=\sup\{\|\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2\|:\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in E\}$ 为 E 的直径.

定义 1.1.3　设 $\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n$，$\delta>0$，令 $U_\delta(\boldsymbol{X}_0)=U(\boldsymbol{X}_0,\delta)=\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n:\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|<\delta\}$，称为以 $\boldsymbol{X}_0$ 为中心 δ 为半径的开球，也称为点 $\boldsymbol{X}_0$ 的 δ 邻域. 在不计及半径 δ 时，简称为 $\boldsymbol{X}_0$ 的邻域，记为 $U(\boldsymbol{X}_0)$.

定义 1.1.4　设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若存在 $M>0$，使得 $(\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n))\ \|\boldsymbol{X}\|\leqslant M\,(\boldsymbol{X}\in E)$ 或 $E\subset U(0,M)$，则称 E 为有界集.

定义 1.1.5　设 $\boldsymbol{X}_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})\in\mathbf{R}^n\,(k\in\mathbf{N})$ 是一个点列，$\boldsymbol{X}_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})\in\mathbf{R}^n$. 若对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使得 $\|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_0\|<\varepsilon$ 或 $\boldsymbol{X}_k\in U(\boldsymbol{X}_0,\varepsilon)\,(k\geqslant N)$，则称 $\{\boldsymbol{X}_k\}$ 为收敛于 $\boldsymbol{X}_0$ 的收敛(点)列，也称当 $k\to\infty$ 时，$\{\boldsymbol{X}_k\}$ 有极限 $\boldsymbol{X}_0$，记为

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{X}_0\quad\text{或}\quad\boldsymbol{X}_k\to\boldsymbol{X}_0\quad(k\to\infty).$$

由等式 $\|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_0\|=\sqrt{(x_1^{(k)}-x_1^{(0)})^2+\cdots+(x_n^{(k)}-x_n^{(0)})^2}$ 易知，$\{\boldsymbol{X}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{X}_0$ 当且仅当有

$$x_1^{(k)}\to x_1^{(0)},\ x_2^{(k)}\to x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(k)}\to x_n^{(0)}\quad(k\to\infty).$$

定义 1.1.6　设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n$. 若有 E 中互异点列 $\{\boldsymbol{X}_k\}$，使得 $\boldsymbol{X}_k\to\boldsymbol{X}_0\,(k\to\infty)$，则称 $\boldsymbol{X}_0$ 为 E 的极限点(聚点)；E 的极限点全体记为 E'，称为 E 的导集；若 $E'\subset E$，则称 E 为闭集；记 $\overline{E}=E\cup E'$，称为 E 的闭包，$\overline{E}$ 是闭集；若 $\overline{E}=\mathbf{R}^n$，则称 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的稠密集，E 在 $\mathbf{R}^n$ 中稠密.

定义 1.1.7　设 $E\subset\mathbf{R}^n$. 若 $\boldsymbol{X}_0\in E$ 但 $\boldsymbol{X}_0\overline{\in}E'$，则称 $\boldsymbol{X}_0$ 为 E 的孤立点；若 $\boldsymbol{X}_0\in\overline{E}$ 但 $\boldsymbol{X}_0$ 不是

E的内点,则称 $\boldsymbol{X}_0$ 为 E的边界点.E的边界点全体记为∂E.

定义 1.1.8 设 $E\subset\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{X}_0\in E$.若存在 $\delta>0$,使得 $U(\boldsymbol{X}_0,\delta)\subset E$,则称 $\boldsymbol{X}_0$ 为 E的内点.若 E中每一点均为 E的内点,则称 E为开集;点 $\boldsymbol{X}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{X}_0)$是开集.开集与闭集互补.

定义 1.1.9 设 $D\subset\mathbf{R}^n$.若对 D中任意两点,均可用连续曲(折)线联结起来,此曲线上的点均属于 D,则称 D为(道路)连通集;若 D是连通集又是开集,则称 D是区域;若 D是区域,则称 $\overline{D}$为闭区域.

定义 1.1.10 设 $E\subset\mathbf{R}^n$.若在 E中任意两点 $\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{X}_2$ 之间,均可用属于 E的直线段$\overline{\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2}$联结起来,则称 E为凸集.

定理 1.1.1 若$\{\boldsymbol{X}_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛列,则$\{\boldsymbol{X}_k\}$是有界点列;有界点列必存在收敛子列.

定理 1.1.2(收敛点列的充分必要条件) $\mathbf{R}^n$ 中点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$是收敛列的充分必要条件是:对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得 $\|\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{X}_j\|<\varepsilon(i,j\geqslant N)$(即 Cauchy 列).

定理 1.1.3 设$\{F_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空闭集列.若有

(i) $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_k\supset\cdots$, (ii) $\operatorname{diam}\{F_k\}\to 0\quad(k\to\infty)$,

则存在唯一的 $\boldsymbol{X}_0\in F_k(k=1,2,\cdots)$.

定理 1.1.4(有限覆盖) 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是非空有界闭集(也称紧集),$\mathscr{A}=\{G_\alpha\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中一族开集.若对任意的 $\boldsymbol{X}\in F$,均存在 $G_\alpha\in\mathscr{A}$,使得 $\boldsymbol{X}\in G_\alpha$(此时称 $\mathscr{A}$是 E的开覆盖),则 $\mathscr{A}$中存在有限个开集 $G_{\alpha_1},G_{\alpha_2},\cdots,G_{\alpha_m}$:$E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}G_{\alpha_i}$.

例 1.1.1 试证明下列命题:

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^2$,则∂E是闭集.

(2) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$,则 $E=\{(x,f(x)):x\in\mathbf{R}^1\}$是闭集.

(3) 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭集,$G\subset\mathbf{R}^n$ 是有界开集,$F\subset G$,则存在开集 D,使得 $F\subset D\subset\overline{D}\subset G$.

证明 (1) 只需指出$(\partial E)^c$是开集.为此,设 $\boldsymbol{X}\in(\partial E)^c$.

(i) 若 $\boldsymbol{X}$是 E的内点,则存在 $U(\boldsymbol{X},\delta)\subset E$.易知 $U(\boldsymbol{X},\delta)$是开集,故 $U(\boldsymbol{X},\delta)\cap\partial E=\varnothing$,即 $\boldsymbol{X}$是$(\partial E)^c$之内点.

(ii) 若 $\boldsymbol{X}\overline{\in}E$,则由 $\boldsymbol{X}\in(\partial E)^c$ 可知,存在 $U(\boldsymbol{X},\delta)\cap E=\varnothing$.这说明 $U(\boldsymbol{X},\delta)\subset E^c$.由于 $U(\boldsymbol{X},\delta)$中点均非 E之边界点,故 $U(\boldsymbol{X},\delta)\in(\partial E)^c$.

(2) 设$(x_0,y_0)\in E'$,则存在$(x_n,y_n)\in E(n\in\mathbf{N},y_n=f(x_n))$,使得$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)(n\to\infty)$.由此知 $x_n\to x_0(n\to\infty)$,注意到 f 的连续性,故得 $f(x_n)=y_n\to y_0$.即 $y_0=f(x_0)$,这说明$(x_0,y_0)\in E'$.

(3) 对 $\boldsymbol{X}\in F$,注意到∂G是闭集且 $\boldsymbol{X}_0\overline{\in}\partial G$,故知 $d_X=d(\boldsymbol{X},\partial G)>0$.由于 $\boldsymbol{X}\in G$,故存在邻域 $U_X=U(\boldsymbol{X},d/2)\subset G$.从而可得 F的一个开覆盖$\{U_X\}_{X\in F}$,并可选出有限覆盖 $U_{X_i}(i=1,2,\cdots,m)$:$F\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}U_{X_i}\triangleq D$(开集).因此,

$$\overline{D}=\bigcup_{i=1}^{m}\overline{D}_{X_i}\subset\bigcup_{i=1}^{m}U(\boldsymbol{X}_i,d_{X_i})\subset G.$$

例 1.1.2 试证明下列命题:

(1) 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 是非空点集,则 $d(\boldsymbol{X},E)$ 作为 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$ 的函数是一致连续的.

(2) 设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是非空闭集,$\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n$,则存在 $\boldsymbol{Y}_0\in F$,使得 $\|\boldsymbol{X}_0-\boldsymbol{Y}_0\|=d(\boldsymbol{X}_0,F)$.

(3) 设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 是凸集,则 $\overline{E}$ 是凸集.

证明　(3) 设 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in\overline{E}$,且不妨认定 $\boldsymbol{X}_i\in\partial E\setminus E(i=1,2)$.现在假定过点 $\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{X}_2$ 之直线段 $\overline{\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2}$ 中有点 $\boldsymbol{X}_0$:$\boldsymbol{X}_0\overline{\in}\overline{E}$,则存在邻域 $U(\boldsymbol{X}_0,\delta)$:$U(\boldsymbol{X}_0,\delta)\cap\overline{E}=\varnothing$.

再作 $U_1=U(\boldsymbol{X}_1,\delta/2)$,$U_2=U(\boldsymbol{X}_2,\delta/2)$,以及此两圆之平行公切线 $\overline{P_1P_2}$,$\overline{Q_1Q_2}$,由于 $\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{X}_2$ 是 E 的极限点,故存在 $\boldsymbol{X}_1'\in U_1\cap E$,$\boldsymbol{X}_2''\in U_2\cap E$,且 $\overline{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2''}\cap U(\boldsymbol{X}_0,\delta)\neq\varnothing$.但根据 E 的凸性,必有 $\overline{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2''}\subset E$,导致矛盾.

1.2　多元函数及其极限

设 E,$\widetilde{E}$ 是两个集合,f 是一种对应规则:对 $X\in E$,可由 f 唯一确定 $Y\in\widetilde{E}$(称为对应着一个元 Y).这种从 E 到 $\widetilde{E}$ 的对应规则 f 称为映射或变换,记作

$$f:E\to\widetilde{E},\quad Y=f(X)\in\widetilde{E}\quad(X\in E).$$

此时,称 E 为 f 的定义域;$\widetilde{E}$ 称为 f 的取值域,而点集 $f(E)=\{Y:Y=f(X),X\in E\}$ 称为 f 的值域.

定义 1.2.1　设 $f:E\to\widetilde{E}$.若对 $X_1\in E$,$X_2\in E$,总有 $f(X_1)\neq f(X_2)$,则称 f 为单(映)射;若 $T(E)=\widetilde{E}$,则称 f 为满(映)射;若 f 是单射且是满射,则称 f 为双射(E 与 $\widetilde{E}$ 的元素之间存在一一对应);此时可定义逆映射(仍记为)$f^{-1}:\widetilde{E}\to E$ 为 $Y\in\widetilde{E}$,$f^{-1}(Y)=X\in E$(其中 $f(X)=Y$).易知 $f^{-1}[f(X)]=X(X\in E)$.

定义 1.2.2　设 $\widetilde{E}\subset\mathbf{R}^n$,称 $f:\widetilde{E}\to\mathbf{R}^m$ 为多元向量函数.若 $m=1$,则 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的多元(实值)函数.如二元函数 $z=f(x,y)$,其中$(x,y)\in\mathbf{R}^2$,$z\in\mathbf{R}^1$.

向量函数可用多元函数组成向量表示,例如 $f:\widetilde{E}\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$,则

$$f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y)),\quad f_1:\widetilde{E}\to\mathbf{R}^1,\quad f_2:\widetilde{E}\to\mathbf{R}^1.$$

n 元函数 $z=f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中用一个点集 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,z):(x_1,\cdots,x_n)\in\widetilde{E},z\in\mathbf{R}^1\}$ 表示.二元函数的几何意义就是 $\mathbf{R}^3$ 中通常意义下的曲面.

二元函数除用曲面表示外,也可用平面上一系列等位线来表示.称平面点集

$$\{(x,y):f(x,y)=C\}$$

为曲面 $z=f(x,y)$ 的等位线或等高线,它是垂直于 z 轴的平面 $z=C$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 的交线在 xOy 平面上的投影(图 1.1).

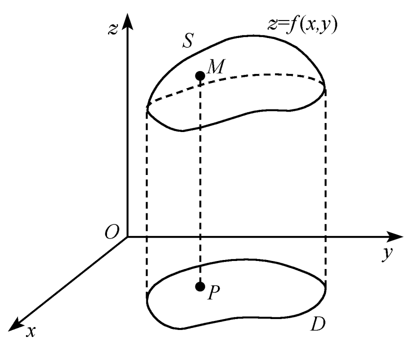


图 1.1

三元函数 $u=f(x,y,z)$ 是四维空间中的点集,用等位面的方法可以给出它在三维空间中的几何表示.

定义 1.2.3　设 $f(x,y)$ 是定义在凸区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的函数.若对 D 内任意两点 $\boldsymbol{X}_1=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{X}_2=(x_2,y_2)$,均有

$$f[tx_1+(1-t)x_2,ty_1+(1-t)y_2]\leqslant tf(x_1,y_1)+(1-t)f(x_2,y_2),$$
则称 $f(x,y)$是凸域 D 上的凸函数．

定义 1.2.4　设在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数满足：对任意的 $t>0$，均有
$$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^kf(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$
则称 f 是 k 次齐次函数．

定义 1.2.5(重极限)　设 $E\subset\mathbf{R}^n$，$f:E\to\mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{X}_0\in E'$，$\boldsymbol{Y}_0\in\mathbf{R}^m$．对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得
$$\|f(\boldsymbol{X})-\boldsymbol{Y}_0\|<\varepsilon\quad(0<\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|<\delta),$$
则称 $f(\boldsymbol{X})$在点 $\boldsymbol{X}$ 趋于 $\boldsymbol{X}_0$ 时有极限 $\boldsymbol{Y}_0$，记为
$$\lim_{\substack{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}_0\\ \boldsymbol{X}\in E}}f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}_0\quad(\boldsymbol{X}_0\text{ 是 }E\text{ 之内点时，记为}\lim_{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}_0}f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}_0).$$

定理 1.2.1　设 $f:E\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$，则 $\lim\limits_{\substack{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}_0\\ \boldsymbol{X}\in E}}f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}_0$ 当且仅当，对任意点列$\{\boldsymbol{X}_k\}\subset E$：$\boldsymbol{X}_k\to\boldsymbol{X}_0$ $(k\to\infty)$，必有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\boldsymbol{X}_k)=\boldsymbol{Y}_0$ $(f(\boldsymbol{X}_k)\to\boldsymbol{Y}_0\ (k\to\infty))$．

类似一元函数，多元函数仍具有极限唯一性、保序性、局部有界性，四则运算规则仍成立．

定义 1.2.6　设 $f(x,y)$在 $0<|x-x_0|<a$，$0<|y-y_0|<a$ 上定义．若对任意固定的值 $y(0<|y-y_0|<a)$，当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x,y)$的极限存在，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$；又当 $y\to y_0$ 时，函数 $\varphi(y)$的极限存在，记 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$．则称 A 是函数 $f(x,y)$先对 x 后对 y 的累次极限，记作 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=A$．

同样可定义先对 y 后对 x 的累次极限：$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$．

从上述定义可以悟出，我们还能引进所谓路径极限的概念．以 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)的情形为例．设 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$是过点(x_0,y_0)的任一条连续曲线$(x_0=\varphi(t_0),y_0=\psi(t_0))$，若有
$$\lim_{t\to t_0}f(\varphi(t),\psi(t))=A,$$
则称 $f(x,y)$在动点(x,y)沿路径(φ,ψ)趋于(x_0,y_0)时有极限 A．

注 1　显然若重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 存在，则 $f(x,y)$的任一路径极限也存在且等于 A．特别在路径为 $x=x$，$y=kx$(k 是常数)时，称该极限为方向(或向径)极限．由此可知，如果 f 存在不同的路径极限，那么其重极限一定不存在．

注 2　设 $f(x,y)$在(x_0,y_0)的邻域上有定义．若对任一满足 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=y_0$ 的曲线 $y=g(x)$，均有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[x,g(x)]=A$，则未必存在 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$．例如 $f(0,y)=1$，$f(x,y)=0\ (x\neq0)$．

定理 1.2.2　设 $f(x,y)$在 $0<|x-x_0|<a$，$0<|y-y_0|<a$ 上定义，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$(有限或无限)，又对任意固定的 $y(0<|y-y_0|<a)$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$，则
$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A.$$

注　若定理中 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$存在改为 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\psi(x)$存在，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$．

上述定理说明，若全面极限存在，两个内层极限存在，则两个累次极限一定存在且相等，或两个累次极限可交换求极限顺序：

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

反之,若两个累次极限存在但不等,则全面极限一定不存在.

定义 1.2.7　设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$, $A\in\mathbf{R}^1$.若对任给 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得

$$|f(\boldsymbol{X})-A|<\varepsilon \quad (\|\boldsymbol{X}\|\geqslant M),$$

则称 $f(\boldsymbol{X})$在 $\boldsymbol{X}$趋于无穷时有极限 A,记为$\lim\limits_{\boldsymbol{X}\to\infty} f(\boldsymbol{X})=A$.

例 1.2.1　设 $f(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上单变量连续的函数,则 f 不是单射.

证明　反证法.假定 f 是单射,我们令 $\varphi(x)=f(x,0)(x\in\mathbf{R}^1)$,则 $\varphi\in C(\mathbf{R}^1)$.又记 $\varphi(0)=a$, $\varphi(1)=b$,则由单射可知 $a\neq b$.不妨设 $a<b$,注意到 φ的连续性,可得$[\varphi(0),\varphi(1)]=[a,b]$.特别地,存在 $x_0\in(0,1)$,使得 $\varphi(x_0)=(a+b)/2$.

现在令 $\psi(y)=f(x_0,y)(y\in\mathbf{R}^1)$,则 $\psi\in C(\mathbf{R}^1)$,且有

$$\psi(0)=f(x_0,0)=\varphi(x_0)=(a+b)/2.$$

因此,$a<\psi(0)<b$, $a<\psi(y)<b\ (y\in U(0,\delta))$.即 $a<f(x_0,y)<b\ (y\in U(0,\delta))$.

此外,易知$\{f(x,0):0\leqslant x<1\}\supset(a,b)$.也就是说,对某个 $y_0\neq 0$ 与 x_1,有等式 $f(x_0,y_0)=f(x_1,0)$,这与单射矛盾.

例 1.2.2　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的凸区域,$f:D\to\mathbf{R}^1$ 是凸函数,则对任意的 $\alpha\in\mathbf{R}^1$,点集 $E=\{(x,y)\in D:f(x,y)\leqslant\alpha\}$是凸集.

证明　设(x_1,y_1),(x_2,y_2)是 E 中任意两点,则 $f(x_1,y_1)\leqslant\alpha$, $f(x_2,y_2)\leqslant\alpha$.从而对 $0<t<1$,我们有

$$\begin{aligned}f(tx_1+(1-t)x_2,ty_1+(1-t)y_2)&\leqslant tf(x_1,y_1)+(1-t)f(x_2,y_2)\\&\leqslant t\alpha+(1-t)\alpha=\alpha.\end{aligned}$$

这说明$(tx_1+(1-t)x_2,ty_1+(1-t)y_2)\in E$,即 E 是凸集.

例 1.2.3　试论下列函数在指定点的重极限,累次极限:

(1) $f(x,y)=(x-y)/(x+y)$, $(x_0,y_0)=(0,0)$.

(2) $f(x,y)=x^2y^2/(x^2y^2+(x-y)^2)$, $(x_0,y_0)=(0,0)$.

(3) $f(x,y)=(x+y)\sin(1/x)\sin(1/y)$, $(x_0,y_0)=(0,0)$.

解　(1) 累次极限存在:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

而对两点列$(x_n',y_n')=(1/n,1/n)$,$(x_n'',y_n'')=(2/n,1/n)\ (n\in\mathbf{N})$,我们有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n',y_n')=0,\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n'',y_n'')=1/3.$$

这说明重极限不存在.

(2) 注意到$\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0\ (x\neq 0)$,$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0\ (y\neq 0)$,故知两个累次极限均为 0.但是因为$\lim\limits_{n\to\infty} f(1/n,1/n)=1$,$\lim\limits_{n\to\infty} f(1/n,-1/n)=0$,所以重极限不存在.

(3) 注意到 $f(1/n\pi, y)=0$, $f(2/(4n+1)\pi, y)\to y\sin\dfrac{1}{y}$ $(n\to\infty)$,故知累次极限不存在.此外,因为有 $0\leqslant|f(x,y)|\leqslant|x|+|y|$,所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

例 1.2.4 解答下列问题:

(1) 试求 $f(x,y)=(x^2+4x-4y)/(y^2+6y-6x)$ 当点 (x,y) 沿曲线 $y^2+x^2y-x^2=0$ 趋于 $(0,0)$ 时的路径极限.

(2) 试论 $f(x,y)=\begin{cases}0, & |y|\leqslant x^2 \text{ 或 } y\neq 0,\\ 1, & |y|>x^2 \text{ 或 } y=0\end{cases}$ 的向经极限(包括累次极限).

(3) 试论 $f(x,y)=x^2e^{-(x^2-y)}$ 在动点 $x=t\cos\theta, y=t\sin\theta$ 以 $t\to+\infty$ 时的极限.

解 (1) 易知该路径曲线在原点的切线有两条:$y=\pm x$,因此用变量替换 $y=tx$,该曲线及其极限过程可表示为

$$x=(1-t^2)/t,\quad y=1-t^2;\quad (x,y)\to(0,0)\sim t\to\pm 1.$$

从而我们有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{t\to\pm1}\frac{(1-t^2)^2/t^2+4(1-t^2)/t-4(1-t^2)}{(1-t^2)^2+6(1-t^2)-6(1-t^2)/t}$$
$$=\begin{cases}-3/2, & t\to+1,\\ -2/3, & t\to-1.\end{cases}$$

(2) 易知各方向的方向极限为0,累次极限为

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}0=0,\quad \lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}1=1.$$

(3) 令 $F(t,\theta)=f(t\cos\theta, t\sin\theta)$,则

$$F(t,\theta)=t^2\cos^2\theta e^{-t^2\cos^2\theta+t\sin\theta}\quad(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

若 $\theta=\pm\pi/2$,则 $F(t,\pm\pi/2)=0$.从而 $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t,\pm\pi/2)=0$.

若 $\theta\neq\pm\pi/2$,则 $\cos\theta\neq0$,且知 $\lim\limits_{t\to+\infty}(t^2\cos^2\theta-t\sin\theta)=+\infty$.从而依 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{t\to+\infty}F(t,\theta)=\cos^2\theta\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{e^{t^2\cos^2\theta-t\sin\theta}}=\cos^2\theta\lim_{t\to+\infty}\frac{2t}{(2t\cos^2\theta-\sin\theta)e^{t^2\cos^2\theta-t\sin\theta}}$$
$$=\cos^2\theta\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{(\cos^2\theta-\sin\theta/2t)e^{t^2\cos^2\theta-t\sin\theta}}=0\quad(\lim_{n\to\infty}f(n,n^2)=+\infty).$$

例 1.2.5 试论下列函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处的重极限:

(1) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$. (2) $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$. (3) $\dfrac{xy}{x+y}$. (4) $\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$.

(5) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$. (6) $\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$. (7) $|y|^{|x|}$. (8) $|y|\ln|x|$.

解 (1) 考察向径极限,即令 $y=kx$,我们有

$$\lim_{x\to0}f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{(1+k^2)x^2}{[(1+k^2)+(1-k)^2]x^2}=\frac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2}.$$

由于 k 可取不同值,故重极限不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to0}f(x,kx^2)=k/(1+k^2)$,重极限不存在.

(3) 注意到 $f(x,kx)=kx^2/(1+k)x\to0(x\to0)$,又有

$$f(x,-x+x^2)=(-x^2+x^3)/x^2\to-1\quad(x\to0),$$

故重极限不存在.

(4) 注意到 $f(x,0)=1/x^2\to+\infty(x\to0)$,又有

$$\lim_{x\to0}f(x,x)=\lim_{x\to0}(x^2+x^4)/(x^2+x^4)=1,$$

故重极限不存在.

(5) 注意到 $f(x,0)=x\to0(x\to0)$,又有

$$\lim_{x\to0}f(x,x^3-x^2)=\lim_{x\to0}[x^3+(x^3-x^2)^3]/x^3=\lim_{x\to0}[1+(x^2-x)^3]=1,$$

故重极限不存在.

(6) 注意到 $f(x,x)=x/2\to0(x\to0)$,又有

$$\lim_{x\to0}f(x,x^2-x)=\lim_{x\to0}\frac{x^4-2x^5+x^6}{3x^4-3x^5+x^6}=\frac{1}{3}.$$

故重极限不存在.

(7) 令 $|y|=e^{-\lambda/|x|}(\lambda>0)$,易知 $|y|\to0(|x|\to0)$,又有

$$\lim_{x\to0}f(x,e^{-\lambda/|x|})=\lim_{x\to0}e^{|x|\cdot\ln e^{-\lambda/|x|}}=\lim_{x\to0}e^{|x|(-\lambda/|x|)}=e^{-\lambda}.$$

故重极限不存在.

(8) 注意到 $f(x,x)\to0(x\to0)$.又有 $f(x,a/\ln|x|)=|a|$,故重极限不存在.

例 1.2.6　试证明下列极限等式:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2|y|^{3/2}}{x^4+y^2}=0$.　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=0$.

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证明　(1) 只需注意

$$0\leqslant\frac{x^2|y|^{3/2}}{x^4+y^2}=\frac{2x^2|y|}{x^4+y^2}\frac{|y|^{1/2}}{2}\leqslant\frac{|y|^{1/2}}{2}\to0\quad(y\to0).$$

(2) 只需注意

$$\left|\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right|=\left|(x^2+y^2)-xy\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant|x^2+y^2|+|xy|\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|$$

$$\leqslant|x^2+y^2|+|xy|\leqslant\frac{3|x^2+y^2|}{2}.\qquad\text{(也可采用下一题的解法)}$$

(3) 令 $x=r\cos t,y=r\sin t$,则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\lim_{r\to0}|r\sin t\cos t|\leqslant\lim_{r\to0}r=0.$$

例 1.2.7　试证明下列极限等式：

(1) $I=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0$.　　(2) $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}=a$.

证明　(1) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,并注意不等式

$$\left|\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=|r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)|\leqslant|2r|.$$

(2) 注意 $\dfrac{\sin xy}{x}=y\cdot\dfrac{\sin xy}{xy}\to a\cdot 1\ (x\to 0)$.

例 1.2.8　试论下列函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$处的重极限：

(1) $(x+y)\ln(x^2+y^2)$.　(2) $\ln(1+xy)/(x+\tan y)$.　(3) $(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

解　(1) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,我们有

$$|f(x,y)|=|r(\cos\theta+\sin\theta)\ln r^2|\leqslant|4r\ln r|.$$

故 $f(x,y)\to 0((x,y)\to(0,0))$.

(2) 注意到 $f(x,0)=0$,另一方面又有

$$f(x,-x)=\frac{\ln(1-x^2)}{x-\tan x}=\frac{-x^2}{x-\tan x}\cdot\ln(1-x^2)^{-1/x^2},$$

$$\lim_{x\to 0}\ln(1-x^2)^{-1/x^2}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x-\tan x}=+\infty.$$

故重极限不存在.

(3) 取对数再用参变量,我们有

$$f(x,y)=e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}\leqslant e^{(x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2)},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}e^{(x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2)}=\lim_{r\to 0}e^{r^2\ln r}=1.$$

例 1.2.9　试求下列函数 $f(x,y)$的累次极限：

$$I_1=\lim_{x\to a}\lim_{y\to b}f(x,y),\quad I_2=\lim_{y\to b}\lim_{x\to a}f(x,y).$$

(1) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\begin{pmatrix}a=\infty\\ b=\infty\end{pmatrix}$.　　(2) $\dfrac{x^y}{1+x^y}\begin{pmatrix}a=+\infty\\ b=0^+\end{pmatrix}$.

(3) $\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}\begin{pmatrix}a=\infty\\ b=\infty\end{pmatrix}$.　　(4) $\dfrac{1}{xy}\tan\dfrac{xy}{1+xy}\begin{pmatrix}a=0\\ b=\infty\end{pmatrix}$.

(5) $\log_x(x+y)\begin{pmatrix}a=1\\ b=0\end{pmatrix}$.

解　(1) $I_1=\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2/y^2+1}{x^2/y^2+y^2}=0$; $I_2=\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+y^2/x^2}{1+y^4/x^2}=1$.

(2) 注意到 $\lim\limits_{y\to 0^+}x^y=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^y=+\infty(y>0)$,故 $I_1=\dfrac{1}{2}$, $I_2=1$.

(3) 易知 $\lim\limits_{y\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}=1$,故 $I_1=0$, $I_2=1$.

(4) 因为我们有$\lim\limits_{y\to\infty} f(x,y)=0\ (x\neq 0)$,以及

$$\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan[xy/(1+xy)]}{xy/(1+xy)}(1+xy)^{-1}=1,$$

所以 $I_1=0$,$I_2=1$.

(5) 改写 $f(x,y)=\ln(x+y)/\ln x\ (x>0,x+y>0,x\neq 1)$,易知

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=1,\quad I_1=1.$$

此外,因为我们有

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\begin{cases}+\infty, & -1<y<0,\\ -\infty, & 0<y<+\infty;\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=\begin{cases}-\infty, & -1<y<0,\\ +\infty, & 0<y<+\infty;\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=1\quad (y=0),$$

所以不存在$\lim\limits_{x\to 1} f(x,y)$.从而 I_2 不存在.

例 1.2.10　试求下列函数 $f(x,y)$的重极限 I:

(1) $\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}\begin{pmatrix}x\to+\infty\\ y\to+\infty\end{pmatrix}$.　(2) $\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\begin{pmatrix}x\to\infty\\ y\to\infty\end{pmatrix}$.

(3) $(x^2+y^2)e^{-(x+y)}\begin{pmatrix}x\to+\infty\\ y\to+\infty\end{pmatrix}$.　(4) $\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\begin{pmatrix}x\to+\infty\\ y\to+\infty\end{pmatrix}$.

(5) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2/(x+y)}\begin{pmatrix}x\to+\infty\\ y\to a\end{pmatrix}$.

解　(1) 注意到 $x^2-xy+y^2\geqslant xy$,故可得

$$0<\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x+y}{xy}\right|\leqslant\frac{1}{|y|}+\frac{1}{|x|},\quad I=0.$$

(2) 注意到 $0<f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^4+y^4}+\dfrac{y^2}{x^4+y^4}\leqslant\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}$,故 $I=0$.

(3) 注意到 $f(x,y)=x^2/e^{x+y}+y^2/e^{x+y}<x^2/e^x+y^2/e^y$,故 $I=0$.

(4) 注意到 $0<f(x,y)\leqslant(1/2)^{x^2}$,故 $I=0$.

(5) 取对数,我们有 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}} e^{\ln(1+1/x)^x/(1+y/x)}=e$.

例 1.2.11　试论下列函数 $f(x,y)$在指定点的极限状况:

(1) $e^{x/(x^2+y^2)}$,$(0,0)$.　(2) $e^{x^2-y^2}\cdot\sin(2xy)$,$(-\infty,+\infty)$.

解　(1) 因为 $f(x,y)=e^{\cos\theta/r}$,所以当 $\cos\theta\leqslant 0$ 即 $\pi/2\leqslant\theta\leqslant 3\pi/2$ 时,极限存在.

(2) 作变量替换 $x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,我们有

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)=\lim_{r\to+\infty} e^{r^2\cos 2\theta}\cdot\sin(r^2\sin 2\theta).$$

由此可知，当 $\cos 2\theta<0$ 或 $\sin 2\theta=0$ 即 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{7\pi}{4}$，$\theta=0$，$\theta=\pi$ 时极限存在.

例 1.2.12　试证明下列命题：

(1) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上定义，$(x_0,y_0)\in D$. 若

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$，　(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$ $(y\neq y_0)$，

则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$.

(2) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上定义，$(x_0,y_0)\in D$. 若

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\psi(y)$ $(y\neq y_0)$，

(ii) 存在 $\eta>0$，$I=\{x,0<|x-x_0|<\eta\}$，使得

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)\quad(\text{关于 } x\in I \text{ 一致}),$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

证明　(1) 只需指出存在极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$，这是因为由此必知其极限为 A. 事实上，对任给 $\varepsilon>0$，根据题设可知，存在 $\delta>0$，使得

$|f(x,y')-A|<\varepsilon$，　$|f(x,y')-\varphi(y')|<\varepsilon$　$(0<|x-x_0|,|y'-y_0|<\delta)$.

由此推得 $|\varphi(y')-A|<2\varepsilon(0<|y'-y_0|<\delta)$.

现在对上述 ε,δ，在 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，我们有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\varepsilon\quad(0<|y'-y_0|,|y''-y_0|<\delta).$$

令 $x\to x_0$，即得 $|\varphi(y')-\varphi(y'')|<\varepsilon$. 这说明存在极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)$.

(2) 由(ii)知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon/2\quad(0<|y-y_0|<\delta,x\in I).$$

从而当 $0<|y'-y_0|<\delta$ 且 $x\in I$ 时，就有 $|f(x,y)-f(x,y')|<\varepsilon$. 令 $x\to x_0$，由(i)可得 $|\psi(y)-\psi(y')|\leqslant\varepsilon$. 这说明存在 $\lim\limits_{y\to y_0}\psi(y)\triangleq A$. 因此，存在 $\delta'>0$：$\delta'<\delta$，当 $0<|y-y_0|<\delta'$ 时，导出

$$f(x,y)-\varepsilon/2<\varphi(x)<f(x,y)+\varepsilon/2\quad(x\in I),$$

以及 $A-\varepsilon/2<\psi(y)<A+\varepsilon/2$. 综合上述结果，我们有

$$A-\varepsilon<\psi(y)-\varepsilon/2\leqslant\varliminf_{x\to x_0}\varphi(x)\leqslant\varlimsup_{x\to x_0}\varphi(x)\leqslant\psi(y)+\varepsilon/2<A+\varepsilon.$$

因为 ε 是任意给定的，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$.

例 1.2.13　试证明下列命题：

(1) 设 $f(x)$ 在区间 $I\subset\mathbf{R}^1$ 上一致连续，J_1，J_2 是 $\mathbf{R}^1$ 中两个区间，$g(x,y)$ 定义

在 $J_1\times J_2$ 上,$x_0\in J_1$,且 $g(x,y)\in I(0<|x-x_0|<\delta, y\in J_2)$.若有

$$\lim_{x\to x_0} g(x,y)=\varphi(y)\quad(\text{对 } y\in J_2 \text{ 一致}),\quad \varphi(y)\in I,$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x,y)]=f(\varphi(y))$(关于 $y\in J_2$ 一致).

(2) 设 $D=\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y<y_0\}$,$f(x,y)$在 D 上关于变量 x 是连续的,又在 D 内当 y 递增趋于 y_0 时,$f(x,y)$随 y 也递增且收敛于 $\varphi(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)\quad(\text{关于 } x\in[a,b]\text{一致}).$$

(3) 设定义在 $I=[a,b]\times[c,d]$上的 $f(x,y)$是单变量 x 的连续函数,又 $y_0\in[c,d]$,$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$(关于 $x\in[a,b]$一致),则 $\varphi\in C([a,b])$.

证明 (1) 依题设知,对任意的$\{x_n\}\subset J_1: x_n\to x_0\ (n\to\infty)$,有$\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n,y)=\varphi(y)$(关于 $y\in J_2$ 一致).从而由 f 的一致连续性就有

$$\lim_{n\to\infty} f[g(x_n,y)]=f[\varphi(y)]\quad(\text{关于 } y\in J_2 \text{ 一致}),$$

由此即得所证.

(2) 取 $y_n: 0<y_n<y_0, y_n<y_{n+1}\ (n\in\mathbf{N})$,且 $y_n\to y_0\ (n\to\infty)$,并记 $\varphi_n(x)=f(x,y_n)(a\leqslant x\leqslant b)$,则依题设知$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$.从而对任给 $\varepsilon>0$,以及任意的 $x\in[a,b]$,有指标 N_x,使得 $|\varphi_{N_x}(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$.而由连续性又知,存在 $\delta_x>0$,使得

$$|\varphi_{N_x}(t)-\varphi(t)|<\varepsilon\quad(|t-x|<\delta_x).$$

因为 $\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{n+1}(x)$,所以有

$$|\varphi_n(t)-\varphi(t)|<\varepsilon\quad(t\in(x-\delta_x,x+\delta_x),\quad n\geqslant N_x).$$

这说明$\{(x-\delta_x,x+\delta_x)\}$形成闭区间$[a,b]$的一个开覆盖,因此根据有限覆盖定理,立即可知当 $n\to\infty$时,$\varphi_n(x)$是关于 $x\in[a,b]$一致收敛于 $\varphi(x)$的.证毕.

(3) 设 $x_0\in[a,b]$.易知对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$ 以及 y': $|y'-y_0|<\delta$,使得

$$|f(x_0,y')-\varphi(x_0)|<\varepsilon/3,\quad |f(x,y')-\varphi(x)|<\varepsilon/3\quad(x\in[a,b]).$$

根据 f 对单变量 x 的连续性,还存在 $\delta'>0$,使得

$$|f(x,y')-f(x_0,y')|<\varepsilon/3\quad(|x-x_0|<\delta').$$

从而我们有不等式

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\varphi(x_0)|&\leqslant|\varphi(x)-f(x,y')|+|f(x,y')-f(x_0,y')|\\&\quad+|f(x_0,y')-\varphi(x_0)|<\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3\\&=\varepsilon\quad(|x-x_0|<\delta').\end{aligned}$$

例 1.2.14 试证明下列命题:

(1) 设定义在 $D=\{(x,y): 0<x^2+y^2<1\}$上的 $f(x,y)$满足

(i) 对任意的 $\theta\leqslant[0,2\pi]$,有$\lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)=0$.

(ii) 存在 $M>0$,使得对任意的$(x_i,y_i)\in D(i=1,2)$,有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|),$$
则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

(2) 设 $f\in C^{(1)}([1,\infty])$,且存在 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.若 $f'(x)$在$[1,\infty)$上一致连续,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(3) 设 $f(x,y)$是定义在 $D=\{(x,y):x>0,y>0\}$上的正值连续函数(见 1.3 节),且对每个变量均是递增的,又存在 $a>0$,使得
$$f(x,x)>x\quad(0<x<a),\quad f(x,x)<x\quad(x>a).$$
若对给定的 $a_1>0,a_2>0$,令 $a_n=f(a_{n-1},a_{n-2})(n>2)$,则 $a_n\to a(n\to\infty)$.

证明　(1) 对点列$\{(x_n,y_n)\}:x_n\to0,y_n\to0(n\to\infty)$以及 $M>0$,存在 N,当 $n,m\geqslant N$ 时有 $|x_n-x_m|+|y_n-y_m|<\varepsilon/M$.从而知
$$|f(x_n,y_n)-f(x_m,y_m)|\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon\quad(n,m\geqslant N).$$
即$\{f(x_n,y_n)\}$是 $\mathbf{R}^1$ 中的 Cauchy 列,故存在$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=A$.由(i)即知 $A=0$.

(2) 为证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$,只需指出
$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to0^+}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to0^+}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}.$$
为此,令 $g(x,y)=[f(x+y)-f(x)]/y$,我们有

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x,y)=(A-A)/y=0\quad(y>0)$.

(ii) 因为 $f'(x)$在$[1,\infty)$上一致连续,所以对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得 $|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon(|x'-x''|<\delta)$.从而有
$$|g(x,y)-f'(x)|=|f'(x+\theta y)-f'(x)|<\varepsilon$$
$$(0<y<\delta,x\in[1,\infty),0<\theta<1).$$
这说明 $\lim\limits_{y\to0^+}g(x,y)=f'(x)$(对 x 一致).从而根据例 1.2.12(2),即得所证.

(3) 易知 $f(a,a)=a$,令 $b_1=b_2=\min\{a_1,a_2\}$,$b_n=f(b_{n-1},b_{n-2})(n>2)$.

若 $\min\{a_1,a_2\}<a$,则$\{b_n\}$是严格递增列,且 $b_n\leqslant a(n\in\mathbf{N})$.

若 $\min\{a_1,a_2\}>a$,则$\{b_n\}$是严格递减列,且 $b_n\geqslant a(n\in\mathbf{N})$.由此可知 $b_n\to a(n\to\infty)$,显然 $a_n\leqslant b_n(n\in\mathbf{N})$.

现在令 $c_1=c_2=\max\{a_1,a_2\}$,$c_n=f(c_{n-1},c_{n-2})(n>2)$,则同理可证 $c_n\to a(n\to\infty)$.又有 $c_n\leqslant a_n(n\in\mathbf{N})$.这说明 $a_n\to a(n\to\infty)$.

注　特例:$a_1>0,a_2>0,a_{n+2}=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}(n=1,2,\cdots)$,则令 $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{y}$,可知 $a_n\to4(n\to\infty)$.

例 1.2.15　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上的 m 次齐次函数,且在有界区域上有界,则
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

(2)(内积的连续性)设 $\mathbf{R}^n$ 中的点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$,$\{\boldsymbol{Y}_k\}$满足

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{X}_0,\quad \lim_{k\to\infty}\boldsymbol{Y}_k=\boldsymbol{Y}_0,$$

则$\langle\boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{Y}_k\rangle\to\langle\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}_0\rangle(k\to\infty)$.

证明　(1)不妨限制在范围 $x^2+y^2\leqslant1$ 内.令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,则由题设知($|f(x,y)|\leqslant M,x^2+y^2\leqslant1$)$f(x,y)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=r^mf(\cos\theta,\sin\theta)$.

从而有 $|f(x,y)|\leqslant r^m|f(\cos\theta,\sin\theta)|\leqslant Mr^m\to0((x,y)\to(0,0))$.

(2)依题设知,存在 $M'>0$,使得 $\|\boldsymbol{Y}_k\|\leqslant M'(k\in\mathbf{N})$.令 $M=\max\{M',\|\boldsymbol{X}_0\|\}$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 N,使得

$$\|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_0\|<\varepsilon/2M,\quad \|\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{Y}_0\|<\varepsilon/2M\quad(k\geqslant N).$$

从而当 $k\geqslant N$ 时我们有

$$\begin{aligned}|\langle\boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{Y}_k\rangle-\langle\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}_0\rangle|&=|\langle\boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{Y}_k\rangle-\langle\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}_k\rangle+\langle\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}_k\rangle-\langle\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}_0\rangle|\\&=|\langle\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}_k\rangle+\langle\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{Y}_0\rangle|\\&\leqslant|\langle\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}_k\rangle|+|\langle\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{Y}_0\rangle|\\&\leqslant\|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_0\|\,\|\boldsymbol{Y}_k\|+\|\boldsymbol{X}_0\|\,\|\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{Y}_0\|\\&<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

1.3　多元函数的连续性

定义 1.3.1　设 $f:E\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$,$\boldsymbol{X}_0\in E$.若对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$\|f(\boldsymbol{X})-f(\boldsymbol{X}_0)\|<\varepsilon\quad(\boldsymbol{X}\in E\text{ 且 }\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|<\delta),$$

则称 f 在 $\boldsymbol{X}_0$ 处连续.

当然,若 $\boldsymbol{X}_0$ 是 E 的孤立点,则 f 在 $\boldsymbol{X}_0$ 处连续;若 $\boldsymbol{X}_0\in E'$,则 f 在 $\boldsymbol{X}_0$ 处连续就是存在极限

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}_0\\ \boldsymbol{X}\in E}}f(\boldsymbol{X})=f(\boldsymbol{X}_0).$$

此外,若 f 在 E 的任一点处皆连续,则称 f 在 E 上连续,记为 $f\in C(E,\mathbf{R}^m)$.$C(E,\mathbf{R}^1)$简记为 $C(E)$.易知函数的连续性对四则运算是封闭的;f 在 $\boldsymbol{X}_0$ 处连续的充分必要条件是:对 E 中任一收敛于 $\boldsymbol{X}_0$ 的点列$\{\boldsymbol{X}_k\}$,均有 $f(\boldsymbol{X}_k)\to f(\boldsymbol{X}_0)(k\to\infty)$.下述性质成立:

(1)若 $f\in C(E)$,即 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 E 上的 n 元连续函数,则固定 $x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n$,$f(x_1,\cdots,x_n)$是单变量 x_i 的连续函数.

(2)设 $f:E\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ 是向量函数:

$$f(\boldsymbol{X})=(f_1(\boldsymbol{X}),f_2(\boldsymbol{X}),\cdots,f_n(\boldsymbol{X})),\quad f_k:E\to\mathbf{R}^1,$$

则 f 在点 $\boldsymbol{X}_0\in E$ 处连续当且仅当,每个分量函数 $f_k(k=1,2,\cdots,n)$在 $\boldsymbol{X}_0$ 处连续.

定理 1.3.1　设 $F\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集,$f\in C(E,\mathbf{R}^m)$,我们有

(1)$f(F)\subset\mathbf{R}^m$ 是有界闭集.

(2)f 在 F 上一致连续.即对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$\|f(\boldsymbol{X}_2)-f(\boldsymbol{X}_1)\|<\varepsilon\quad(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in F,\|\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_1\|<\delta).$$

(3) $m=1$ 时,$f(\boldsymbol{X})$在 F 上可取到最大、最小值,即存在 F 中两点 $\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{X}_2$,使得

$$f(\boldsymbol{X}_1)\leqslant f(\boldsymbol{X})\leqslant f(\boldsymbol{X}_2)\quad(\boldsymbol{X}\in F).$$

定理 1.3.2 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的连通集,$f\in C(D)$.

(1) 若有 D 内两点 $\boldsymbol{X}_1$,$\boldsymbol{X}_2$,使得 $f(\boldsymbol{X}_1)<0$,$f(\boldsymbol{X}_2)>0$,则存在 $\boldsymbol{X}_0\in D$,使得 $f(\boldsymbol{X}_0)=0$.

(2) $f(E)$是连通集.

例 1.3.1 试论下列函数的连续性:

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\sin(xy)/\sqrt{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}2xy/(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}x\sin(1/y), & y\neq0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}\ln(1+xy)/x, & x\neq0,\\ y, & x=0.\end{cases}$

(5) $f(x,y)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ y, & x\text{ 是有理数}.\end{cases}$

(6) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$.

解 (1) 注意到 $2|xy|\leqslant x^2+y^2$,我们有

$$\begin{aligned}|f(x,y)|&\leqslant|\sin xy|/\sqrt{2|xy|}\\&\leqslant\sqrt{|xy|/2}\sin|xy|/|xy|\ ((x,y)\neq(0,0)).\end{aligned}$$

由此可知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$,即 f 在点$(0,0)$处连续.

(2) 注意到$\lim\limits_{n\to\infty}f(1/n,1/n)=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}f(2/n,1/n)=4/5$,故 f 在点$(0,0)$处不连续(注意,f 是单元连续的).

(3) 设 $x_0\in\mathbf{R}^1$,且令 $y_n=2/(4n+1)\pi$,$x_n=nx_0/(n+1)$ $(n\in\mathbf{N})$,则 $y_n\to0$,$x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$,且知(设 $x_0\neq0$)

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx_0}{n+1}\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}=x_0\neq f(x_0,0).$$

即 f 在点$(x_0,0)$$(x_0\neq0)$处不连续.因为$|f(x,y)|=|x\sin(1/y)|<|x|$,所以 f 在$(0,0)$处连续.

(4) 注意 $xy>-1$.显然,f 在 $x\neq0$ 的点处是连续的.对 $x=0$:

(i) 在$(0,0)$处.对任给 ε:$0<\varepsilon<1$,则在$|x|<\varepsilon$,$|y|<\varepsilon$时有

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\begin{cases}|\ln(1+xy)/x|\leqslant|xy|/|x|=|y|, & x\neq0,\\ |y|, & x=0.\end{cases}$$

即 f 在$(0,0)$处连续.

(ii) 在$(0,y_0)(y_0\neq 0)$处.对 ε:$0<\varepsilon<1$,存在 δ:$0<\delta<\varepsilon/2(|y_0|+1)$,使得

$$\left|\frac{\ln(1+xy)}{xy}-1\right|<\frac{\varepsilon}{2|y_0|+1}\quad(y\neq 0,0<|x|<\delta,|y-y_0|<\delta).$$

从而我们有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,y_0)|&=|y[\ln(1+xy)/xy-1]+(y-y_0)|\\&\leqslant(|y_0|+\delta)\varepsilon/2(|y_0|+1)+\delta<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 f 在$(0,y_0)$处连续.

(5) 考察点(x_0,y_0)的邻域 U 内的值,我们有

(i) 若 $y_0\neq 0$,则在 U 内 f 可取零值,又可取值 y_0,f 在点(x_0,y_0)处不连续.

(ii) 若 $y_0=0$,则在 U 内 f 的最大值为$|y|$,这说明 f 在 x 轴$(y=0)$上连续.

(6) 注意到 $f(0,0,z)=-1$,$f(x,y,0)=1$,故 f 在$(0,0,0)$处不连续.

例 1.3.2 试证明下列命题:

(1) 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$ 满足:

(i) $f(x,y)$是单变量连续的,

(ii) 若 $K\subset\mathbf{R}^2$ 是有界闭集,则 $f(K)\subset\mathbf{R}^1$ 是有界闭集,

则 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

(2) 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$ 满足:

(i) 若 $K\subset\mathbf{R}^2$ 是有界闭集,则 $f(K)\subset\mathbf{R}^1$ 是有界闭集,

(ii) 若$\{K_n\}$是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界闭集列,且有

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}f(K_n),\quad K_n\supset K_{n+1}\quad(n\in\mathbf{N}),$$

则 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

(3) 设 F_1,F_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个互不相交的非空闭集,则存在 $f\in C(\mathbf{R}^n)$,使得

(i) $0\leqslant f(\boldsymbol{X})\leqslant 1(\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n)$.

(ii) $F_1=\{\boldsymbol{X}:f(\boldsymbol{X})=1\}$;$F_2=\{\boldsymbol{X}:f(\boldsymbol{X})=0\}$.

证明 (1) 只需指出 f 在$(0,0)$处连续即可(一般情形作变量替换),且不妨假定 $f(0,0)=0$(否则,加一个常数).

反证法.假定 f 在$(0,0)$处不连续,则存在 $\varepsilon_0>0$,以及点列$\{(x_n,y_n)\}$:$(x_n,y_n)\to(0,0)(n\to\infty)$,使得$|f(x_n,y_n)|\geqslant\varepsilon_0(n\in\mathbf{N})$.

根据 f 对变量 x 的连续性可知,存在 $\delta>0$,使得$|f(x,0)|<\varepsilon/2(|x|<\delta)$.由此知存在 N,使得$|x_n|<\delta(n\geqslant N)$.从而有$|f(x_n,0)|<\varepsilon/2(n\geqslant N)$.

取定 $n\geqslant N$,注意到 $f(x_n,y)$对 y 连续,故依中值定理知,存在 y_n':$0<y_n'<y_n$,使得$|f(x_n,y_n')|=n\varepsilon_0/(n+1)$.由于 $y_n\to 0(n\to\infty)$,故 $y_n'\to 0(n\to\infty)$.因此,$K=\{(x_n,y_n'):n\geqslant N\}\cup\{(0,0)\}$是有界闭集.根据题设,$f(K)$是有界闭集.但是,点集

$$f(K)=\{n\varepsilon_0/(n+1):n\geqslant N\}\cup\{0\}$$

不包含极限点 $x=x_0$,导致矛盾.证毕.

(2)设 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,令 $z_0=f(x_0,y_0)$,则对任给 $\varepsilon>0$,作区间 $I_\varepsilon=(z_0-\varepsilon,z_0+\varepsilon)$以及闭球列 $K_n=\overline{B}(\boldsymbol{X}_0,1/n)(n\in\mathbf{N})$,由(ii)知$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}f(K_n)=\{f(\boldsymbol{X}_0)\}$.因为$\{(\mathbf{R}^1\setminus I_\varepsilon)\cap f(K_n)\}$是递减有界闭集列,且其交集为空集,所以存在 n_0,使得

$$(\mathbf{R}^1\setminus I_\varepsilon)\cap f(K_{n_0})=\varnothing.$$

这说明$|f(\boldsymbol{X})-f(\boldsymbol{X}_0)|<\varepsilon(\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|<1/n_0)$,即 f 在(x_0,y_0)处连续.

(3)函数 $f(\boldsymbol{X})=d(\boldsymbol{X},F_2)/[d(\boldsymbol{X},F_1)+d(\boldsymbol{X},F_2)]$即为所求.

例 1.3.3　试证明下列命题:

(1)设 $D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,$f(x,y)$是 D 上单变量连续的函数.又有 $E\subset D$ 且 $\overline{E}=D$.若 $f(x,y)=0((x,y)\in E)$,则 $f(x,y)=0((x,y)\in D)$.

(2)设 $D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$,$f(x,y)$定义在 D 上.若 $f(x,y)$是单变量 x 的连续函数,且对任意的 $y_0\in[c,d]$,有

$$\lim_{y\to y_0}f(x,y)=f(x,y_0)\quad(对\ x\in[a,b]一致),$$

则 $f(x,y)$在 D 上连续.

(3)设 $f(x,y)$在 $D=\{(x,y):a<x<b,c<y<d\}$上定义.若 $f(x,y)$对单变量 x 连续,且有(Lip 1)$M>0$,使得

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant M|y'-y''|\quad(a<x<b;c<y',y''<d),$$

则 $f(x,y)$在 D 上连续.

(4)设 $f(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上单变量连续的函数,且 $f(x,y)$在视作 y 的函数时是单调的,则 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

证明　(1)任取(x_0,y_0):$0<x_0<1,0<y_0<1$,往证 $f(x_0,y_0)=0$.为此,只需指出,对任给 $\delta>0$,存在 $x'\in[x_0,x_0+\delta]\triangleq I_1$,使得 $f(x',y_0)=0$.我们作$\{a_n\}$:

$$1>a_1>a_2>\cdots>a_n>\cdots>y_0,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=y_0,$$

并记 $J_n=[a_{n+1},a_n](n\in\mathbf{N})$.由 $\overline{E}=D$ 可知,存在 $x_1\in I_1$,$y_1\in J_1$,使 $f(x_1,y_1)=0$.又由 f 的连续性,可知存在 $I_2=[\alpha,\beta]\subset I_1$,使得$|f(x,y_1)|<1(x\in I_2)$.类似地可知,存在 $y_2\in J_2$ 以及闭区间 $I_3\subset I_2$,使得$|f(x,y_2)|<1/2(x\in I_3)$.继续这一过程,可得闭区间列$\{I_n\}$,点列$\{y_n\}$满足

$$I_{n+1}\subset I_n,\quad y_n\in J_n,\quad |f(x,y_n)|<1/n\quad(x\in I_{n+1}).$$

根据区间套定理可知,存在 $x'\in I_n(n\in\mathbf{N})$,从而有$|f(x',y_n)|<1/n(n\in\mathbf{N})$.

因为 $y_n\in J_n(n\in\mathbf{N})$且 $y_n\to y_0(n\to\infty)$,而 $f(x',y)$是单变量 y 的连续函数,所以在上式中令 $n\to\infty$,导出$|f(x',y_0)|=0$.

(2)设$(x_0,y_0)\in D$.依题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当$|x-x_0|<\delta$时有$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2$,以及

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon/2 \quad (|y-y_0|<\delta, a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d),$$

从而可得($(x,y)\in D$, $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$)

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

(3) 注意条件 Lip 1 与上题一致极限条件的比较.

(4) 设$(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$.依题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,使得$|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2$($|y-y_0|<\delta_1$).又存在 $\delta_2>0$,使得

$$|f(x,y_0\pm\delta_1)-f(x_0,y_0\pm\delta_1)|<\varepsilon/2 \quad (|x-x_0|<\delta_2).$$

不妨假定 f 对 y 是递增函数,则当$|x-x_0|<\delta_2$, $|y-y_0|\leqslant\delta_1$ 时,有

$$f(x,y_0-\delta_1)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x,y_0+\delta_1).$$

$$\begin{aligned}|f(x,y_0\pm\delta_1)-f(x_0,y_0)|\leqslant&|f(x,y_0\pm\delta_1)-f(x_0,y_0\pm\delta_1)|\\&+|f(x_0,y_0\pm\delta_1)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

由此即知存在 $\delta>0$,使得$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$($|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$).

例 1.3.4 试证明下列命题:

(1) 设 $D=\{(x,y):a<x<b,c<y<d\}$, $f(x,y)$在 D 上连续,$\varphi\in C((a,b))$且 $c<\varphi(x)<d$,则 $F(x)=f(x,\varphi(x))$在(a,b)上连续.

(2) 设 $D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$, $f(x,y)$在 D 上连续.若 $g(x)=\max\{f(x,y):y\in[0,1]\}$,则 $g\in C([0,1])$.

(3) 设 $D=\{(x,y,z):a\leqslant x,y,z\leqslant b\}$, $f(x,y,z)$在 D 上连续.令

$$\varphi(x)=\max_{a\leqslant y\leqslant x}\min_{a\leqslant z\leqslant b}\{f(x,y,z)\},$$

则 $\varphi\in C([a,b])$.

证明 (1) 设$(x_0,y_0)\in D$,则由题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,使得

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon \quad (|x-x_0|<\delta_1, |y-y_0|<\delta_1).$$

记 $y=\varphi(x)$, $y_0=\varphi(x_0)$,则依条件,存在 $\delta_2>0$,使得

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|y-y_0|<\delta_1 \quad (|x-x_0|<\delta_2).$$

因此,对 $y=\varphi(x)\in(c,d)$($x\in(a,b)$),我们有

$$|f(x,\varphi(x))-f(x_0,\varphi(x_0))|<\varepsilon \quad (|x-x_0|<\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}).$$

即 $F\in C((a,b))$.

(2) 对 $y\in[0,1]$,令 $g_y(x)=f(x,y)$($x\in[0,1]$),易知 $g(x)=\sup\{g_y(x):y\in[0,1]\}$.注意到 f 在 D 上一致连续,故$\{g_y(x)\}$是一族等度连续函数.对任给 $\varepsilon>0$, $x_0\in[0,1]$,存在 $y_0\in[0,1]$,使得 $g_{y_0}(x_0)\leqslant g(x_0)<g_{y_0}(x_0)+\varepsilon$.又存在 $\delta>0$,使得$|g_y(r)-g_y(s)|<\varepsilon$($|r-s|<\delta$, $y\in[0,1]$).现在对满足$|x_0-x_1|<\delta$的 $x_1\in[0,1]$,存在 $y_1\in[0,1]$,使得 $g_{y_1}(x_1)\leqslant g(x_1)<g_{y_1}(x_1)+\varepsilon$.

根据等度连续性,又推出$|g_{y_0}(x_0)-g_{y_0}(x_1)|<\varepsilon$, $|g_{y_1}(x_0)-g_{y_1}(x_1)|<\varepsilon$.导出

$$g_{y_0}(x_0) < g_{y_0}(x_1) + \varepsilon < g(x_1) + \varepsilon < g_{y_1}(x_1) + 2\varepsilon,$$
$$g_{y_1}(x_1) < g_{y_1}(x_0) + \varepsilon < g(x_0) + \varepsilon < g_{y_0}(x_0) + 2\varepsilon.$$

这说明 $|g_{y_1}(x_1) - g_{y_0}(x_0)| < 2\varepsilon$,随之有 $|g(x_0) - g(x_1)| < \varepsilon(|x_0 - x_1| < \delta)$,即 $g \in C([0,1])$.

(3) 令 $\psi(x,y) = \min\limits_{a\leqslant z\leqslant b}\{f(x,y,z)\}(a\leqslant x,y\leqslant b)$,注意到 f 在 D 上的一致连续性可知,对 $a\leqslant x_0,y_0\leqslant b,\varepsilon>0$,存在 $\eta>0$,使得($|x-x_0|<\eta,|y-y_0|<\eta$)

$$f(x_0,y_0,z) - \varepsilon < f(x,y,z) < f(x_0,y_0,z) + \varepsilon.$$

由此知 $\psi(x_0,y_0) - \varepsilon \leqslant \psi(x,y) \leqslant \psi(x_0,y_0) + \varepsilon(|x-x_0|<\eta,|y-y_0|<\eta)$,即 $\psi(x,y)$在 $a\leqslant x,y\leqslant b$ 上连续,自然也是一致连续的.因此,存在 $\delta>0$,使得

$$|\psi(x',y') - \psi(x'',y'')| < \varepsilon/2 \quad (a\leqslant x',x'',y',y''\leqslant b;$$
$$|x'-x''|<\delta,|y'-y''|<\delta). \qquad ①$$

现在对任意取定的 $x_0\in[a,b]$,我们有

$$\psi(x_0,y) - \varepsilon/2 < \psi(x,y) < \psi(x_0,y) + \varepsilon/2 \quad (x\in[a,b]且|x-x_0|<\delta).$$

从而导出

$$\max_{a\leqslant y\leqslant x}\{\psi(x_0,y)\} - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \max_{a\leqslant y\leqslant x}\{\psi(x,y)\} \leqslant \max_{a\leqslant y\leqslant x}\{\psi(x_0,y)\} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

又根据式①可推知

$$\psi(x_0,x_0) - \varepsilon/2 \leqslant \max_{x_0-\delta\leqslant y\leqslant x}\{\psi(x_0,y)\} \leqslant \psi(x_0,x_0) + \varepsilon/2.$$

这说明

$$\max_{a\leqslant y\leqslant x}\{\psi(x_0,y)\} = \max\left(\max_{a\leqslant y\leqslant x_0-\delta}\{\psi(x_0,y)\},\max_{x_0-\delta\leqslant y\leqslant x}\{\psi(x_0,y)\}\right)$$
$$\leqslant \max_{a\leqslant y\leqslant x_0}\{\psi(x_0,y)\} + \varepsilon/2.$$

即 $\varphi(x)\leqslant\varphi(x_0)+\varepsilon$.类似地可证 $\varphi(x_0)-\varepsilon\leqslant\varphi(x)$,证毕.

例 1.3.5　试证明下列命题:

(1) 令 $D_1=\{(x,y):a<x<b,c<y<d\}$,设 $f(x,y)$在 D_1 上连续.又令 $D_2=\{(u,v):a'<u<b',c'<v<d'\}$,而 $\varphi(u,v),\psi(u,v)$在 D_2 上连续,且 $a<\varphi(u,v)<b,c<\psi(u,v)<d$.则 $F(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$在 D_2 上连续.

(2) 设 $f(\boldsymbol{X})=f(x,y)$在圆周 $L:x^2+y^2=a^2$ 上连续,则存在该圆的一条直径 $\overline{\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2}:\|\boldsymbol{X}_1\|=a=\|\boldsymbol{X}_2\|$,使得 $f(\boldsymbol{X}_1)=f(\boldsymbol{X}_2)$.

(3) 设 $f(x,y),g(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上的 m 次齐次连续函数,$f(x,y)\geqslant0$.若$(x,y)\neq(0,0)$且 $f(x,y)=0$ 时有 $g(x,y)>0$,则存在 α,β,使得

$$\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\geqslant(x^2+y^2)^{m/2} \quad ((x,y)\in\mathbf{R}^2).$$

证明　(1) 设$(u_0,v_0)\in D_2$,并记 $x_0=\varphi(u_0,v_0),y_0=\psi(u_0,v_0)$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\sigma>0$,使得

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon \quad (|x-x_0|<\sigma, |y-y_0|<\sigma).$$

又存在 $\delta>0$，使得当 $|u-u_0|<\delta, |v-v_0|<\delta$时有

$$|\varphi(u,v)-\varphi(u_0,v_0)|<\sigma, \quad |\psi(u,v)-\psi(u_0,v_0)|<\sigma.$$

从而可得

$$\begin{aligned}&|f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]-f[\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0)]|\\=&|F(u,v)-F(u_0,v_0)|<\varepsilon \quad (|u-u_0|<\delta, |v-v_0|<\delta).\end{aligned}$$

由此即得所证.

(2) 采用新变量 $x=a\cos\theta, y=a\sin\theta$，则 f 改写为

$$f(a\cos\theta, a\sin\theta)\triangleq g(\theta) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

令 $F(\theta)=g(\theta+\pi)-g(\theta)(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则 $F\in C([0,\pi])$，且 $F(0)=g(\pi)-g(0)$，$F(\pi)=g(2\pi)-g(\pi)$. 注意到 $g(0)=g(2\pi)$，故知 $F(0)=-F(\pi)$. 从而由中值定理知，存在 $\theta_0\in[0,\pi]$，使得 $F(\theta_0)=0$，即 $g(\theta_0)=g(\theta_0+\pi)$. 这就是说

$$f(a\cos\theta_0, a\sin\theta_0)=f(-a\cos\theta_0, -a\sin\theta_0).$$

(3) 令 $D=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$，$F=D\cap f^{-1}(0)$，则 F 是有界闭集，且由题设知 $g(x,y)>0((x,y)\in F)$. 从而对某个 $\varepsilon_0>0$，有 $g(x,y)\geqslant 2\varepsilon_0((x,y)\in F)$. 因此，存在开集 $G:F\subset G$，使得 $g(x,y)\geqslant\varepsilon_0((x,y)\in G)$. 此外，又存在 $\delta>0$，使得

$$f(x,y)\geqslant\delta \quad ((x,y)\in D\backslash G).$$

因为可取 G，使得 $(0,0)\overline{\in}G$，而且根据(齐次性)($\boldsymbol{X}=(x,y)$)

$$f(x,y)=\|\boldsymbol{X}\|^m f(\boldsymbol{X}/\|\boldsymbol{X}\|), \quad g(x,y)=\|\boldsymbol{X}\|^m g(\boldsymbol{X}/\|\boldsymbol{X}\|),$$

可知

$$f(x,y)/\|\boldsymbol{X}\|^m\geqslant\delta(\boldsymbol{X}/\|\boldsymbol{X}\|\in D\backslash G); \quad g(x,y)/\|\boldsymbol{X}\|^m\geqslant\varepsilon_0(\boldsymbol{X}/\|\boldsymbol{X}\|\in G).$$

现在令 $\alpha=1/\delta, \beta=1/\varepsilon_0$，我们有

$$\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\geqslant\|\boldsymbol{X}\|^m \quad ((x,y)\neq(0,0)).$$

对于 $(x,y)=(0,0)$，结论自然成立.

例 1.3.6 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x,y)$在$[a,b]\times[c,d]$上连续，$\{\varphi_n(x)\}$是$[a,b]$上的一致收敛函数列，$c\leqslant\varphi_n(x)\leqslant d(n\in\mathbf{N})$，则 $F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]$在$[a,b]$上一致收敛.

(2) 设 $D=\{(x,y):0\leqslant x,y\leqslant 1\}$，$f(x,y)$在 D 上连续，令

$$B_n(f;x,y)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k f\left(\frac{k}{n},y\right)x^k(1-x)^{n-k} \quad ((x,y)\in D),$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}B_n(f;x,y)=f(x,y)$(关于$(x,y)\in D$一致).

证明 (1) 注意到 f 在 D 上一致连续，故对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\varepsilon \quad (x\in[a,b]; y',y''\in[c,d]\text{且}|y'-y''|<\delta).$$

因为$\{\varphi_n(x)\}$是一致收敛列，所以存在 N，使得

$$|\varphi_{n+p}(x)-\varphi_n(x)|<\delta \quad (n>N, p\in\mathbf{N}, x\in[a,b]).$$

从而视 $y'=\varphi_{n+p}(x)$，$y''=\varphi_n(x)$，可知

$$|f(x,\varphi_{n+p}(x))-f(x,\varphi_n(x))|<\varepsilon\quad(n>N,p\in\mathbf{N},x\in[a,b]).$$

这就是说，$F_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛．

(2) 注意到 $\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}\equiv 1$，故知

$$|B_n(f;x,y)-f(x,y)|=\sum_{k=0}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n},y\right)-f(x,y)\right]\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant\left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\leqslant\delta}+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\delta}\right)\left|f\left(\frac{k}{n},y\right)-f(x,y)\right|\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\leqslant\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n}\quad(|f(x,y)|\leqslant M),$$

其中，由 f 的一致连续知，当$|x'-x''|\leqslant\delta$时有$|f(x',y)-f(x'',y)|<\varepsilon$.

例 1.3.7　试证明下列命题：

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$在 $\mathbf{R}^2$ 上一致连续．

(2) $f(x,y)=\sin(\pi/(1-x^2-y^2))$在 $D=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$上不一致连续．

(3) $f(x,y)=\sin(xy)$在 $\mathbf{R}^2$ 上不一致连续．

证明　(1) 对(x_1,y_1)，$(x_2,y_2)\in\mathbf{R}^2$，我们有不等式

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=\left|\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\right|$$

$$\leqslant\frac{|x_1-x_2||x_1+x_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}+\frac{|y_1-y_2||y_1+y_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

$$\leqslant|x_1-x_2|\frac{|x_1|+|x_2|}{\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}}+|y_1-y_2|\frac{|y_1|+|y_2|}{\sqrt{y_1^2}+\sqrt{y_2^2}}$$

$$\leqslant|x_1-x_2|+|y_1-y_2|.$$

由此即可得证．

(2) 显然，$f(x,y)$在 D 上是连续的．取两个点列$(0<\theta<2\pi)$：

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_n=(x_n',y_n')=(\sqrt{1-1/2n}\cdot\cos\theta,\sqrt{1-1/2n}\cdot\sin\theta),\\ \boldsymbol{Y}_n=(x_n'',y_n'')=(\sqrt{1-2/(4n+1)}\cdot\cos\theta,\sqrt{1-2/(4n+1)}\sin\theta),\end{cases}$$

则可导出

$$\|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{Y}_n\|=\sqrt{(x_n'-x_n'')^2+(y_n'-y_n'')^2}$$

$$=\left|\sqrt{1-1/2n}-\sqrt{1-2/(4n+1)}\right|\to 0\quad(n\to\infty),$$

$$|f(\boldsymbol{X}_n)-f(\boldsymbol{Y}_n)|=|\sin(2n\pi)-\sin(\pi/2+2n\pi)|=1.$$

由此即可得证．

(3) 易知 $f(x,1/x)=\sin 1$. 又在点 $(x_0,1/x_0)$ 的 δ 邻域 U 内，当正值 x_0 充分大时，存在 $(x_0,0)\in U$. 此时 $f(x_0,0)=0$，故不一致连续.

例 1.3.8 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x,y)$ 在 $\{(x,y): x>0, y\in\mathbf{R}^1\}$ 上一致连续，则对任意的 $y_0\in\mathbf{R}^1$，存在极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to y_0}} f(x,y)$.

(2) 设 $f(x,y)$ 在 $D:(0,1)\times(0,1)$ 上一致连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上有界.

(3) 设 $g\in C(\mathbf{R}^1)$，令 $f(x,y)=g(xy)$. 若 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上一致连续，则 $g(x)\equiv C$(常数).

证明 (1) 对任意满足 $x_n\to 0^+(n\to\infty)$，$y_n\to y_0(n\to\infty)$ 的点列 $\{(x_n,y_n)\}$，以及任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 以及 N，使得 $|x_n-x_m|<\delta$，$|y_n-y_m|<\delta(n,m>N)$，且 $|f(x_n,y_n)-f(x_m,y_m)|<\varepsilon$. 这就是说 $\{f(x_n,y_n)\}$ 是 Cauchy 列，故存在 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$. 即存在极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to y_0}} f(x,y)$.

(2) 对取定的 $x\in(0,1)$，由 $f(x,y)$ 在 $y\in(0,1)$ 上一致连续可知，存在极限

$$\lim_{y\to 0^+} f(x,y)=\varphi_0(x),\quad \lim_{y\to 1^-} f(x,y)=\varphi_1(x).$$

同理，也存在极限(固定 $y\in(0,1)$) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,y)=\psi_0(y)$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x,y)=\psi_1(y)$.

从而，我们定义 $f(x,1)=\varphi_1(x)$，$f(x,0)=\varphi_0(x)$，$f(0,y)=\psi_0(y)$，$f(1,y)=\psi_1(y)$(其中 $\varphi_i(x)$，$\psi_i(y)(i=1,2)$ 皆一致连续)，这个新函数在闭区域 $[0,1]\times[0,1]$ 上一致连续，当然是有界的. 随之原 $f(x,y)$ 在 $(0,1)\times(0,1)$ 上有界.

(3) 反证法. 假定存在 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^1$，有 $|g(x_2)-g(x_1)|=\varepsilon_0>0$. 根据 f 的一致连续性，对 $\varepsilon_0>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|<\varepsilon_0\quad(|x'-x''|<\delta,\ |y'-y''|<\delta).$$

现在取 N，使得 $|x_1-x_2|/N<\delta$，从而有

$$|g(x_2)-g(x_1)|=\left|g\left(N\frac{x_2}{N}\right)-g\left(N\frac{x_1}{N}\right)\right|=\left|f\left(N,\frac{x_2}{N}\right)-f\left(N,\frac{x_1}{N}\right)\right|<\varepsilon_0,$$

矛盾.

例 1.3.9 试证明下列命题：

(1) 设 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y): x>0, y\in\mathbf{R}^1\}$ 上连续，且对任意的 $y_0\in\mathbf{R}^1$，存在极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y\to y_0}} f(x,y)=\varphi(y_0)$，则 f 可连续延拓到 $\overline{D}=\{(x,y): x\geqslant 0, y\in\mathbf{R}^1\}$ 上.

(2) 设 $f\in C^{(1)}(\mathbf{R}^1)$，且作函数

$$F(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\quad(0\leqslant x,y\leqslant 1, x\neq y),$$

则定义 $F(x,y)=f'(x)(x=y)$，可使 $F(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

证明　(1) 定义 $f(0,y)=\varphi(y)(y\in\mathbf{R}^1)$,从而只需指出 $\lim\limits_{y\to y_0}f(0,y)=\varphi(y_0)(y_0\in\mathbf{R}^1)$,即 $\varphi(y)$在 $y_0\in\mathbf{R}^1$ 上连续.对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|f(x,y')-\varphi(y_0)|<\varepsilon/2\quad(0<|x|<\delta,0<|y'-y_0|<\delta).$$

从而我们有

$$\begin{aligned}|\varphi(y)-\varphi(y_0)|&\leqslant|\varphi(y)-f(x,y')|+|f(x,y')-\varphi(y_0)|\\&\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\quad(|y-y_0|<\delta/2).\end{aligned}$$

由此即得所证.

(2) 显然,$F(x,y)$在 $x\neq y$ 上连续.对 $x_0=y_0$ 处,根据 $f'(x)$的连续性可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}-f'(x_0)\right|=|f'(x+\theta(x-y))-f'(x_0)|<\varepsilon$$

$$(0<\theta<1,0<|x-x_0|<\delta,0<|y-y_0|<\delta).$$

由此即得所证.

第 2 章　多元函数微分学

2.1　一阶偏导数与(全)微分(主要以二、三元函数为例)

定义 2.1.1　设 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的邻域上有定义,若存在极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x},$$

则称此极限为 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处关于 x 的(一阶)偏导数.记为

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\text{或}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\quad f_x'(x_0,y_0)\text{或}f_1'(x_0,y_0),\quad z_x'|_{(x_0,y_0)}.$$

类似地可定义$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$$(f_y'(x_0,y_0),f_2'(x_0,y_0))$为极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

对于 $u=f(x,y,z)$,定义极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}$$

为 $f(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)处对 x 的偏导数,记为

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\text{或}\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)},\quad f_x'(x_0,y_0,z_0)\text{或}f_1'(x_0,y_0,z_0).$$

其它依次类推.

若 $z=f(x,y)$在区域 D 上定义,且在 D 内每一点(x,y)上都存在关于 x 的偏导数,则$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$或 $f_x'(x,y)$又成为 D 上的二元函数.

由一元函数导数的几何意义,可得二元函数偏导数的几何意义.设 $z_0=f(x_0,y_0)$,$M_0(x_0,y_0,z_0)$为曲面 S:$z=f(x,y)$上一点.考察曲面 S 与平面 $y=y_0$ 的交线,偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$即表示此交线在 M_0 点的切线斜率,交线在 M_0 点的切向量为 $\boldsymbol{T}_x=(1,0,f_x'(x_0,y_0))$(图 2.1).

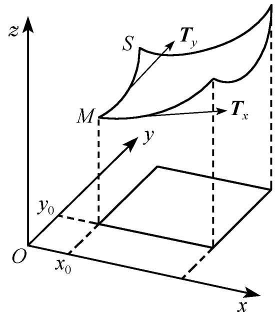


图 2.1

同理,$f_y'(x_0,y_0)$表示曲面 S 与平面 $x=x_0$ 的交线在 M_0 点的切线斜率,交线在 M_0 点的切向量为 $\boldsymbol{T}_y=(0,1,f_y'(x_0,y_0))$.

注　函数 $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)点的一阶偏导数存在,只说明两个一元函数 $z=f(x,y_0)$和 $z=f(x_0,y)$在(x_0,y_0)点连续,得不出在(x_0,y_0)点二元连续.如

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$$

有 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，显然函数在原点不是二元连续的．

定理 2.1.1（中值公式）　设 $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，$D=\{(x,y):|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}$．$f(x,y)$ 在 D 上的两个偏导数存在，则对 $|\Delta x|<\delta,|\Delta y|<\delta$，可得

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ =&f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y'(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\quad(0<\theta_1,\theta_2<1).\end{aligned}$$

对三元函数，类似地可得

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)\\ =&f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta x+f_y'(x_0,y_0+\theta_2\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta y\\ &+f_z'(x_0,y_0,z_0+\theta_3\Delta z)\Delta z\quad(0<\theta_1,\theta_2,\theta_3<1).\end{aligned}$$

定义 2.1.2　设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域上有定义．若对 x,y 的改变量 $\Delta x,\Delta y$，z 的改变量 Δz 可表示成

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\quad(\rho\to 0),$$

其中 A,B 与 $\Delta x,\Delta y$ 无关（仅与 x_0,y_0 有关），$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的（一阶全）微分，记为 $\mathrm{d}z$：

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y.$$

对三元函数 $u=f(x,y,z)$，它在点 (x_0,y_0,z_0) 处可微是指

$$\Delta u=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho)\quad(\rho\to 0),$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，且其微分为 $\mathrm{d}u=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$．

特别规定自变量的微分为 $\mathrm{d}x=\Delta x$，$\mathrm{d}y=\Delta y$．若 f 在区域 D 内的每一点上均可微，则称 f 在 D 上可微．

定理 2.1.2　若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，其它类推．

定理 2.1.3　若 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$ 均存在．此时，微分就是 $\mathrm{d}z=f_x'(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y'(x_0,y_0)\mathrm{d}y$．

注（近似计算）　设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则当 $|\Delta x|$，$|\Delta y|$ 充分小时，有近似公式

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y.$$

定理 2.1.4　若函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续（蕴涵着偏导数在该点某邻域存在），则函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微．

综上可知，函数在一点连续和偏导数存在，是函数在该点可微的必要条件．偏导数在一点连续是函数在该点可微的充分条件，但不是必要条件．例如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

它在全平面上可微，但 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不连续：

先说明它在 $(0,0)$ 点可微．

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$
$$=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})\quad(\Delta x,\Delta y\to 0),$$

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)\\&=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)+f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)\\&=f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y+f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)\Delta x\quad(0<\theta_1,\theta_2<1)\\&=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,\end{aligned}$$

其中

$$\alpha=f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)-f'_x(x_0, y_0),$$
$$\beta=f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)-f'_y(x_0, y_0).$$

因为偏导数在(x_0, y_0)点连续,所以有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta=0,\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0,$$

即得

$$\Delta z=f'_x(x_0, y_0)\Delta x+f'_y(x_0, y_0)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}).$$

按定义知函数在(x_0, y_0)点可微.证毕.

定理 2.1.5(复合函数求导法) 设 $z=f(x,y)$在区域 D 内点(x,y)处可微,函数 $x=\varphi(s,t)$,$y=\psi(s,t)$定义在区域 G 上,值域含于 D,且在点(s,t)处的偏导数存在,则复合函数 $z=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$在点$(s,t)$处偏导数存在,且有

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial s},\quad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial t}.\qquad\text{(连锁规则)}$$

其它多元函数可类推.

注 在定理 2.1.5 中,若 $f(x,y)$只在点(x_0, y_0)处有偏导数但不可微,则连锁规则不一定成立.例如

$$f(x,y)=\begin{cases}x|y|/\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

易知 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$,且 $f(x,y)$在$(0,0)$处不可微.此时若取 $x=t$,$y=t$,则 $f(t,t)=t/\sqrt{2}$.故连锁规则不成立.

定理 2.1.6(中值公式) 设 $\delta>0$,$f(x,y)$在 $D=\{(x,y):|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}$上可微,则$(0<\theta<1)$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=f'_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y.$$

注 $z=f(x,y)$,$x=x(s,t)$,$y=y(s,t)$,则 $z=f[x(s,t),y(s,t)]$的微分仍可写为 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$,其中 $\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}y$ 不是改变量而是函数的微分.此公式也称为一阶微分形式的不变性.

定义 2.1.3 若映射 $f:E\subset\mathbf{R}^n\to\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是双射,且 f 以及由$(f^{-1}\circ f)(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\in E)$所确定的逆映射 $f^{-1}:\Omega\to E$ 都是连续的,则称 f 为同胚变换.

定理 2.1.6(Brouwer) 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是区域,$f:D\to\mathbf{R}^2$ 是连续的单射,则 $\Omega=f(D)$是一个区域,且 $f:D\to\Omega$是同胚变换.

定义 2.1.4 设 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$是从 uOv 平面中区域 D 到 xOy 平面中区域 Ω 的同胚变换 T.若 $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$在 D 上有一阶连续偏导数(即偏导数是连续函数),则称行列式

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \left(\text{也记为 } J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

为该变换 T 的 Jacobi(雅可比)行列式.同理,对于三个变量的情形:

$$x=f(u,v,w),\quad y=g(u,v,w),\quad z=h(u,v,w),$$

其 Jacobi 行列式为

$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial w} \\ \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial v} & \dfrac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

注 若 x,y,z 是 u,v,w 的函数,而 u,v,w 又是 ξ,η,ζ的函数,则有公式

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\cdot\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}.$$

例 2.1.1 解答下列问题:

(1) 设 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$,求 $f_x'(0,0)$, $f_y'(0,0)$.

(2) 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{x/y}$,求 $f_x'(x,1)$.

(3) 设 $f(x,y)=xy\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})$,求$\dfrac{\partial f}{\partial x}$,$\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

解 (1) 注意到 $f(x,0)=\arctan x$,故 $f_x'(0,0)=1/(1+x^2)|_{x=0}=1$.由对称性又知 $f_y'(0,0)=1$.

(2) 注意到 $f(x,1)=x$,故 $f_x'(x,1)=1$.

(3)
$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}&=y\left\{\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(\frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)\right\}\\&=y\left\{\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}.\end{aligned}$$

可用对称性立即写出$\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

例 2.1.2 试证明下列命题:

(1) 设 $z=\dfrac{x-y}{x+y}\ln\dfrac{y}{x}$,则 $xz_x'+yz_y'=0$.

(2) 设 $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z/y}$,则 $xu_x'+yu_y'+zu_z'=0$.

(3) 设 $z=\arctan\left(\dfrac{x^3+y^3}{x-y}\right)$，则 $xz_x'+yz_y'=\sin(2z)$.

(4) 设 $f(t)$可微，$z=f(\ln x+1/y)$，则 $xz_x'+y^2z_y'=0$.

证明 (1) 因为我们有公式

$$z_x'=\frac{2y}{(x+y)^2}\ln\frac{y}{x}-\frac{x-y}{x+y}\frac{1}{x},\quad z_y'=\frac{-2x}{(x+y)^2}\ln\frac{y}{x}+\frac{x-y}{x+y}\frac{1}{y},$$

所以 $xz_x'+yz_y'=0$.

(2) 因为我们有公式

$$u_x'=u\cdot\frac{z}{xy},\quad u_y'=u\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\ln\frac{x}{y}-\frac{z}{y^2}\right),\quad u_z'=u\cdot\frac{1}{y}\ln\frac{x}{y},$$

所以 $xu_x'+yu_y'+zu_z'=0$.

(3) 因为 $\sin(2z)=\dfrac{2\tan z}{1+\tan^2 z}=\dfrac{2(x-y)(x^3+y^3)}{(x-y)^2+(x^3+y^3)^2}$，以及

$$z_x'=\frac{2x^3-3x^2y-y^3}{(x-y)^2+(x^3+y^3)^2},\quad z_y'=\frac{x^3+3xy^2-2y^3}{(x-y)^2+(x^3+y^3)^2},$$

所以得到

$$xz_x'+yz_y'=\frac{2x^4-2x^3y+2xy^3-2y^4}{(x-y)^2+(x^3+y^3)^2}=\frac{2(x-y)(x^3+y^3)}{(x-y)^2+(x^3+y^3)^2}=\sin(2z).$$

(4) 因为 $z_x'=f'(\ln x+1/y)/x$，$z_y'=-f'(\ln x+1/y)/y^2$，所以有

$$xz_x'+y^2z_y'=f'(\ln x+1/y)-f'(\ln x+1/y)=0.$$

例 2.1.3 解答下列问题：

(1) $z=\dfrac{x+2y}{2x-y}$；$x=e^t$，$y=e^{-t}$，求$\dfrac{dz}{dt}$.

(2) $z=\arctan(x+y)$；$x=2s-t^2$，$y=s^2t$，求 z_s'，z_t'.

(3) $u=\arctan(xy/z)$；$y=e^{ax}$，$z=(ax+1)^2$，求$\dfrac{du}{dx}$.

解 (1) $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-5y}{(2x-y)^2}e^t-\dfrac{5x}{(2x-y)^2}e^{-t}=-\dfrac{10}{(2e^t-e^{-t})^2}$.

(2) $z_s'=\dfrac{x_s'}{1+(x+y)^2}+\dfrac{y_s'}{1+(x+y)^2}=\dfrac{2+2st}{1+(2s-t^2+s^2t)^2}$,

$$z_t'=\frac{x_t'}{1+(x+y)^2}+\frac{y_t'}{1+(x+y)^2}=\frac{s^2-2t}{1+(2s-t^2+s^2t)^2}.$$

(3) $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}$

$$=\frac{1}{1+x^2y^2/z^2}\frac{y}{z}+\frac{1}{1+x^2y^2/z^2}\frac{x}{z}e^{ax}a+\frac{1}{1+x^2y^2/z^2}\left(-\frac{xy}{z^2}\right)2(ax+1)a$$

$$=\frac{z^2}{x^2y^2+z^2}\left\{\frac{y}{z}+\frac{ax}{z}\mathrm{e}^{ax}-\frac{2axy(ax+1)}{z^2}\right\}=\frac{\mathrm{e}^{ax}(ax+1)(a^2x^2+1)}{x^2\mathrm{e}^{2ax}+(ax+1)^4}.$$

例 2.1.4　试用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$换写下列微分方程：

(1) $\left(x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y\right)^2=2xy\left(1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)$.

(2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+kx(x^2+y^2)$,　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+ky(x^2+y^2)$.

解　(1) 因为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\Big/\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}$,所以得出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta+r\cos\theta\right)\Big/\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta-r\sin\theta\right).$$

从而原方程可改写为

$$\left(r\cos\theta\frac{r'_\theta\sin\theta+r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta}-r\sin\theta\right)^2=2r^2\sin\theta\cos\theta\left[1+\left(\frac{r'_\theta\sin\theta+r\cos\theta}{r'_\theta\cos\theta-r\sin\theta}\right)^2\right],$$

或 $r^2=\sin2\theta[(r'_\theta)^2+r^2]^2$.

(2) 注意到 r,θ都是 t 的函数,故可知

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta-r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta+r\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.$$

由此导出

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cos\theta+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\sin\theta,\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{r}\left(-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\sin\theta+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cos\theta\right).$$

因为原微分方程组可写成$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r\sin\theta+kr^3\cos\theta$,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-r\cos\theta+kr^3\sin\theta$,所以原方程表示为$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=kr^3$,$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-1$.

例 2.1.5　试证明下列命题：

(1) 设 $a>b>1$,则 $a^{b^a}>b^{a^b}$.

* (2) 设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,则 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_i}=0$,其中

$$W=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

(3) 设 $f(t)=(g(t),h(t))$是$(-1,1)$上值域在 $\mathbf{R}^2$ 中的连续可微函数.若有

$$f(0)=(g(0),h(0))=(0,0),\quad f'(0)=(g'(0),h'(0))\neq0,$$

则存在 ε_0:$0<\varepsilon_0<1$,使得函数$\|f(t)\|=(g^2(t)+h^2(t))^{1/2}$在$(0,\varepsilon_0)$上递增.

证明 (1) 问题等价于证明不等式 $\ln\ln a + a\ln b > \ln\ln b + b\ln a$.令 $y=\ln b>0$,$x=\dfrac{\ln a}{\ln b}>1$,这样,证上述不等式只要证明 $\ln x > y(xe^y - e^{xy})$.

为此,在区域 $x>1, y>0$ 上考虑二元函数 $f(x,y)=xe^y-e^{xy}$.因为 $f'_y(x,y)=xe^y-xe^{xy}<0$,即对固定的 $x>1$,函数 $f(x,y)$是 y 的单调递减函数,所以 $f(x,y)<f(x,0)=x-1$.

如果 $f(x,y)\leqslant 0$,显然有 $\ln x > yf(x,y)=y(xe^y-e^{xy})$;

如果 $f(x,y)>0$,即 $e^y[x-e^{(x-1)y}]>0$,也有 $\ln x>(x-1)y>yf(x,y)$.

综上便知在 $x>1, y>0$ 上 $\ln x > y(xe^y-e^{xy})$成立.

* (2) 易知 W 中第 i 行第 j 列的元素是 x_j^{i-1}.若记其余子式为 $X_{i,j}$,则 $W=\sum\limits_{i=1}^{n} x_j^{i-1}X_{i,j}$.从而可得$\dfrac{\partial W}{\partial x_j}=\sum\limits_{i=2}^{n}(i-1)x_j^{i-2}X_{i,j}\ (j=1,2,\cdots,n)$.因此,我们有

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=2}^{n}(i-1)x_j^{i-2}X_{i,j}=\sum_{i=2}^{n}(i-1)\sum_{j=1}^{n}x_j^{i-2}X_{i,j}=0.$$

(3) 依题设易知$\dfrac{d}{dt}\|f(t)\|^2=2g(t)g'(t)+2h(t)h'(t)$,且有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|f(t)\|^2&=2[g(t)-g(0)]g'(t)+2[h(t)-h(0)]h'(t)\\&=2t[g'(\xi_1)g'(t)+h'(\xi_2)h'(t)]\quad(0<\xi_1,\xi_2<t).\end{aligned}$$

注意到 $f'(t)$的连续性,我们有

$$\lim_{t\to 0^+}[g'(\xi_1)g'(t)+h'(\xi_2)h'(t)]=\|f'(0)\|^2>0.$$

由此知存在 $\delta_0>0$,使得$\dfrac{d}{dt}\|f(t)\|^2>0\ (0<t<\delta_0)$.即$\|f(t)\|$在$(0,\delta_0)$上递增.

例 2.1.6 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)的邻域 U 上有定义.若有

(i) $f(x,y_0)$在点 $x=x_0$ 处连续,

(ii) 存在 $M>0$,$|f'_y(x,y)|\leqslant M\quad((x,y)\in U)$,

则 $f(x,y)$点(x_0,y_0)处连续.

(2) 设 $f(x,y)$在凸区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上定义.若存在 $M>0$,使得 $|f'_x(x,y)|\leqslant M$,$|f'_y(x,y)|\leqslant M\ ((x,y)\in D)$,则 $f(x,y)$在 D 上一致连续(若 D 非凸域,则结论不一定真).

(3) 设 $f(\boldsymbol{X})=f(x,y)$定义在 $\mathbf{R}^2$ 上.若有

(i) 对任意的 $\boldsymbol{X}=(x,y)\in\mathbf{R}^2$,均存在极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(tx,ty)-f(0,0)}{t}\triangleq g(x,y).$$

(ii) 对 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbf{R}^2$，以及常数 α,β，均成立等式

$$g(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha g(x_1,y_1)+\beta g(x_2,y_2).$$

(iii) 存在 $M>0$，使得对 $\mathbf{R}^2$ 中的点 $\boldsymbol{X}_1=(x_1,y_1),\boldsymbol{X}_2=(x_2,y_2)$，均有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M\|\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2\|,$$

则 $f(x,y)=f(0,0)+g(x,y)+o(\|\boldsymbol{X}\|)\ (\|\boldsymbol{X}\|=(x^2+y^2)^{1/2}\to 0)$.

证明　(1) 对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2\quad(|x-x_0|<\delta).$$

现在令 $\delta=\min\{\varepsilon/2M,\delta\}$，则根据中值公式，可知

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&=|f'_y(x,y_0+\theta(y-y_0))||y-y_0|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&\leqslant M|y-y_0|+\varepsilon/2<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad(|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta).\end{aligned}$$

(2) 设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 是 D 中任意两点，则由题设知 $(x_2+t(x_1-x_2),y_2+t(y_1-y_2))\in D\ (0\leqslant t\leqslant 1)$. 令

$$\varphi(t)=f(x_2+t(x_1-x_2),y_2+t(y_1-y_2))\quad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

则 $\varphi(t)$ 的导函数有界，而有

$$\begin{aligned}\varphi'(t)=&(x_1-x_2)f'_x(x_2+t(x_1-x_2),y_2+t(y_1-y_2))\\&+(y_1-y_2)f'_y(x_2+t(x_1-x_2),y_2+t(y_1-y_2)),\\ \varphi(0)=&f(x_2,y_2),\quad\varphi(1)=f(x_1,y_1).\end{aligned}$$

应用中值公式，可得 $(0<\xi<1)$

$$\begin{aligned}&\varphi(1)-\varphi(0)=f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)=\varphi'(\xi)\\&=(x_1-x_2)f'_x(x_2+\xi(x_1-x_2),y_2+\xi(y_1-y_2))\\&\quad+(y_1-y_2)f'_y(x_2+\xi(x_1-x_2),y_2+\xi(y_1-y_2)),\\&|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|x_1-x_2|+M|y_1-y_2|.\end{aligned}$$

从而对任给 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon/2M$，我们有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon\quad(|x_1-x_2|<\delta,|y_1-y_2|<\delta).$$

注　在 $\mathbf{R}^2$ 中作点集：$J_1=\{(x,y):x=-\pi/2,-3\pi/4\leqslant y<0\}$，以及 $J_2=\{(x,y):\pi/2<x\leqslant\pi,-3\pi/4\leqslant y<\pi/2\}$. 再令

$$\begin{aligned}&\mathrm{I}=\{(x,y):-\pi\leqslant x<-\pi/2\}\cup J_1,\\&\mathrm{II}=\{(x,y):-\pi/2<x<\pi/2,-\pi\leqslant y\leqslant-\pi/2\},\\&\mathrm{III}=\{(x,y):-\pi/2<x\leqslant\pi,\pi/2\leqslant y\leqslant 3\pi/4\}\cup J_2.\end{aligned}$$

记 $D=\mathrm{I}\cup\mathrm{II}\cup\mathrm{III}$，且定义函数

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in\mathrm{I},\\ \sin x+1, & (x,y)\in\mathrm{II},\\ 2, & (x,y)\in\mathrm{III}.\end{cases}$$

易知 D 是非凸域,$f(x,y)$的一阶偏导数均在 D 上有界,但 $f(x,y)$在 D 上不一致连续.

(3) 令 $A=\max\{g(\boldsymbol{X}):\|\boldsymbol{X}\|=1\}$,$B=\max\{M,A\}$,并对 $\varepsilon>0$,取 $\boldsymbol{X}_i=(x_i,y_i)\in\mathbf{R}^2$ $(i=1,2,\cdots,m)$:$\|\boldsymbol{X}_i\|=1$ $(i=1,2,\cdots,m)$,使得对于满足 $\|\boldsymbol{X}\|=1$ 的 $\boldsymbol{X}=(x,y)\in\mathbf{R}^2$,必存在 $\boldsymbol{X}_i$:$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_i\|<\varepsilon/3B$.

根据(i),(ii),还可选 $\delta>0$,使得当 $0<t<\delta$ 时有

$$|f(tx_i,ty_i)-f(0,0)-g(tx_i,ty_i)|<\varepsilon t/3 \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

从而当 $\|\boldsymbol{X}\|<\delta$ 时,对某个 i 可知

$$\|\boldsymbol{X}/\|\boldsymbol{X}\|-\boldsymbol{X}_i\|<\varepsilon/3B,\quad \|\boldsymbol{X}-\|\boldsymbol{X}\|\boldsymbol{X}_i\|<\|\boldsymbol{X}\|\varepsilon/3B,$$

$$|f(\boldsymbol{X})-f(\|\boldsymbol{X}\|\boldsymbol{X}_i)|<M\|\boldsymbol{X}\|\varepsilon/3B\leqslant\|\boldsymbol{X}\|\varepsilon/3,$$

$$|f(\|\boldsymbol{X}\|x_i,\|\boldsymbol{X}\|y_i)-f(0,0)-g(\|\boldsymbol{X}\|x_i,\|\boldsymbol{X}\|y_i)|<\|\boldsymbol{X}\|\varepsilon/3,$$

$$\begin{aligned}&|g(\boldsymbol{X})-g(\|\boldsymbol{X}\|\boldsymbol{X}_i)|=|g(\boldsymbol{X}-\|\boldsymbol{X}\|\boldsymbol{X}_i)|\\ =&\|\boldsymbol{X}-\|\boldsymbol{X}\|\boldsymbol{X}_i\|g((\boldsymbol{X}-\|\boldsymbol{X}\|\boldsymbol{X}_i)/\|\boldsymbol{X}-\|\boldsymbol{X}\|\cdot\boldsymbol{X}_i\|)\\ \leqslant&\|\boldsymbol{X}\|\varepsilon M/3B\leqslant\|\boldsymbol{X}\|\varepsilon/3.\end{aligned}$$

因此,我们有 $|f(x,y)-f(0,0)-g(x,y)|<\dfrac{\varepsilon}{3}\|\boldsymbol{X}\|\cdot 3=\|\boldsymbol{X}\|\varepsilon$.

例 2.1.7 试证明下列命题:

(1) 令 $D=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<1\}$,$f(x,y,z)$在 D 上的偏导数存在,且有

$$|f'_x(x,y,z)|\leqslant 1,\quad |f'_y(x,y,z)|\leqslant 1\quad ((x,y,z)\in D).$$

若对取定的点(x,y):$x^2+y^2\leqslant 1$,$f(x,y,z)$是 z 的连续函数,则 $f\in C(D)$.

(2) 令 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$.$f\in C(D)$且有偏导数.若 $|f(x,y)|\leqslant 1((x,y)\in D)$,则存在$(x_0,y_0)\in D$,使得

$$\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2\leqslant 16.$$

证明 (1) 设$(x_0,y_0,z_0)\in D$,且 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 充分小,则

$$\begin{aligned}&|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)|\\ \leqslant&|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)|\\ &+|f(x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)|\\ &+|f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)|\\ \leqslant&|f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta x|+|f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta y|\\ &+|f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)|\\ \leqslant&|\Delta x|+|\Delta y|+|f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)|.\end{aligned}$$

由此以及依据题设即得所证.

(2) 作 $F(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)((x,y)\in D)$,则 $F(0,0)\leqslant 1$,且 $F(x,y)\geqslant 1(x^2+y^2=1)$.从而可知存在点$(x_0,y_0)$:$x_0^2+y_0^2<1$,使得 $F(x_0,y_0)$达到最大(小)

值.由此得 $F'_x(x_0,y_0)=0=F'_y(x_0,y_0)$.从而导出

$$f'_x(x_0,y_0)=-4x_0,\quad f'_y(x_0,y_0)=-4y_0.$$

因此我们有

$$\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2=16(x_0^2+y_0^2)\leqslant 16.$$

例 2.1.8　试证明下列命题:

(1) 设定义在区域 D 上的 $f(x,y)$满足

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=0,\quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=0,\quad (x,y)\in D,$$

则 $f(x,y)=C$(常数),$(x,y)\in D$.

注　设 $f(x,y)$定义在区域 D 上.若 $f'_y(x,y)=0$($(x,y)\in D$),则对任一点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)\in D$,存在邻域 $U(\boldsymbol{X}_0,\delta)$,使得 $f(x,y)=F(x)$,$(x,y)\in U(\boldsymbol{X}_0,\delta)$.但此结论不能推广到整个 D 上,例如令

$$D=\mathbf{R}^2\setminus\{(x,y):x\geqslant 0,y=0\},\quad f(x,y)=\begin{cases}x^3, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\quad (x,y)\in D,$$

则 $f\in C^{(1)}(D)$且有连续二阶偏导数.然而我们有

$$f'_y(x,y)=0,(x,y)\in D;\quad f(1,1)=1\text{ 且 }f(1,-1)=0.$$

又例如 $D=\mathbf{R}^2\setminus\{(x,y):x=0,y\geqslant 0\}$,$f(x,y)=\begin{cases}y^2, & x>0\text{ 且 }y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$ $(x,y)\in D$,则 $f'_x(x,y)=0$,$(x,y)\in D$.但 f 与 x 有关.

(2) 设 $f(x,y)$,$g(x,y)$在区域 D 上存在偏导数.若有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial g}{\partial x},\quad f^2(x,y)+g^2(x,y)=1\quad ((x,y)\in D),$$

则 $f(x,y)$,$g(x,y)$在 D 上皆为常数.

证明　(1) 对 D 中任意两点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)$,$\boldsymbol{X}=(x,y)$,则有位于 D 内的以 $\boldsymbol{X}_0$,$\boldsymbol{X}$ 为端点连续折线,不妨设为 D 中有点组:$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_{n-1},\boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{X}$:

$$\overline{\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_1},\overline{\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2},\cdots,\overline{\boldsymbol{X}_{n-1}\boldsymbol{X}_n}\subset D.$$

对于线段$\overline{\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_1}$($\boldsymbol{X}_1=(x_1,y_1)$),应用中值公式可知

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{X}_1)-f(\boldsymbol{X}_0)&=f(x_1,y_1)-f(x_0,y_0)\\&=f'_x(x_0+\theta(x_1-x_0),y_0+\theta(y_1-y_0))(x-x_0)\\&\quad+f'_y(x_0+\theta(x_1-x_0),y_0+\theta(y_1-y_0))(y-y_0)=0.\end{aligned}$$

由此导出 $f(\boldsymbol{X}_0)=f(\boldsymbol{X}_1)$.类似地可推 $f(\boldsymbol{X}_1)=f(\boldsymbol{X}_2)=\cdots=f(\boldsymbol{X}_n)$.这说明 $f(x_0,y_0)=f(x,y)$.证毕.

(2) 只需指出 $g'_x=0=g'_y$,$f'_x=0=f'_y$($(x,y)\in D$).由于 $f^2(x,y)+g^2(x,y)=1$,故对 x,y 求偏导可得

$$f(x,y)f'_x(x,y)+g(x,y)g'_x(x,y)=0,$$

$$f(x,y)f'_y(x,y)+g(x,y)g'_y(x,y)=0.$$

即 $f(x,y)f'_x(x,y)=-g(x,y)g'_x(x,y)$, $f(x,y)f'_y(x,y)=-g(x,y)g'_y(x,y)$.再根据 $f'_x(x,y)=g'_y(x,y)$, $f'_y(x,y)=-g'_x(x,y)$ $((x,y)\in D)$,又可知

$$f(x,y)g'_y(x,y)=-g(x,y)g'_x(x,y),\quad f(x,y)g'_x(x,y)=g(x,y)g'_y(x,y),$$

从而导出($(x,y)\in D$)

$$[f^2(x,y)+g^2(x,y)]g'_y(x,y)=0,\quad [f^2(x,y)+g^2(x,y)]g'_x(x,y)=0.$$

这说明 $g'_x(x,y)=0=g'_y(x,y)$, $(x,y)\in D$.类似地可推得

$$f'_x(x,y)=0=f'_y(x,y),\quad (x,y)\in D.$$

注 设 $f(x,y)$定义在区域 D上,且 $f'_y(x,y)=0$ $((x,y)\in D)$.若对 D中任意两点(x,y_1), (x,y_2): $y_1<y_2$,有

$$\{(x,y): y_1<y<y_2\}\subset D,$$

则 $f(x,y)=\varphi(x)$.实际上我们有($0<\theta<1$)

$$f(x,y_2)-f(x,y_1)=f'_y(x,\theta(y_2-y_1))(y_2-y_1)=0.$$

这说明 $f(x,y)$之值与 y无关.

例 2.1.9 试论下列函数在指定点的可微性:

(1) $f(x,y)=\begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & x^2+y^2>0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ $(0,0)$.

(2) $f(x,y)=\begin{cases} x^{4/3}\sin(y/x), & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $(x,y)\in \mathbf{R}^2$.

(3) $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin(1/(x^2+y^2)), & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ $(0,0)$.

解 (1) 因为我们有

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{-1}e^{-1/x^2}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}y^{-1}e^{-1/y^2}=0,$$

所以 $f(x,y)-f(0,0)=e^{-1/(x^2+y^2)}=\sqrt{x^2+y^2}\,\alpha(x,y)$,其中

$$\alpha(x,y)=e^{-1/(x^2+y^2)}/\sqrt{x^2+y^2}=e^{-1/\rho^2}/\rho\to 0\quad(\rho\to 0),$$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.由此知 $f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

(2) 因为我们有

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\begin{cases} \dfrac{4}{3}x^{1/3}\sin\dfrac{y}{x}-yx^{-2/3}\cos\dfrac{y}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\begin{cases} x^{1/3}\cos\dfrac{y}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

且均在 $D=\mathbf{R}^2\backslash\{(0,y):y\in\mathbf{R}^1\}$上连续，所以 $f(x,y)$在 D 上可微.

对点$(0,y)$，因为其差商存在估计

$$\frac{|f(h,k)-f(0,y)|}{(h^2+k^2)^{1/2}}=O(|h|^{1/3})=o(1)\quad(h\to 0),$$

所以 $f(x,y)$在点$(0,y)$上可微.

(3) 注意到在 $x^2+y^2\neq 0$ 时有

$$f'_x(x,y)=2x\sin(1/(x^2+y^2))-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f'_y(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

在 $x^2+y^2=0$ 时，又有

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x^2)}{x}=0,\quad f'_y(0,0)=0.$$

若取 $x_n=1/2\sqrt{n\pi}$，$y_n=1/2\sqrt{n\pi}(n\in\mathbf{N})$，则得

$$\lim_{n\to\infty}f'_x(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}-2\sqrt{n\pi}=-\infty.$$

从而知 $f'_x(x,y)$在点$(0,0)$处间断(类似地可推 $f'_y(x,y)$在点$(0,0)$处也间断)，而且在任一邻域 $U_0(\delta)$上均无界.

但是因为 $f'_x(0,0)=0=f'_y(0,0)$，所以导出

$$f(x,y)-f(0,0)=(x^2+y^2)\sin(1/(x^2+y^2))=\rho\cdot\alpha(\rho),$$

$$\alpha(\rho)=\rho\sin(1/\rho^2)\to 0\quad(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0).$$

这说明 $f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

例 2.1.10　试论下列函数在指定点处的可微性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}xy/\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$　$(0,0)$.

(2) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$，$(0,0)$.

解　(1) 由 $|f(x,y)|=|xy/\sqrt{x^2+y^2}|\leqslant\sqrt{xy}/\sqrt{2}\to 0(x\to 0,y\to 0)$，可知 $f(x,y)$在点$(0,0)$处连续.因为我们有

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}0=0,\quad f'_y(0,0)=0,$$

所以得到($\rho=\sqrt{x^2+y^2}$)

$$f(x,y)-f(0,0)=xy/\sqrt{x^2+y^2}=\rho\cdot\alpha(x,y),\quad\alpha(x,y)=xy/\rho^2.$$

易知 $\rho\to 0$ 时有 $\alpha(x,y)\not\to 0$，故 $f(x,y)$在点$(0,0)$不可微.

注意，由 $f'_x(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$，$f'_y(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-$

$\dfrac{y^2 x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}(x^2+y^2\neq 0)$,可知 $|f_x'(x,y)|\leqslant 3/2$,$|f_x'(x,y)|\leqslant 3/2$.这说明 $f(x,y)$在点(0,0)的一个邻域上有有界偏导数.

(2) 因为我们有 $f_x'(0,0)=0=f_y'(0,0)$,所以导出

$$f(x,y)-f(0,0)=\rho\cdot\alpha(x,y)\quad(\alpha(x,y)=\sqrt[3]{xy}/\rho,\rho=\sqrt{x^2+y^2}).$$

取 $x_n=1/n,y_n=1/n$,则 $\alpha(1/n,1/n)=\sqrt[3]{n}/\sqrt{2}\to+\infty(n\to\infty)$.这说明 $f(x,y)$在点(0,0)处不可微.

例 2.1.11 解答下列命题:

(1) 求函数(i)$u=a^{xyz}(a>0)$.(ii)$u=x^y y^z z^x$ 的微分.

(2) 求可微函数 $u=f(x,y,z)$在 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 时对 t 的微分.

(3) 设$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,$lx+my+nz=0$,则

$$\frac{\mathrm{d}x}{my/b^2-mz/c^2}=\frac{\mathrm{d}y}{lz/c^2-nx/a^2}=\frac{\mathrm{d}z}{mx/a^2-ly/b^2}.$$

(4) 设$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,$\dfrac{x^2}{a^2+\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2+\lambda}+\dfrac{z^2}{c^2+\lambda}=1$,则

$$\frac{x(b^2-c^2)}{\mathrm{d}x}+\frac{y(c^2-a^2)}{\mathrm{d}y}+\frac{z(a^2-b^2)}{\mathrm{d}z}=0. \qquad ①$$

解 (1)(i) 注意到 $\ln u=xyz\ln a$,故得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln a(yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)=xyz\cdot\ln a\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{\mathrm{d}z}{z}\right),$$

$$\mathrm{d}u=a^{xyz}\cdot xyz\left(\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{\mathrm{d}z}{z}\right)\ln a.$$

(ii) 注意到 $\ln u=y\ln x+z\ln y+x\ln z$,故得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u}=\mathrm{d}y\cdot\ln x+\frac{y}{x}\mathrm{d}x+\mathrm{d}z\cdot\ln y+\frac{z}{y}\mathrm{d}y+\mathrm{d}x\ln z+\frac{x}{z}\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}u=x^y y^z z^x\left\{\left(\frac{y}{x}+\ln z\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{z}{y}+\ln x\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{x}{z}+\ln y\right)\mathrm{d}z\right\}.$$

(2) $\mathrm{d}u=f_1'\mathrm{d}t+f_2'\cdot 2t\mathrm{d}t+f_3'\cdot 3t^2\mathrm{d}t=(f_1'+2tf_2'+3t^2f_3')\mathrm{d}t$.

(3) 对两式各求微分,可得

$$\frac{x\mathrm{d}x}{a^2}+\frac{y\mathrm{d}y}{b^2}+\frac{z\mathrm{d}z}{c^2}=0,\quad l\mathrm{d}x+m\mathrm{d}y+n\mathrm{d}z=0.$$

从而可解出

$$\frac{\mathrm{d}x}{\begin{vmatrix} y/b^2 & z/c^2 \\ m & n \end{vmatrix}}=\frac{\mathrm{d}y}{\begin{vmatrix} z/c^2 & x/a^2 \\ n & l \end{vmatrix}}=\frac{\mathrm{d}z}{\begin{vmatrix} x/a^2 & y/b^2 \\ l & m \end{vmatrix}},$$

由此即得所证.

(4) 对两式各求微分,可得

$$\frac{x\mathrm{d}x}{a^2}+\frac{y\mathrm{d}y}{b^2}+\frac{z\mathrm{d}z}{c^2}=0,\quad \frac{x\mathrm{d}x}{a^2+\lambda}+\frac{y\mathrm{d}y}{b^2+\lambda}+\frac{z\mathrm{d}z}{c^2+\lambda}=0.$$

从而可解出

$$\begin{aligned}\frac{x\mathrm{d}x}{-\lambda(b^2-c^2)/b^2c^2(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}&=\frac{y\mathrm{d}y}{-\lambda(c^2-a^2)/c^2a^2(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)}\\&=\frac{z\mathrm{d}z}{-\lambda(a^2-b^2)/a^2b^2(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)},\end{aligned}$$

或

$$\frac{x\mathrm{d}x}{a^2(a^2+\lambda)(b^2-c^2)}=\frac{y\mathrm{d}y}{b^2(b^2+\lambda)(c^2-a^2)}=\frac{z\mathrm{d}z}{c^2(c^2+\lambda)(a^2-b^2)}.$$

若记此值为 $1/k$,又知

$$\frac{x(b^2-c^2)}{\mathrm{d}x}=\frac{kx^2}{a^2(a^2+\lambda)}=\frac{kx^2}{\lambda}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2+\lambda}\right)=\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2+\lambda}\right).$$

类似地可知

$$\frac{y(c^2-a^2)}{\mathrm{d}y}=\frac{k}{\lambda}\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}\right),\quad \frac{z(a^2-b^2)}{\mathrm{d}z}=\frac{k}{\lambda}\left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right).$$

因此我们有

$$\text{式①左端}=\frac{k}{\lambda}\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)\right]=0.$$

例 2.1.12　试证明下列命题:

(1) 设 $z=f(x,y)$可微,且 $f(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)$是具有连续二阶偏导数的函数 $g(x,y)$的全微分,则 $xf'_x(x,y)=yf'_y(x,y)$.

(2) 设 $x^2y^2+x^2+y^2-1=0$,则有微分等式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}}=0\quad(xy>0).$$

(3) 设$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$是某可微函数的全微分,则 $a=2$.

证明　(1) 由题设易知 $g'_x(x,y)=yf(x,y)$,$g'_y(x,y)=xf(x,y)$,从而又可得

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)+f'_y(x,y)\cdot y,\quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y\partial x}=f(x,y)+f'_x(x,y)\cdot x.$$

根据 $g''_{xy}=g''_{yx}$ 即可得证.

(2) 对原题式求微分,易知

$$2xy^2\mathrm{d}x+2x^2y\mathrm{d}y+2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0,$$
$$x(1+y^2)\mathrm{d}x+y(1+x^2)\mathrm{d}y=0. \qquad ①$$

从原题式还可解得

$$x^2=\frac{1-y^2}{1+y^2},\quad y^2=\frac{1-x^2}{1+x^2};\quad x=\pm\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2+1}}.$$

代入式①(注意 $xy>0$),我们有

$$\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}(1+y^2)\mathrm{d}x+\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}(1+x^2)\mathrm{d}y=0,$$
$$\sqrt{1-y^4}\,\mathrm{d}x+\sqrt{1-x^4}\,\mathrm{d}y=0.$$

(3) 不妨设该可微函数为 $z=f(x,y)$,则按定义可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x+ay}{(x+y)^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{(x+y)^2}.$$

由此知

$$z=\int\frac{y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}+g(x)=\ln|x+y|+\frac{x}{x+y}+g(x).$$

从而又得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+y}+\frac{y}{(x+y)^2}+g'(x)=\frac{x+2y}{(x+y)^2}+g'(x).$$

联系到上面第一式,我们有$\dfrac{x+ay}{(x+y)^2}=\dfrac{x+2y}{(x+y)^2}+g'(x)$,或

$$g'(x)=\frac{x+ay}{(x+y)^2}-\frac{x+2y}{(x+y)^2}=\frac{(a-2)}{(x+y)^2}y.$$

这说明必须 $a=2$.

例 2.1.13 试证明下列命题:

(1) 设 $z=f(x,y)$在区域 D 上定义,$\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)\in D$.若存在 $f'_y(x_0,y_0)$,又在邻域 $U(\boldsymbol{X}_0,\delta)$上存在 $f'_x(x,y)$,且 $f'_x(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续,则 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微.

(2) 设 $f(x,y)$在原点的邻域 $U_0(\delta)$上定义,$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续,在 $U_0(\delta)\setminus\{(0,0)\}$上可微.若有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f'_x(x,y)=0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}f'_y(x,y),$$

则 $f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

(3) 设 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$,$g(x,y)$在零点的邻域 $U_0(\delta)$上连续,且 $g(0,0)=0$,则 $f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

(4) 设 $f(x,y)$在点$(0,0)$处可微,且 $f(0,0)=0$,又假定 $g(x,y)$在点$(0,0)$处

连续,则 $F(x,y)=f(x,y)g(x,y)$在点(0,0)处可微,且有 $\mathrm{d}(fg)=f\mathrm{d}g$(在点(0,0)处).

证明　(1) 不妨假定$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in U(\boldsymbol{X}_0,\delta)$,我们有

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\=&f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\=&f'_x(x_0,y_0+\Delta y)\Delta x+o(\Delta x)+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta y)\\=&f'_x(x_0,y_0)\Delta x+\alpha\Delta x+o(\Delta x)+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta y)\quad(\Delta x\to0,\Delta y\to0),\end{aligned}$$

其中 $\alpha=f'_x(x_0,y_0+\Delta y)-f'_x(x_0,y_0)\to0(\Delta y\to0)$.再由 $|\Delta y|\leqslant\rho$, $|\Delta x|\leqslant\rho(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$可知$\lim\limits_{\rho\to0}[\alpha\Delta x+o(\Delta x)+o(\Delta y)]/\rho=0$.这说明 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微.

(2) 依题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|^2<\frac{\varepsilon}{2},\quad\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|^2<\frac{\varepsilon}{2}\quad(0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta),$$

从而应用中值定理与 Cauchy-Schwarz 公式,我们有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)|&=\left|\frac{\partial f(\theta x,\theta y)}{\partial x}x+\frac{\partial f(\theta x,\theta y)}{\partial y}y\right|\\&\leqslant\left[\left(\frac{\partial f(\theta x,\theta y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(\theta x,\theta y)}{\partial y}\right)^2\right]\cdot\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon\cdot\sqrt{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

(3) 因为我们有

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\frac{|x|g(x,0)}{x},\quad\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\frac{|y|g(0,y)}{y},$$

所以 $f'_x(0,0)=0=f'_y(0,0)$.注意到

$$\begin{aligned}&[f(x,y)-f(0,0)]/\sqrt{x^2+y^2}=|x-y|g(x,y)/\sqrt{x^2+y^2}\\&=r|\cos x-\sin x|g(r\cos\theta,r\sin\theta)/r\leqslant2g(r\cos\theta,r\sin\theta).\end{aligned}$$

(4) 因为 $f(x,y)=f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y+o(\rho)(\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to0)$,所以我们有$(F(0,0)=0,\rho\to0)$

$$\begin{aligned}\Delta F&=F(x,y)-F(0,0)=f(x,y)g(x,y)\\&=f'_x(0,0)g(x,y)\Delta x+f'_y(0,0)g(x,y)\Delta y+g(x,y)o(\rho)\\&=f'_x(0,0)g(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)g(0,0)\Delta y+R(x,y);\\R(x,y)&=f'_x(0,0)[g(x,y)-g(0,0)]\Delta x+f'_y(0,0)[g(x,y)-g(0,0)]\Delta y\\&\quad+g(x,y)\cdot o(\rho).\end{aligned}$$

注意到 $g(x,y)$在点(0,0)处的连续性可知 $R(x,y)/\rho\to0(\rho\to0)$.这说明 $F(x,y)$在点(0,0)处可微.从而立即可得 $F(x,y)$在点(0,0)处的微分为

$$\mathrm{d}F|_{(0,0)}=g(0,0)[f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y]=g\mathrm{d}f|_{(0,0)}.$$

例 2.1.14 试证明下列命题:

(1) 设 $u(x,y)$,$v(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上可微.若有

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\quad ((x,y)\in\mathbf{R}^2),$$

则在变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$下,上述方程组可表示为

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

(2) 设 $z=f(x,y)$在区域 $G\subset\mathbf{R}^2$ 上可微,又假定 $x=\varphi(s,t)$,$y=\psi(s,t)$在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上可微,且$(x,y)\in G((s,t)\in D)$,则 $z=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$在 D 上可微.

证明 (1) 注意到 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,$\theta=\arctan(y/x)$以及题设,我们有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}(xv_r'+yu_r')=\dfrac{1}{r^2}(yv_\theta'-xu_\theta'), & ①\\[2ex] \dfrac{1}{r}(xu_r'-yv_r')=\dfrac{1}{r^2}(yu_\theta'+xv_\theta'). & ②\end{cases}$$

以 y 乘式①,以 x 乘式②,相加可知

$$\frac{(x^2+y^2)u_r'}{r}=\frac{(y^2+x^2)v_\theta'}{r^2}\quad 或\quad u_r'=\frac{1}{r}v_\theta.$$

类似地可推得第二式.

(2) 对 D 中任一点 $\boldsymbol{P}_0=(s_0,t_0)$,并记 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)=(\varphi(s_0,t_0),\psi(s_0,t_0))$,依题设知,我们有

$$\Delta z=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+\alpha\rho,\quad \alpha\to0(\rho\to0),$$
$$\Delta x=\varphi(s,t)-\varphi(s_0,t_0)=\varphi_s'(s_0,t_0)\Delta s+\varphi_t'(s_0,t_0)\Delta t+\alpha_1\rho',\quad \alpha_1\to0(\rho'\to0),$$
$$\Delta y=\psi(s,t)-\psi(s_0,t_0)=\psi_s'(s_0,t_0)\Delta s+\psi_t'(s_0,t_0)\Delta t+\alpha_2\rho',\quad \alpha_2\to0(\rho'\to0),$$

$$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},\quad \rho'=\sqrt{(\Delta s)^2+(\Delta t)^2}.$$

由此可导出

$$\begin{aligned}\Delta z=&[f_x'(x_0,y_0)\varphi_s'(s_0,t_0)+f_y'(x_0,y_0)\psi_s'(s_0,t_0)]\Delta s\\&+[f_x'(x_0,y_0)\varphi_t'(s_0,t_0)+f_y'(x_0,y_0)\psi_t'(s_0,t_0)]\Delta t\\&+\alpha\rho+f_x'(x_0,y_0)\alpha_1\rho'+f_y'(x_0,y_0)\alpha_2\rho'.\end{aligned}$$

注意到(估计上式最后三项)

$$I\triangleq\frac{\alpha\rho+f_x'(x_0,y_0)\alpha_1\rho'+f_y'(x_0,y_0)\alpha_2\rho'}{\rho'}=\alpha\frac{\rho}{\rho'}+f_x'(x_0,y_0)\alpha_1+f_y'(x_0,y_0)\alpha_2,$$

$$\frac{\rho}{\rho'}=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\rho'}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\rho'}\right)^2},$$

$$\left|\frac{\Delta x}{\rho'}\right|=\left|\varphi_s'(s_0,t_0)\frac{\Delta s}{\rho'}+\varphi_t'(s_0,t_0)\frac{\Delta t}{\rho'}+\alpha_1\right|\leqslant|\varphi_s'(s_0,t_0)|+|\varphi_t'(s_0,t_0)|+M.$$

立即推知 $I\to 0\,(\rho'\to 0)$.证毕.

例 2.1.15　试证明下列命题:

(1) 存在 θ:$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,使得 $4/\pi=\cos(\pi\theta/2)+\sin\pi(1-\theta)/2$.

(2) 设 $f\in C^{(1)}(\mathbf{R}^2)$.若 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$,则存在 $g(t)$ $(t\in\mathbf{R}^1)$,使得 $f(x,y)=g(x+y)$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$.

(3) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续的一阶偏导数.若有

$$f(x,0)>0\quad(x\in\mathbf{R}^1),\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\quad((x,y)\in\mathbf{R}^2),$$

则 $f(x,y)>0$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$.

(4) 设 $u=\sqrt{yz}$,$v=\sqrt{xz}$,$w=\sqrt{xy}$ $(x,y,z>0)$.若三元可微函数 f 与 F 满足

$$f(u,v,w)=F(x,y,z), \tag{①}$$

则 $uf'_u+vf'_v+wf'_w=xF'_x+yF'_y+zF'_z$.

证明　(1) 作函数 $f(x,y)=\sin\pi x+\cos\pi y$,在中值公式

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=f'_x(\xi,\eta)h+f'_y(\xi,\eta)k;\quad \xi=x+\theta h,\eta=y+\theta k$$

中取 $x=0$,$y=-1/2$,$h=k=1/2$,则可得($\xi=\theta/2$,$\eta=-(1-\theta)/2$)

$$\begin{aligned}&[\sin(x+h)\pi+\cos(y+k)\pi]-[\sin\pi x+\cos\pi y]\\&=\left[\sin\frac{\pi}{2}+\cos(\pi\cdot 0)\right]-\left[\sin(0\cdot\pi)+\cos\frac{\pi}{2}\right]\ (=2)\\&=\frac{1}{2}(\pi\cos\xi\pi-\pi\sin\eta\pi)=\frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\theta\pi}{2}+\sin\frac{1-\theta}{2}\pi\right).\end{aligned}$$

由此即得 $4/\pi=\cos(\pi\theta/2)+\sin(\pi(1-\theta)/2)$.

(2) 作变量替换 $u=x+y$,并令 $h(u,y)=f(u-y,y)$,则得 $h'_y(u,y)=-f'_1(u-y,y)+f'_2(u-y,y)=0((u,y)\in\mathbf{R}^2)$.这说明 $h(u,y)$与 y 无关,记为 $g(u)=g(x+y)$.

(3) 对于 $\mathbf{R}^2$ 中两点(x,y)与$(x+y,0)$,则在两点间的连接直线段上,根据中值定理可知,存在点(ξ,η),使得

$$f(x,y)-f(x+y,0)=\left[\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial x}-\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial y}\right]y=0.$$

由此依题设得到 $f(x,y)=f(x+y,0)=0$.

(4) 式①的意思是说,$f(u,v,w)$通过中间变量 x,y,z 成为 x,y,z 的函数时等于另一函数 $F(x,y,z)$.这说明式①两端对 x,y,z 求偏导应相等.我们有

$$\begin{cases}f'_uu'_x+f'_vv'_x+f'_ww'_x=F'_x,\\f'_uu'_y+f'_vv'_y+f'_ww'_y=F'_y,\\f'_uu'_z+f'_vv'_z+f'_ww'_z=F'_z,\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}zf'_v/2v+yf'_w/2w=F'_x,\\zf'_u/2u+xf'_w/2w=F'_y,\\yf'_u/2u+xf'_v/2v=F'_z.\end{cases}$$

由此立即解出 $xF'_x+yF'_y+zF'_z=uf'_u+vf'_v+wf'_w$.

例 2.1.16　解答下列问题：

(1) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上可微.若有

(i) $f(x,x^2)=1$,　(ii) $f'_y(x,y)=x^2+2y,(x,y)\in\mathbf{R}^2$,

试求 $f(x,y)$.

(2) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数.若有

(i) $f(x,x^2)=1$,　(ii) $f'_1(x,x^2)=x(x\in\mathbf{R}^1)$,

试求 $f'_2(x,x^2)$.

(3) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上可微,且有 $f(1,1)=1,f'_x(1,1)=a,f'_y(1,1)=b$.又令 $F_1(x)=f(x,x)$,以及

$$F_2(x)=f(x,F_1(x)),\cdots,F_n(x)=f(x,F_{n-1}(x)),\cdots,$$

试求 $F'_n(1)$.

解　(1) 由(ii)可知 $f(x,y)=x^2y+y^2+g(x)$.从而由(i)得

$$1=f(x,x^2)=2x^4+g(x),\quad g(x)=1-2x^4.$$

这说明 $f(x,y)=1+y^2+yx^2-2x^4$.

(2) 由(i)知 $f'_1(x,x^2)+2xf'_2(x,x^2)=0$.用(ii)代入得

$$x[1+2f'_2(x,x^2)]=0.$$

从而我们有,$f'_2(x,x^2)=-1/2(x\neq0)$.又根据题设,f'_2是连续函数,故 $F'_2(0,0)=-1/2$,即 $f'_2(x,x^2)=-1/2$.

(3) 因为有 $F'_n(x)=f'_1[x,F_{n-1}(x)]+f'_2[x,F_{n-1}(x)]F'_{n-1}(x)$,所以得 $F'_n(1)=F'_1[1,F_{n-1}(1)]+f'_2[1,F_{n-1}(1)]F'_{n-1}(1)$.由条件知 $F_1(1)=f(1,1)=1,\cdots,F_n(1)=1$,从而有($F'_1(1)=f'_x(1,1)+f'_y(1,1)=a+b$)

$$\begin{aligned}F'_n(1)&=f'_1(1,1)+f'_2(1,1)F'_{n-1}(1)=a+bF'_{n-1}(1)\\&=a+b[a+bF'_{n-2}(1)]=a+ab+b^2F'_{n-2}(1)=\cdots\\&=a+ab+ab^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}F'_1(1)\\&=a+ab+ab^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n.\end{aligned}$$

例 2.1.17　试证明下列命题：

(1) 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是包含原点的凸区域,$f\in C^{(1)}(D)$.若有

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0\quad((x,y)\in D),$$

则 $f(x)\equiv C$(常数).

(2) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续可微.若

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0\quad((x,y)\in\mathbf{R}^2),$$

则 $f(x,y)\equiv C$(常数).

证明　(1) 注意用中值公式,可得(对$(x,y)\in D$)

$$f(x,y)-f(0,0)=f'_x(\theta x,\theta y)x+f'_y(\theta x,\theta y)y$$
$$=\frac{1}{\theta}[f'_x(\theta x,\theta y)\theta x+f'_y(\theta x,\theta y)\theta y]=0\quad(0<\theta<1).$$

注　若 D 不包含 $(0,0)$ 点,则结论未必成立.例如 $f(x,y)=\arctan(y/x)$.

(2) 研究方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 过点 (x_0,y_0) 的解 $y=y(x)$: $y_0=y(x_0)$.由条件知

$$\frac{df(x,y(x))}{dx}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}\equiv 0.$$

从而得出 $\frac{dy}{dx}=f(x,y(x))=C$(常数).

现在考察任一条过点 (x_0,y_0) 的直线

$$L:(y-y_0)=f(x_0,y_0)(x-x_0).$$

如果在 L 上有点 (x_1,y_1),使得 $f(x_1,y_1)\neq f(x_0,y_0)$,那么下列两条直线必相交:

(i) $(y-y_0)=f(x_0,y_0)(x-x_0)$,　(ii) $y-y_1=f(x_1,y_1)(x-x_1)$.

导致矛盾.这说明 $f(x,y)$ 在 L 上是常数.证毕.

例 2.1.18　解答下列命题:

(1) 设 $\mathbf{R}^2$ 上可微函数 $F(x,y)$ 满足

(i) 在直角坐标系中有分解: $F(x,y)=f(x)+g(y)$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

(ii) 在极坐标系中有 $F(x,y)=h(\theta)$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

试求 $F(x,y)$ $(x\neq 0,y\neq 0)$.

(2) 在上题中,改 $F(x,y)$ 为连续可微,又条件(ii)改为 $F(x,y)=h(r)$,试求 $F(x,y)$.

(3) 设 $u=f(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微; $x=r\sin\theta\cdot\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\cdot\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$.

(i) 若 $xu'_x+yu'_y+zu'_z=0$,则 u 是 θ,φ 的函数.

(ii) 若 $u'_x/x=u'_y/y=u'_z/z$,则 u 是 r 的函数.

解　(1) 由题设知 $h(\theta)=f(r\cos\theta)+g(r\sin\theta)$,故有

$$0=\frac{\partial h(\theta)}{\partial r}=f'(r\cos\theta)\cos\theta+g'(r\sin\theta)\sin\theta,$$

从而可得 $-xf'(x)=yg'(y)$,即知 $yg'(y)\equiv C$ 或 $g(y)=C\ln|y|$.因此,根据 $f'(x)=-yg'(y)/x=-C/|x|$,或 $f(x)=-C\ln|x|$.这说明 $F(x,y)=C(-\ln|x|+\ln|y|)$.

(2) 由条件知 $F'_\theta=0$,即

$$0=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot(-r\sin\theta)+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot(r\cos\theta)=-y\frac{\partial F}{\partial x}+x\frac{\partial F}{\partial y}=-yf'(x)+xg'(y).$$

由此得到 $f'(x)/x=g'(y)/y$ $(x\neq 0,y\neq 0)$.若令此比值为 λ(常数),我们有 $f'(x)=\lambda x$, $g'(y)=\lambda y$(因为 f', g' 连续,所以此式对 $x=y=0$ 仍真).这说明

$$f(x)=\frac{1}{2}\lambda x^2+C_1,\quad g(y)=\frac{1}{2}\lambda y^2+C_2,\quad F(x,y)=\frac{\lambda}{2}(x^2+y^2)+C.$$

(3)(i)只需注意等式

$$f'_r = f'_x x'_r + f'_y y'_r + f'_z z'_r = f'_x \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi + f'_y \sin\theta \sin\varphi + f'_z \cos\theta$$
$$= f'_x \cdot (x/r) + f'_y \cdot (y/r) + f'_z \cdot (z/r) = 0.$$

(ii)注意到 $f'_\theta = f'_x x'_\theta + f'_y y'_\theta + f'_z z'_\theta = f'_x r\cos\theta\cos\varphi + f'_y r\cos\theta\sin\varphi - f'_z r\sin\theta$,又依题设可得

$$\frac{f'_x}{x} = \frac{f'_y}{y} = \frac{f'_z}{z} = \frac{f'_x r\cos\theta\cos\varphi + f'_y r\cos\theta\sin\varphi - f'_z r\sin\theta}{r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - r^2\sin\theta\cos\theta}.$$

(因为分母=0,所以分子=0.)即 $f'_\theta = 0$.此外,还有

$$f'_\varphi = f'_x \cdot (-r\sin\theta\sin\varphi) + f'_y \cdot (r\sin\theta\cos\varphi) + 0,$$

再依题设之比例又有

$$\frac{f'_x}{x} = \frac{f'_y}{y} = \frac{-f'_x r\sin\theta \cdot \sin\varphi + f'_y \cdot r\sin\theta\cos\varphi}{-r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi}.$$

(因为分母=0,所以分子=0.)即 $f'_\varphi = 0$.综上所述,即得所证.

例 2.1.19　试证明下列命题:

(1)设 $z = f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上可微.若有 $b\dfrac{\partial z}{\partial x} = a\dfrac{\partial z}{\partial y}$($a\neq 0$,$b\neq 0$),则 z 是 $ax+by$ 的函数.

*(2)设 $\boldsymbol{X}_0 = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n$,$f \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$.若 $f(\boldsymbol{X}_0) = 0$,则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)g_i(x_i, x_2, \cdots, x_n),$$

其中 $g_i \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$($i = 1,2,\cdots,n$),$g_i(\boldsymbol{X}_0) = \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X}_0)}{\partial x_i}$($i = 1,2,\cdots,n$).

(3)设 $D = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1\}$,$f(x,y,z)$定义在 $D\times\mathbf{R}^1$ 上.若 $f\in C(D\times\mathbf{R}^1)$,$f'_z \in C(D\times\mathbf{R}^1)$,且有

$$f^2(x,y,z) + \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)^2 > 0, \quad (x,y,z)\in D\times\mathbf{R}^1,$$

则对任意的 $z_0 \in \mathbf{R}^1$,均存在开集 G_0:$z_0 \in G_0$,使得对一切$(x,y)\in D$,在 G_0 中至多存在一个 z 满足 $f(x,y,z) = 0$.

证明　(1)令 $u = ax+by$,$v = y$;即 $x = (u-bv)/a$,$y = v$.此时有 $z = f((u-bv)/a, v)$.从而得

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}$$
$$= -\frac{1}{a}\left(b\frac{\partial z}{\partial x} - a\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad (a\neq 0, b\neq 0).$$

由此即知$\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$,$z$ 与 v 无关,只是 $v = ax+by$ 的函数.

*(2)不妨设 $\boldsymbol{X}_0 = (0,0,\cdots,0)$,我们有

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) \cdot x_i \cdot \mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 f'_{x_i}(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

从而取 $g_i(\boldsymbol{X}) = \int_0^1 f_{x_i}(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n)\mathrm{d}t$ 即可得证.

(3) 对给定的 $z_0 \in \mathbf{R}^1$,令

$$F(x, y, z_0) = f^2(x, y, z_0) + \left(\frac{\partial f(x, y, z_0)}{\partial z}\right)^2, \quad (x, y) \in D,$$

易知 $F \in C(D)$且 $F(x, y, z_0) > 0$,以及 $\min\limits_{(x,y)\in D}\{F(x, y, z_0)\} > 0$.自然也存在$(x_0, y_0) \in D$,使得 $F(x_0, y_0, z_0) = \min\limits_{(x,y)\in D}\{F(x, y, z_0)\}$.

如果对 $n \in \mathbf{N}$,均有 z_n, x_n, y_n,使得

$$|z_n - z_0| < 1/n; \quad \min_{(x,y)\in D}\{F(x, y, z_n)\} = F(x_n, y_n, z_n) = 0.$$

(不妨假定$(x_n, y_n) \to (\bar{x}, \bar{y})(n \to \infty$,否则抽子列.)从而有 $F(\bar{x}, \bar{y}, z_0) = 0$,矛盾.因此,对某个开集 $G_0: z_0 \in G_0$,有 $\min\limits_{(x,y)\in D}\{F(x, y, z)\} > 0 (z \in G_0)$.

如果对 $n \in \mathbf{N}$,均有 G_0 中的 $z'_n, z''_n: z'_n \neq z''_n$,且有 $|z'_n - z_0| + |z''_n - z_0| < 1/n$,以及$(x_n, y_n) \in D$,使得

$$f(x_n, y_n, z'_n) = f(x_n, y_n, z''_n) = 0,$$

则由 Rolle 定理可知,存在位于 z'_n 与 z''_n 之间的 $\bar{z}_n$,使得$\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_n, y_n, \bar{z}_n) = 0$.(不妨假定$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (\bar{x}, \bar{y}) \in D$,否则抽子列.)从而导出

$$\frac{\partial}{\partial z} f(\bar{x}, \bar{y}, z_0) = 0, \quad f(\bar{x}, \bar{y}, z_0) \neq 0,$$

且对充分大的 n,有 $f(x_n, y_n, z'_n) \neq 0$, $f(x_n, y_n, z''_n) \neq 0$,导致矛盾.因此,对某个 n_0,如果有 $z_1 \neq z_2$, $|z_1 - z_0| + |z_2 - z_0| < 1/n_0$,那么就有 $f^2(x, y, z_1) + f^2(x, y, z_2) > 0$.

例 2.1.20　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x, y)$在开集 $G \subset \mathbf{R}^2$ 上连续,$\boldsymbol{X}_0 = (x_0, y_0) \in G$,$f(x, y)$在 $G \backslash \{\boldsymbol{X}_0\}$上的偏导数连续.若存在极限$\lim\limits_{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}_0} f'_x(x, y)$,$\lim\limits_{\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}_0} f'_y(x, y)$,则 $f(x, y)$的偏导数可连续延拓到点(x_0, y_0).

(2) 设 $f(x, y)$在 $\mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$上连续可微,且存在 $M > 0$,使得 $\left|\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right| \leqslant M$, $\left|\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right| \leqslant M ((x, y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0, 0)\})$,则 $f(x, y)$可连续延拓到 $\mathbf{R}^2$ 上.

证明 (1) 因为 $f(x,y)$在 $G\setminus\{\boldsymbol{X}_0\}$上存在偏导数,所以有

$$[f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)]/\Delta x=f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0),\quad 0<\theta<1.$$

又注意到偏导数当 $\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{X}_0$ 时存在极限,故知 $f'_x(x_0,y_0)$存在,且有

$$\lim_{\Delta x\to 0}f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0)=f'_x(x_0,y_0).$$

这同时也说明偏导数在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处连续.

(2) 只需指出:对任一点列 $\boldsymbol{X}_n=(x_n,y_n)\to(0,0)(n\to\infty)$,$\{f(x_n,y_n)\}$必是 Canchy 列即可.为此,对任给 $\varepsilon>0$,先取 N,使得

$$|\boldsymbol{X}_n-\boldsymbol{X}_m|=\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2}<\varepsilon/4M\quad(n\geqslant N).$$

(i) 若联结点 $\boldsymbol{X}_n$ 与 $\boldsymbol{X}_m$ 的折线不过原点,则可用已知结果,得到

$$|f(\boldsymbol{X}_n)-f(\boldsymbol{X}_m)|<M(|x_n-x_m|+|y_n-y_m|)<\varepsilon.$$

(ii) 若联结点 $\boldsymbol{X}_n$ 与 $\boldsymbol{X}_m$ 的折线过原点,则可移动该折线段使其离开原点相距 $\varepsilon/4M$.此时可得

$$|f(\boldsymbol{X}_n)-f(\boldsymbol{X}_m)|<M(|x_n-x_m|+|y_n-y_m|)+2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}\leqslant\varepsilon.$$

注 本命题对单元函数是不真的,例如 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$

例 2.1.21 试证明下列命题:

(1) (Euler)设 $f(x,y,z)$是可微函数,则 $u=f(x,y,z)$是 n次齐次函数当且仅当

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=nf(x,y,z).\qquad ①$$

特例 若 $u=x^nf(y/x,z/x)$,则必有 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=n\cdot u$.

(2) 设 $f(x,y,z)$是可微的 n次齐次函数,则其偏导(函)数均为 $n-1$ 次齐次函数.

(3) 设 $f(x,y,z)$是可微的 n次齐次函数,$z=\varphi(x,y)$是由方程 $f(x,y,z)=0$ 确定的隐函数,则 $\varphi(x,y)$是 $n=1$ 次齐次函数.

证明 (1) 必要性.假定 $f(tx,ty,tz)=t^nf(x,y,z)$,则在两端对 t 求导,得

$$xf'_1(tx,ty,tz)+yf'_2(tx,ty,tz)+zf'_3(tx,ty,tz)=nt^{n-1}f(x,y,z).$$

从而取 $t=1$ 即可得式①.

充分性.假定式①成立,则作函数

$$F(t)=f(tx_0,ty_0,tz_0)/t^n,\quad (x_0,y_0,z_0)\in\mathbf{R}^3,$$

对 t 求导,我们有

$$F'(t)=\{[f'_1(tx_0,ty_0,tz_0)x_0+f'_2(tx_0,ty_0,tz_0)y_0+f'_3(tx_0,ty_0,tz_0)z_0]t-nf(tx_0,ty_0,tz_0)\}/t^{n+1}.$$

注意到式①中对应 x,y,z 为 tx_0,ty_0,tz_0,即知 $F'(t)=0$,$F(t)=C$(常数).因为 $F(1)=f(x_0,y_0,z_0)$,所以 $F(t)=f(x_0,y_0,z_0)$.即 $f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^nf(x_0,y_0,$

z_0).由点(x_0,y_0,z_0)的任意性即可得证.

(2)依题设知 $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$.在两端对 x 求导,可得

$$f_1'(tx,ty,tz)t=t^n f_1'(x,y,z),\quad f_1'(tx,ty,tz)=t^{n-1}f_1'(x,y,z).$$

这说明 $f_x'(x,y,z)$是 $n-1$ 次齐次函数.其它偏导数雷同.

(3)只需指出 $x\varphi_x'+y\varphi_y'=\varphi$.为此,对方程 $f(x,y,\varphi(x,y))=0$ 求偏导可得

$$f_1'+f_3'\varphi_x'=0,\quad f_2'+f_3'\varphi_y'=0.$$

再以 x 和 y 各乘上述第一,第二式,并相加,我们有

$$xf_1'+yf_2'+f_3'(x\varphi_x'+y\varphi_y')=0.$$

因为 $f(x,y,z)$是 n 次齐次函数,所以

$$xf_1'(x,y,\varphi(x,y))+yf_2'(x,y,\varphi(x,y))+zf_3'(x,y,\varphi(x,y))$$
$$=nf(x,y,\varphi(x,y))=0.$$

从而联系前一式,导出 $-zf_3'+f_3'(x\varphi_x'+y\varphi_y')=0$,即

$$f_2'\cdot(x\varphi_x'+y\varphi_y'-z)=0,\quad x\varphi_x'+y\varphi_y'=z.$$

由此即得所证.

例 2.1.22　试证明下列命题:

(1)在三角形$\triangle ABC$中,BC的边长为 a,AC的边长为 b.若记$\angle B$,$\angle C$以及 a,b的改变量为 ΔB,ΔC,Δa,Δb,则有近似公式

$$\frac{\Delta b}{b}\approx\frac{\Delta a}{a}+(\cot A+\cot B)\Delta B+\cot A\cdot\Delta C.$$

(2)在三角形$\triangle ABC$中,记其边长各为 a,b,c,则

(i) $\mathrm{d}c=\cos B\cdot\mathrm{d}a+\cos A\cdot\mathrm{d}b+a\cdot\sin B\cdot\mathrm{d}C$.

(ii) $8S\cdot\mathrm{d}S=\sum\limits_{a,b,c}a(b^2+c^2-a^2)\cdot\mathrm{d}a$($S$是$\triangle ABC$之面积,$\sum\limits_{a,b,c}$表示对 a,b,c 轮换求和).

证明　(1)对正弦定理$\dfrac{a}{\sin(B+C)}=\dfrac{b}{\sin B}=\left(=\dfrac{c}{\sin C}\right)$取对数,可知

$$\ln b=\ln a-\ln\sin(B+C)+\ln\sin B.$$

由此可得

$$\frac{\mathrm{d}b}{b}=\frac{\Delta a}{a}-\frac{\cos(B+C)}{\sin(B+C)}(\Delta B+\Delta C)+\frac{\cos B}{\sin B}\cdot\Delta B$$
$$=\frac{\Delta a}{a}+\cot A\cdot(\Delta B+\Delta C)+\cot B\cdot\Delta B.$$

从而我们有$\dfrac{\Delta b}{b}\approx\dfrac{\mathrm{d}b}{b}=\dfrac{\Delta a}{a}+(\cot A+\cot B)\Delta B+\cot A\cdot\Delta C$.

(2)(i)根据余弦、正弦定理:

$$c=a\cos B+b\cos A,\quad a/\sin A=b/\sin B,$$

易知 $\mathrm{d}c=\mathrm{d}a\cdot\cos B+\mathrm{d}b\cdot\cos A-a\sin B\cdot\mathrm{d}B-b\sin A\cdot\mathrm{d}A$.又由 $A+B+C=\pi$ 可

得 $dA+dB+dC=0$,从而有

$$dc=\cos B\cdot da+\cos A\cdot db+a\sin B\cdot dC.$$

(ii) 令 $p=(a+b+c)/2$,则 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.从而可知

$$16S^2=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

$$\begin{aligned}32S\cdot dS=&(da+db+dc)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\\&+(-da+db+dc)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\\&+(da-db+dc)(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)\\&+(da+db-dc)(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c).\end{aligned}$$

易知上式右端 da 之系数为

$$\begin{aligned}&(a-b+c)(a+b-c)[(-a+b+c)-(a+b+c)]+(a+b+c)(-a+b+c).\\&[(a+b-c)+(a-b+c)]=2a\{-[a^2-(b-c)^2]+[-a^2+(b+c)^2]\}\\&\qquad=2a\{-2a^2+2b^2+2c^2\}=4a(-a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

类似地可推出 db 与 dc 之系数各为

$$4b(a^2-b^2+c^2),\quad 4c(a^2+b^2-c^2).$$

由此立即得到 $8SdS=\sum\limits_{a,b,c}a(b^2+c^2-a^2)da$,即

$$8SdS=a(b^2+c^2-a^2)da+b(a^2-b^2+c^2)db+c(a^2+b^2-c^2)dc.$$

例 2.1.23　应用公式 $\Delta u\approx du$ 计算下列数值的近似值:

(1) $I=1.002\times(2.003)^2\times(3.004)^3$.

(2) $I=(1.03)^2/\sqrt[3]{0.98\cdot\sqrt[4]{(1.05)^3}}$.

(3) $I=\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}$.

(4) $I=\sin 29°\cdot\tan 46°$.

(5) $I=(0.97)^{1.05}$.

解　(1) 在近似公式 $(1+x)(2+y)^2(3+z)^3\approx1\cdot2^2\cdot3^3+2^2\cdot3^3\cdot x+2^2\cdot3^3\cdot y+2^2\cdot3^3\cdot z$ 中,取 $x=0.002$,$y=0.003$,$z=0.004$,可得

$$I\approx108+0.216+0.324+0.432=108.972.$$

(2) 用 $f(x,y,z)=(1+x)^2/\sqrt[3]{(1-y)\sqrt[4]{(1+z)^3}}$ 的近似公式:

$$f(x,y,z)\approx1+2x+y/3-z/4\quad(x=0.03,y=0.02,z=0.05),$$

可得 $I\approx1+0.06+0.0066-0.0125\approx1.054$.

(3) 用近似公式 $\sqrt{(1+x)^3+(2-y)^3}\approx3+x/2-2y$ $(x=0.02,y=0.03)$,可得 $I\approx3+0.01-0.06=2.95$.

(4) 用 $\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}\cdot\tan\frac{\pi}{4}\cdot x+\sin\frac{\pi}{6}\cdot x/\cos^2\frac{\pi}{4}$ $(x=0.017)$,可得 $I\approx0.5-0.866\times0.017+0.017\approx0.502$.

(5) 用近似公式 $(1-x)^{1+y}\approx 1-x$ $(x=0.03, y=0.05)$，可得 $I\approx 1-0.03=0.97$.

例 2.1.24　试证明下列命题：

(1) 设 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上可微函数.若存在定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的可微函数 $F(u,v)$：$\dfrac{\partial F(u,v)}{\partial u}\neq 0$，$\dfrac{\partial F(u,v)}{\partial v}\neq 0$（即无临界点），使得

$$F(\varphi(x,y),\psi(x,y))=0\quad((x,y)\in\mathbf{R}^2),$$

则行列式 $J=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$ $((x,y)\in\mathbf{R}^2)$.

(2) 设在 $\mathbf{R}^2$ 中两条曲线 L_1，L_2 在点 $P_0=(x_0,y_0)$ 处相交，又由变换 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 将 L_1，L_2 映为 uv 平面上的曲线 l_1，l_2，且在 $Q_0=(u_0,v_0)$ 处相交.为使在 P_0 处 L_1 与 L_2 之交角及其转向均与 Q_0 处 l_1 与 l_2 的交角与转向相同的条件是 $u_x'=v_y'$，$v_x'=-u_y'$.

证明　(1) 取定点 $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，则在点 (x_0,y_0) 处有

$$F_u'\cdot\varphi_x'+F_v'\cdot\psi_x'=0,\quad F_u'\cdot\varphi_y'+F_v'\cdot\psi_y'=0. \tag{①}$$

依据题设知

$$F_u'(\varphi(x_0,y_0),\psi(x_0,y_0))\neq 0,\quad F_v'(\varphi(x_0,y_0),\psi(x_0,y_0))\neq 0,$$

从而从式①导出

$$\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)}=\begin{vmatrix}\varphi_x'(x_0,y_0) & \varphi_y'(x_0,y_0)\\ \psi_x'(x_0,y_0) & \psi_y'(x_0,y_0)\end{vmatrix}=0.$$

注意到点 (x_0,y_0) 的任意性，即得所证.

(2) 因为 $\mathrm{d}u=u_x'\mathrm{d}x+u_y'\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}v=v_x'\mathrm{d}x+v_y'\mathrm{d}y$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\left(v_x'+v_y'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\left(u_x'+u_y'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

若记 L_1，L_2 在 P_0 处的切线斜率各为 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_1$，$\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_2$；$l_1$，$l_2$ 在 Q_0 处的切线斜率各为 $\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1$，$\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2$，则按交角相同可知

$$\frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_2-\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_1}{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_1\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_2}=\tan\theta=\frac{\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2-\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1}{1+\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_1\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_2}.$$

现在用 $\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)_i=\left[v_x'+v_y'\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_i\right]\Big/\left[u_x'+u_y'\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_i\right]$ $(i=1,2)$ 代入上式右端，经计算后易知其等式成立的条件就是 $u_x'=v_y'$，$u_y'=-v_x'$.

2.2　高阶偏导数与高阶(全)微分(以二元函数为例)

函数 $z=f(x,y)$的一阶偏导数 $f'_x(x,y)$,$f'_y(x,y)$仍是区域 D 上的二元函数.若对它们还可求一阶偏导数,其结果称为 $f(x,y)$的二阶偏导数.f'_x关于 x 的偏导数,称为 f 关于 x 的二阶偏导数,记为$(f'_x)'_x=f''_{xx}$,$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$或 $z''_{xx}=z'_{x^2}$.

f'_x关于 y 的偏导数,称为 f 的混合二阶偏导数,记为

$$z''_{xy},\quad (f'_x)'_y=f''_{xy}\quad 或\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}.$$

同样可理解

$$(f'_y)'_x=f''_{yx}\quad 或\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad (f'_y)'_y=f''_{yy}\quad 或\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

定理 2.2.1　设 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)的邻域上存在二阶偏导数 $f''_{xy}(x,y)$,$f''_{yx}(x,y)$.若 $f''_{xy}(x,y)$,$f''_{yx}(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续,则 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

注　记 $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$(三元函数时,则再加一项$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$),称 $\Delta u=0$ 为 Laplace 方程,$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$称为 Laplace 算符.

设 D 是一个区域,以 $C^{(n)}(D)$表示在 D 上有直到 n 阶的连续偏导数的函数全体.$f\in C^{(3)}(D)$表示 f 具有连续的三阶偏导数,此时又可推得 $f'''_{xyx}=f'''_{xxy}$等等.

当 x,y 为自变量时,二元函数 $u=f(x,y)$的微分为 $\mathrm{d}u=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$,这里 $\mathrm{d}x=\Delta x$,$\mathrm{d}y=\Delta y$ 与 x,y 无关,所以相对于 x,y 来说是常数.我们将 $\mathrm{d}u$ 看成 x,y 的函数,再求一次微分,其结果称为 $u=f(x,y)$的二阶微分,记作

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u&=\mathrm{d}(\mathrm{d}u)=\frac{\partial}{\partial x}(f'_x\mathrm{d}x+f'_y\mathrm{d}y)\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}(f'_x\mathrm{d}x+f'_y\mathrm{d}y)\mathrm{d}y\\&=f''_{xx}(\mathrm{d}x)^2+2f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f''_{yy}(\mathrm{d}y)^2=f''_{xx}\mathrm{d}x^2+2f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f''_{yy}\mathrm{d}y^2,\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}x^2$ 是$(\mathrm{d}x)^2$ 的缩写,不是对 x^2 求微分.

如把偏导数$\dfrac{\partial}{\partial x}$运算理解成算子,它是把 $C^{(1)}(D)$中函数映为 $C(D)$中函数的算子:

$$\frac{\partial}{\partial x}:C^{(1)}(D)\to C(D),\quad f(x,y)\mapsto\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},$$

引入算子概念后,一、二阶微分可视作算子 $\mathrm{d}x\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\dfrac{\partial}{\partial y}$作用到 f 上的结果:

$$\mathrm{d}u=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)f,\quad \mathrm{d}^2u=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f,$$

后者即对 f 连续作用算子 $\mathrm{d}x\dfrac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\dfrac{\partial}{\partial y}$运算两次的结果,应用数学归纳法,可以证明

$$\mathrm{d}^nu=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\mathrm{d}x^{n-k}\mathrm{d}y^k\quad\left(\mathrm{C}_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\right).$$

例 2.2.1　解答下列问题:

(1) 设 $z=\arccos\sqrt{x/y}$,求 z''_{xy}, z''_{yx}.

(2) 设 $f(x,y)=(x^5y-x^3y^2)/(x^4+x^2y+y^2)$, $f(0,0)=0$,求 $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$.

(3) 设 $\varphi(t)$在 $\mathbf{R}^1$ 上二次可导,$\psi(t)$在 $\mathbf{R}^1$ 上可微.令

$$f(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t,$$

求 $f''_{xx}(x,y)$, $f''_{xy}(x,y)$.

解　(1) 因为 $z'_x=-\dfrac{1}{2}(xy-x^2)^{-1/2}$, $z'_y=\dfrac{x}{2}(xy^3-x^2y^2)^{-1/2}$,所以

$$z''_{xy}=\frac{x}{4}(xy-x^2)^{-3/2}=z''_{yx}.$$

(2) 因为我们有 $f'_x(0,y)=0$, $f'_y(x,0)=x$, $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$,所以

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}=0,$$

$$f''_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

(3) 因为 $f'_x(x,y)=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$,所以

$$f''_{xx}(x,y)=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y).$$

$$f''_{xy}(x,y)=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi(x+y)+\psi'(x+y).$$

例 2.2.2　解答下列问题:

(1) 设 $f(x,y,z)=1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,求 $g(x,y,z)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2$.

(2) 设(i) $f(x,y)=x/(x^2+y^2)$,(ii) $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$,试求 $g(x,y)=\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)$.

解　(1) 记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{z}{r^3}.$$

由此知 $g(x,y,z)=1/r^4$.

(2) (i) 由

$$\begin{aligned}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)&=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\\&=x\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+y\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

$$=-\frac{x}{x^2+y^2}=-f(x,y),$$

可知 $g(x,y)=-(-f(x,y))=f(x,y)$.

(ii) 由 $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}=1$ 可知,$g(x,y)=0$.

例 2.2.3　讨论下列函数 $f(x,y)$ 及 $f'_x,f'_y,f''_{xy},f''_{yx}$ 的存在性与连续性关系.

(1) $f(x,y)=\begin{cases}1, & y=x\neq 0,\\ 0, & y\neq x \text{ 或 } y=x=0.\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^3\sin\dfrac{1}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 0, & x+y=0.\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}yx^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$

(4) $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

解　(1) $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$,$f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续.

(2) $f'_x(x,y)$,$f'_y(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续,不存在 $f''_{xy}(0,0)$.

(3) $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$,$f''_{xy}$与 f''_{yx}在点$(0,0)$处不连续.

(4) $f''_{xy}(0,0)=-1$,$f''_{yx}(0,0)=1$ 但不相等.

例 2.2.4　解答下列问题:

(1) 设 $u=f(x,y)$有连续二阶偏导数;$x=\varphi(t)$,$y=\psi(t)$,求$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$.

(2) 设 $u=f(x,y,z)$有连续二阶偏导数;$z=x\mathrm{e}^y$,求$\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$.

(3) 设 $z=f(x,y)$有连续二阶偏导数,且有

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0,\quad f(x,2x)=x,\quad f'_1(x,2x)=x^2,$$

求 $f''_{11}(x,2x)$,$f''_{12}(x,2x)$.

(4) 设 $f(u,v)$有连续二阶偏导数.若$\dfrac{\partial^2f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2f}{\partial v^2}=1$,令 $F(x,y)=f[xy,(x^2-y^2)/2]$,求 $I=\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}$.

解　(1) 由$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,可知

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$$
$$=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+2\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}.$$

(2) 由$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_3'\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+\mathrm{e}^yf_3'$,可知

$$\frac{\partial u}{\partial x\partial y}=f_{12}''+f_{13}''\frac{\partial z}{\partial y}+\mathrm{e}^yf_3'+\mathrm{e}^y\left(f_{32}''+f_{33}''\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$=f_{12}''+x\mathrm{e}^yf_{13}''+\mathrm{e}^yf_3'+\mathrm{e}^yf_{32}''+x\mathrm{e}^{2y}f_{33}''.$$

(3) 在 $f(x,2x)=x$ 两端对 x 求导,已知

$$f_1'(x,2x)+2f_2'(x,2x)=1,\quad \text{即 } x^2+2f_2'(x,2x)=1.$$

再对 x 求导,又得 $2x+2f_{21}''(x,2x)+4f_{22}''(x,2x)=0$,或

$$f_{21}''(x,2x)+2f_{22}''(x,2x)=-x.$$

此外,又在式 $f_1'(x,2x)=x^2$ 两端对 x 求导,我们有

$$f_{11}''(x,2x)+2f_{12}''(x,2x)=2x.$$

注意到(依题设)$f_{11}''=f_{22}''$,$f_{12}''=f_{21}''$,故综上所述导出

$$f_{11}''(x,2x)=-4x/3,\quad f_{12}''(x,2x)=5x/3.$$

(4) 由$\frac{\partial F}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}$,$\frac{\partial F}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}$,可知

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v},$$
$$\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2f}{\partial v^2}-\frac{\partial f}{\partial v}.$$

从而得到 $I=x^2+y^2$.

例 2.2.5 试证明下列命题:

(1) 设 $z=\mathrm{e}^{-x^2/4y}/\sqrt{y}$,则 $z_{xx}''=z_y'$.

(2) 设 $z=\mathrm{e}^{ay}\cdot\cos(a\ln x)$,则 $z_{xx}''+z_{yy}''/x^2+z_x'/x=0$.

(3) 设 $f(t)$,$g(t)$可微,$z=x^2f(y/x)+y^{-2}g(y/x)$,则

$$x^2z_{xx}''+2xyz_{xy}''+y^2z_{yy}''+xz_x'+yz_y'=4z.$$

(4) 设 $u=u(x,t)$满足

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\quad(\text{热传导方程}),$$

则 $v=v(x,t)=\mathrm{e}^{-x^2/4a^2t}u(x/a^2t,-1/a^4t)/a\sqrt{t}\,(t>0)$也满足该微分方程.

证明 (1) 由 $z_x'=-x\mathrm{e}^{-x^2/4y}/2y^{3/2}$,$z_y'=\mathrm{e}^{-x^2/4y}(-1/2y^{3/2}+x^2/4\sqrt{y}y^2)$,可知 $z_{xx}''=-2^{-1}y^{-3/2}\{\mathrm{e}^{-x^2/4y}+x\mathrm{e}^{-x^2/4y}(-x/2y)\}$.由此即得所证.

(2) 因为我们有 $z'_x = -ae^{ay} \cdot \sin(a\ln x)/x$, $z'_y = ae^{ay}\cos(a\ln x)$,所以

$$z''_{xx} = -ae^{ay}\{a\cos(a\ln x) - \sin(a\ln x)\}/x^2, \quad z''_{yy} = a^2 e^{ay} \cdot \cos(a\ln x).$$

由此立即得证.

(3) 因为我们有

$$z'_x = 2xf\left(\frac{y}{x}\right) - yf'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2 y}g'\left(\frac{y}{x}\right), \quad z'_y = xf'\left(\frac{y}{x}\right) - 2y^{-3}g\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{xy^2}g'\left(\frac{y}{x}\right),$$

所以其二阶偏导数为

$$z''_{xx} = 2f\left(\frac{y}{x}\right) - 2\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^4}g''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2}{x^3 y}g'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$z''_{xy} = 2f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right) - f'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^3 y}g''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2 y^2}g'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$z''_{yy} = f''\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{6}{y^4}g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2}{xy^3}g'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2}{xy^3}g'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2 y^2}g''\left(\frac{y}{x}\right).$$

由此即可得证.

(4) 因为我们有

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(-\frac{u}{2a\sqrt{t^3}} + \frac{x^2 u}{4a^3\sqrt{t^5}} - x\frac{\partial u}{\partial x}\Big/ a^3\sqrt{t^5} + \frac{\partial u}{\partial t}\Big/ a^5\sqrt{t^5}\right)e^{-x^2/4a^2 t},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(-\frac{u}{2a^3\sqrt{t^3}} + \frac{x^2 u}{4a^5\sqrt{t^5}} - x\frac{\partial u}{\partial x}\Big/ a^5\sqrt{t^5} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big/ a^5\sqrt{t^5}\right)e^{-x^2/4a^2 t},$$

所以通过计算可得

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{a^5\sqrt{t^5}}e^{-x^2/4a^2 t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0.$$

例 2.2.6 试证明下列函数满足 Laplace 方程:

(1) $\ln\sqrt{x^2+y^2}$. (2) $\arctan(y/x)$. (3) $3x^2y - y^3$. (4) $y/(x^2+y^2)$.

(5) $\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}$. (6) $1/(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{(n-2)/2}$ ($n=2,3,\cdots$).

证明 以(6)中 $n=3$ 为例,即 $u=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$.记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{y^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}.$$

从而可得 $\Delta u = -3/r^3 + 3(x^2+y^2+z^2)/r^5 = 0$.

例 2.2.7 试证明下列函数 $u(x,y,z)$满足 $\Delta u = 0$ ($r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

(1) $u(x,y,z)=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}$.　(2) $u=\dfrac{xz}{x^2+y^2}$.　(3) $u=\dfrac{1}{r}\ln\dfrac{r+z}{r-z}$.

证明　(1) 只需注意

$$u''_{xx}=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&y&z\\2&y^2&z^2\end{vmatrix}=2(z-y),\quad u''_{yy}=2(x-z),\quad u''_{zz}=2(y-x).$$

(2)(3) 证略.

例 2.2.8　试证明下列命题：

(1) 设 $u=u(x,y)$ 有连续二阶偏导数,且满足 $\Delta u=0$,则 $v=u\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ 满足 $\Delta v=0$.

(2) 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续三阶偏导数,且满足 $\Delta u=0$,则 $v=xu'_x+yu'_y+zu'_z$ 满足 $\Delta v=0$.

(3) 设 $u(x,y,z),v(x,y,z)$ 有连续三阶偏导数,且满足 $\Delta u=0,\Delta v=0$,则函数

$$w(x,y,z)=u(x,y,z)+(x^2+y^2+z^2)v(x,y,z)$$

满足 $\Delta(\Delta w)=0$.

证明　(1) 令 $\varphi(x,y)=x/(x^2+y^2),\psi(x,y)=y/(x^2+y^2)$,则

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=u''_{11}(\varphi'_x)^2+2u''_{12}\varphi'_x\cdot\psi'_x+u''_{22}(\psi'_x)^2+u'_1\varphi''_{xx}+u'_2\cdot\psi''_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=u''_{11}(\varphi'_y)^2+2u''_{12}\varphi'_y\cdot\psi'_y+u''_{22}(\psi'_y)^2+u'_1\varphi''_{yy}+u'_2\psi''_{yy}.$$

由此可知

$$\begin{aligned}\Delta v=&u''_{11}[(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2]+u''_{22}[(\psi'_x)^2+(\psi'_y)^2]\\&+2u''_{12}(\varphi'_x\psi'_x+\varphi'_y\psi'_y)+u'_1\Delta\varphi+u'_2\Delta\psi,\end{aligned}$$

其中关于 φ,ψ 的偏导有

$$\varphi'_x=(y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2,\quad \varphi'_y=-2xy/(x^2+y^2)^2,$$

$$\varphi''_{xx}=2x(x^2-3y^2)/(x^2+y^2)^3,\quad \varphi''_{yy}=2x(3y^2-x^2)/(x^2+y^2)^3.$$

$$\psi'_x=-2xy/(x^2+y^2)^2,\quad \psi'_y=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2,$$

$$\psi''_{xx}=2y(3x^2-y^2)/(x^2+y^2)^3,\quad \psi''_{yy}=2y(y^2-3x^2)/(x^2+y^2)^3.$$

由此易知 $\varphi'_x\cdot\psi'_x+\varphi'_y\cdot\psi'_y=0,\Delta\varphi=0,\Delta\psi=0$.综上结果以及 $\Delta u=0$,即得 $\Delta v=\Delta u/(x^2+y^2)^2=0$.

(2) 由 $v'_x=u'_x+xu''_{xx}+yu''_{xy}+zu''_{xz}$ 可知

$$v''_{xx}=2u''_{xx}+xu'''_{xxx}+yu'''_{xxy}+zu'''_{xxz}.$$

也还可导出

$$v''_{yy}=2u''_{yy}+xu'''_{yyx}+yu'''_{yyy}+zu'''_{yyz},$$
$$v''_{zz}=2u''_{zz}+xu'''_{zzx}+yu'''_{zzy}+zu'''_{zzz}.$$

从而可得 $\Delta v=2(\Delta u)+x\dfrac{\partial}{\partial x}(\Delta u)+y\dfrac{\partial}{\partial y}(\Delta u)+z\dfrac{\partial}{\partial z}(\Delta u)=0$.

(3) 关于 $w(x,y,z)$的二阶偏导数,易知为

$$w''_{xx}=u''_{xx}+2v+4xv'_x+(x^2+y^2+z^2)v''_{xx},$$
$$w''_{yy}=u''_{yy}+2v+4yv'_y+(x^2+y^2+z^2)v''_{yy},$$
$$w''_{zz}=u''_{zz}+2v+4zv'_z+(x^2+y^2+z^2)v''_{zz}.$$

从而可得 $\Delta w=\Delta u+6v+4(xv'_x+yv'_y+zv'_z)+(x^2+y^2+z^2)\Delta v$.

而根据题又导出 $\Delta w=6v+4(xv'_x+yv'_y+zv'_z)$.由此易算出$\dfrac{\partial^2(\Delta w)}{\partial x^2}$,$\dfrac{\partial^2(\Delta w)}{\partial y^2}$,$\dfrac{\partial^2(\Delta w)}{\partial z^2}$,并将它们相加,我们有

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta w)&=14\cdot\Delta v+4(xv'''_{xxx}+yv'''_{xxy}+zv'''_{xxz}+xv'''_{yyx}\\&\quad+yv'''_{yyy}+zv'''_{yyz}+xv'''_{zzx}+yv'''_{zzy}+zv'''_{zzz})\\&=14\cdot\Delta v+4x\cdot\frac{\partial(\Delta v)}{\partial x}+4y\frac{\partial(\Delta v)}{\partial y}+4z\frac{\partial(\Delta v)}{\partial z}=0.\end{aligned}$$

例 2.2.9 试证明下列命题:

(1) 设 $z=f(x,y)$满足 $\Delta z=0$,$x=\varphi(u,v)$,$y=\psi(u,v)$是二次可微函数.若有

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,\quad \frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial y}{\partial u},\tag{①}$$

则 $z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

(2) 设 $v=f(x,y,z)$是 n 次齐次函数,且 $\Delta v=0$,则 $u=v/r^{2n+1}$ ($r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$)满足 $\Delta u=0$.

(3) 设 $u=u(x,y,z)$,$v=v(x,y,z)$满足 $\Delta u=0$,$\Delta v=0$,则 $\Delta(uv)=2(u'_xv'_x+u'_yv'_y+u'_zv'_z)$.

证明 (1) 据复合函数求导法以及题设,我们有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}.$$

将此两式相加,可知

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right)\frac{\partial z}{\partial x}.\tag{②}$$

在式①中,第一式对 u 求导,第二式对 v 求导,又可得

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial v\partial u},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v};\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}=0.$$

因此推出(注意题设)

$$0\neq\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2.$$

从而由式②立即得到$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

(2) 注意到 $r'_x=x/r$,故知

$$u'_x=v'_x/r^{2n+1}-(2n+1)v\cdot r'_x/r^{2n+2}=v'_x/r^{2n+1}-(2n+1)xv/r^{2n+3},$$

$$\begin{aligned}u''_{xx}=&\,v''_{xx}/r^{2n+1}-2(2n+1)xv'_x/r^{2n+3}-(2n+1)v/r^{2n+3}\\&+(2n+1)(2n+3)v\cdot x^2/r^{2n+5}.\end{aligned}$$

注意到 u 对变量 x,y,z 的对称性,易从 u''_{xx} 的表示中悟得 u''_{yy}, u''_{zz}.从而有

$$\begin{aligned}\Delta u=&\,\frac{\Delta v}{r^{2n+1}}-2(2n+1)\frac{nv}{r^{2n+3}}-3(2n+1)\frac{v}{r^{2n+3}}\\&+(2n+1)(2n+3)\frac{v}{r^{2n+3}}.\qquad(xv'_x+yv'_y+zv'_z=nv)\end{aligned}$$

根据 $\Delta v=0$ 立即导出

$$\Delta u=-\frac{(2n+1)(2n+3)v}{r^{2n+3}}+\frac{(2n+1)(2n+3)v}{r^{2n+3}}=0.$$

(3) 因为我们有$\dfrac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}=v\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial u\partial v}{\partial x\partial x}+u\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$,以及

$$\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}=v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}=v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

所以得到 $\Delta(uv)=v(\Delta u)+2(u'_xv'_x+u'_yv'_y+u'_zv'_z)+u(\Delta v)$.由此以及题设条件即得所证.

例 2.2.10 试证明下列命题:

(1) 设 $u=f(x,y)$有二阶连续偏导数,则在极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$替换下有表示式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

(2) 设 $u=f(x,y,z)$有二阶连续偏导数,则在球坐标 $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$替换下有表示式

$$I=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2,$$

$$J=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

证明 (1)由$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$可知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sin\theta\cdot\cos\theta+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin^2\theta.$$

类似地可得,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2r^2\sin\theta\cdot\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta.$$

由此立即得证.

(2)将球坐标变换视为下列二种变换的合成:

(i) $x=R\cos\varphi,y=R\sin\varphi,z=z$; (ii) $R=r\sin\theta,\varphi=\varphi,z=r\cos\theta$.

则根据(i)可知$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2$.由此得

$$I=\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

又依据(ii)可推出

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2,\quad \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2=\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2.$$

由此即得所证.

为证第二等式,首先由(i)知

$$J=\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

其次依据(ii)可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2},$$

且知$\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}=\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}$,由 $R=r\sin\theta$,即可得证.

例 2.2.11 试证明下列命题:

(1)设 $u=f(x,y,z)$有连续二阶偏导数,则在正交变换

$$\begin{cases} x=a_{11}\xi+a_{12}\eta+a_{13}\zeta+l_1, & \sum_{j=1}^{3}a_{ij}^2=1\quad(i=1,2,3),\\ y=a_{21}\xi+a_{22}\eta+a_{23}\zeta+l_2, & \\ z=a_{31}\xi+a_{32}\eta+a_{33}\zeta+l_3, & \sum_{j=1}^{3}a_{ji}a_{kj}=0\quad(i\neq k)\end{cases}$$

下 Laplace 算符 Δu 形式不变.

(2)设 $z=f(x,y)$有连续二阶偏导数,且有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0.$$

若能将 x 视为变量 y 与 z 的函数,则上述方程形式不变.

证明　(1) 因为 $u'_\xi = u'_x x'_\xi + u'_y y'_\xi + u'_z z'_\xi = \alpha_{11} u'_x + \alpha_{21} u'_y + \alpha_{31} u'_z$，所以

$$u''_{\xi\xi} = \alpha_{11}^2 u''_{x^2} + \alpha_{21}^2 u''_{yy} + \alpha_{31}^2 u''_{zz} + 2\alpha_{11}\alpha_{21} u''_{xy} + 2\alpha_{21}\alpha_{31} u''_{yz} + 2\alpha_{31}\alpha_{11} u''_{zx}.$$

类似地可得

$$u''_{\eta\eta} = \alpha_{12}^2 u''_{xx} + \alpha_{22}^2 u''_{yy} + \alpha_{32}^2 u''_{zz} + 2\alpha_{12}\alpha_{22} u''_{xy} + 2\alpha_{22}\alpha_{32} u''_{yz} + 2\alpha_{32}\alpha_{12} u''_{zx},$$

$$u''_{\zeta\zeta} = \alpha_{13}^2 u''_{xx} + \alpha_{23}^2 u''_{yy} + \alpha_{33}^2 u''_{zz} + 2\alpha_{13}\alpha_{23} u''_{xy} + 2\alpha_{23}\alpha_{33} u''_{yz} + 2\alpha_{33}\alpha_{13} u''_{zx}.$$

从而我们有 $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + u''_{\zeta\zeta} = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$.

(2) 应用一阶微分形式不变性，可知

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial x}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right).$$

比较上式两端 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$ 的系数，我们有

$$1 = \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},\quad 0 = \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial z}{\partial x} = 1\Big/\frac{\partial x}{\partial z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial y}\Big/\frac{\partial x}{\partial z}.$$

从而其二次偏导为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(1\Big/\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)\right)\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(1\Big/\frac{\partial x}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(1\Big/\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)\right)\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial^2 x}{\partial z\partial y}\frac{\partial x}{\partial z}\right)\Big/\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 x}{\partial z\partial y}\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right]\Big/\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^3.$$

因此可得出

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2 = \left[\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z\partial y}\right)\right]\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

由此即知$\dfrac{\partial^2 x}{\partial z^2}\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 x}{\partial z\partial y}\right)^2 = 0$.

例 2.2.12　解答下列问题：

(1) 设 $z = f(x, y)$ 在区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad ①$$

试定 α，β值，使得在变换 $u = z\mathrm{e}^{\alpha x + \beta y}$下，式①中消失一阶偏导数项.

(2) 设 $z = f(x, y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上满足方程

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \qquad ②$$

试定 a值，使得在变换 $u = x - 2y$，$v = x + ay$($a \neq -2$)下，式②化简为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0$.

(3) 设 $u = f(x, y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续二阶偏导数，且满足方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y} = 0 \quad (AC - B^2 < 0, C \neq 0), \qquad ③$$

若在变换 $\xi=x+\lambda_1 y,\eta=x+\lambda_2 y$ 下,式③化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$,则 λ_1,λ_2 是方程 $C\lambda^2+2B\lambda+A=0$ 的相异根.

解　(1)由题设知 $z=ue^{-\alpha x-\beta y}$,故易得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha u\right)e^{-\alpha x-\beta y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\beta u\right)e^{-\alpha x-\beta y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha^2 u\right)e^{-\alpha x-\beta y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\beta^2 u\right)e^{-\alpha x-\beta y}.$$

将它们代入式①,我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(\lambda-2\alpha)\frac{\partial u}{\partial x}+(\lambda+2\beta)\frac{\partial u}{\partial y}+(\alpha^2-\beta^2-\lambda\alpha-\lambda\beta)u=0.$$

由此知当 $\alpha=\lambda/2,\beta=-\lambda/2$ 即可消去一阶偏导数项.

(2)经计算易知

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\left(-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+a\left(-2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

将它们代式②,我们有

$$(6+3a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(4+2a)\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

因为 $6+a-a^2=(3-a)(2+a)$ 必须为0,所以 $a=3$.又此时必须有 $\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}=\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$,方程变为 $(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.这说明最后结论为:$a=3$,混合偏导数相等.

(3)因为我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\lambda_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

所以从原方程可导出

$$0=(A+2B\lambda_1+C\lambda_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+[2A+2B(\lambda_1+\lambda_2)+2C\lambda_1\lambda_2]\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}$$
$$+(A+2B\lambda_2+C\lambda_2^2)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

易知 $2A+2B(\lambda_1+\lambda_2)+2C\lambda_1\lambda_2=-C(\lambda_1-\lambda_2)^2\neq 0$，依题设等价于 $A+2B\lambda_1+C\lambda_1^2=0$，$A+2B\lambda_2+C\lambda_2^2=0$.证毕.

例 2.2.13 解答下列问题：

(1) 设 $u=u(x,y)=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 是二次连续可微函数.若有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$ $(x^2+y^2\neq 0)$，试求 $u(x,y)$.

(2) 假设当一个二次连续可微函数 $v(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0$ 时，就可推知 $v=f(x)+g(y)$.试证明.

(i) 若二次连续可微函数 $u(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，则 $u=f(x-y)+f(x+y)$.

(ii) 若二次连续可微函数 $u=F(x,y,z,t)$ 只是 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 与 t 的函数，且满足 $c^2\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$，则 $u=\varphi(r-ct)/r+\psi(r+ct)/r(r\neq 0)$.

(3) 设 $f(x)$ 二次可导，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.若 $u=f(r)$ 且 $\Delta u=F(r)$.试用 f 的导数表出 F.

解 (1) 记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，易知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\frac{y^2}{r^3},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{y}{r}\right)^2+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\frac{x^2}{r^3}.$$

从而可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=x^2+y^2=r^2\quad(r\neq 0).$$

应用常微分方程理论，从上式可解出

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}=\frac{r^3}{4}+\frac{C_1}{r},\quad u(r)=\frac{r^4}{16}+C_1\ln r+C_2.$$

这说明 $u(x,y)=(x^2+y^2)^2/16+C_1\ln(x^2+y^2)/2+C_2$.

(2) (i) 作变量替换 $s=x-y$，$t=x+y$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

注意到 $\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}=0$.立即可得 $u=f(s)+f(t)=f(x-y)+g(x+y)$.

(ii) 令 $f(r,t)=u\cdot r$，即 $u=f(r,t)/r$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r}-\frac{f}{r^2}\right)\frac{x}{r},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r}-\frac{f}{r^2}\right)\frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\frac{1}{r}-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r^2}-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r^2}+2\frac{f}{r^3}\right)\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r}-\frac{f}{r^2}\right)\frac{y^2+z^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\frac{1}{r}-2\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r^2}+\frac{f}{r^3}\right)\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{1}{r}-\frac{f}{r^2}\right)\frac{z^2+x^2}{r^3}.$$

类似地可导出$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$的公式.从而可知$\Delta u=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\frac{1}{r}$,且依题设得到

$$c^2\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad 为\quad c^2\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

进一步,令 $ct=s$,则导出

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=c\frac{\partial f}{\partial s},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)=c\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}.$$

将此代入前式,我们有$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$.这说明

$$f=\varphi(r-s)+\psi(r+s)=\varphi(r-ct)+\psi(r+ct),$$
$$u=f(r,t)/r=\varphi(r-ct)/r+\psi(r+ct)/r.$$

(3) 经计算易得$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''x^2/r^2+f'/r-f'x^2/r^3$,以及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''\cdot y^2/r^2+f'/r-f'\cdot y^2/r^3,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''\cdot z^2/r^2+f'/r-f'\cdot z^2/r^3.$$

从而我们有

$$\begin{aligned}\Delta u&=f''\cdot(x^2+y^2+z^2)/r^2+3f'/r-(x^2+y^2+z^2)f'/r^3\\&=f''+3f'/r-f'/r=f''+2f'/r=F(r).\end{aligned}$$

例 2.2.14 解答下列问题:

(1) 试求满足 $f(x,0)=x,f(0,y)=y^2$ 的方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 的解 $z=f(x,y)$.

(2) 试证明方程($u(x,y)$有连续二阶偏导数)$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 通过变换 $\xi=x+y,\eta=x-y$ 得解 $u=(x+y)\varphi(x-y)+\psi(x-y)$.

(3) 设 $u=u(r,t)$有连续二阶偏导数,且满足$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$,则 $u=[f(r+t)+g(r-t)]/r$.

(4) $f(x,y)$有连续二阶偏导数.若有

(i) $f(x,y)=f(y,x)$,

(ii) $f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=3f\left(\frac{x+y+z}{3},\frac{x+y+z}{3}\right)$.

试求 $f(x,y)$.

解 (1) 由题设知

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{x^2}{2}+xy+\varphi_0(y),\quad f(x,y)=\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}+\varphi(y)+\psi(x),$$

其中 $\varphi(y)=\int_0^y\varphi_0(t)\mathrm{d}t$. 注意到 $f(x,0)=x$,故 $f(x,0)\equiv\psi(x)=x$.从而知 $f(x,y)=\frac{x^2y}{2}+\frac{xy^2}{2}+\varphi(y)+x$.又注意到 $f(0,y)=y^2$,故有 $f(0,y)\equiv\varphi(y)=y^2$.总之,我们有 $f(x,y)=(x^2y+xy^2)/2+y^2+x$.

(2) 注意到$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$,以及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

则由题设知$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=0$,即$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\varphi(\eta)$,或 $u=\xi\varphi(\eta)+\psi(\eta)$.由此即得所证.

(3) 令 $u=F(r,t)/r$(即 $F(r,t)=r\cdot u(r,t)$),则

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{F_r'}{r}-\frac{F}{r^2},\quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=rF_r''.$$

由此可知 $F_{rr}''=F_{tt}''$.再作变换 $\xi=r+t,\eta=r-t$,则又知

$$F_r'=F_\xi'+F_\eta',\quad F_t'=F_\xi'-F_\eta';$$
$$F_{rr}''=F_{\xi\xi}''+2F_{\xi\eta}''+F_{\eta\eta}'',\quad F_{tt}''=F_{\xi\xi}''-2F_{\xi\eta}''+F_{\eta\eta}''.$$

从而得 $F_{\xi\eta}''=0$.即 $F_\xi'=\varphi(\xi)$.因此我们有

$$F(\xi,\eta)=\int\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi+g(\eta)=f(\xi)+g(\eta)=f(r+t)+g(r-t).$$

(4) 依题设易知$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\equiv C$.从而可得 $f(x,y)=Cxy+g(x)+g(y)$.因此推出 $g''(t)=C$,从而存在 a,b 及 c,使得

$$f(x,y)=a(x^2+Axy+y^2)+b(x+y)+c.$$

例 2.2.15 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续二阶偏导数,且 $f(x,y)\neq0((x,y)\in\mathbf{R}^2)$,则 $f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$之充分必要条件为

$$f(x,y)\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

(2) 设 $f(t)$在 $\mathbf{R}^1$ 上二次可导.若对任一调和函数 $u=u(x,y)$(即 $\Delta u=0$),使得 $F(x,y)=f[u(x,y)]$也调和,则 $f(t)=at+b$.

(3) 设 $u(x,y),v(x,y)$是调和函数.若有 $|u(x,y)+iv(x,y)|=C$(常数),则 $u(x,y),v(x,y)$均为常数.

证明 (1) 必要性显然.下证充分性.由题设可知

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)}\right)=\frac{f''_{xy}(x,y)\cdot f(x,y)-f'_x(x,y)f'_y(x,y)}{f^2(x,y)}=0.$$

(不妨假定 $f(x,y)>0$.)从而得到

$$f'_x(x,y)/f(x,y)=\varphi(x),\quad \int\frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)}\mathrm{d}x=\int\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

由此又有

$$\ln f(x,y)=\int\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y),\quad f(x,y)=\mathrm{e}^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{e}^{\psi(y)}.$$

令 $g(x)=\mathrm{e}^{\int\varphi(x)\mathrm{d}x}$,$h(y)=\mathrm{e}^{\psi(y)}$,即得所证.

(2) 由 $F'_x=f'(u)\cdot u'_x$,$F'_y=f'(u)u'_y$可知

$$F''_{xx}=f'(u)u''_{xx}+f''(u)(u'_x)^2,\quad F''_{yy}=f'(u)u''_{yy}+(u'_y)^2f''(u).$$

从而导出 $F''_{xx}+F''_{yy}=f'(u)[u''_{xx}+u''_{yy}]+f''(u)[(u'_x)^2+(u'_y)^2]$.

现在假定 $u''_{xx}+u''_{yy}=0$,$F''_{xx}+F''_{yy}=0$,则得到 $f''(u)[(u'_x)^2+(u'_y)^2]=0$.

注意到存在调和函数(例如 $u=x+y$),使得$(u'_x)^2+(u'_y)^2\neq0$.从而只有 $f''(u)=0(u\in\mathbf{R}^1)$,即得所证.

(3) 由题设可知 $u^2+v^2=$常数,故可得

$$u\cdot u'_x+vv'_x=0,\quad u\cdot u'_y+vv'_y=0,$$

$$u\cdot u''_{xx}+(u'_x)^2+vv''_{xx}+(v'_x)^2=0,\quad uu''_{yy}+(u'_y)^2+vv''_{yy}+(v'_y)^2=0.$$

从而我们有(相加)

$$u(u''_{xx}+u''_{yy})+v(v''_{xx}+v''_{yy})+(u'_x)^2+(v'_x)^2+(u'_y)^2+(v'_y)^2=0.$$

注意到(条件)$u''_{xx}+u''_{yy}=0=v''_{xx}+v''_{yy}$,上式成为

$$(u'_x)^2+(v'_x)^2+(u'_y)^2+(v'_y)^2=0.$$

这说明 $u'_x=0=u'_y=v'_x=v'_y$.由此即可得证.

例 2.2.16 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x,y)$在原点的邻域 $U_0(\delta)$上存在一阶偏导数.若 $f'_x(x,y)$,$f'_y(x,y)$在(0,0)处可微,则 $f''_{xy}(0,0)=f''_{yx}(0,0)$.

(2) 设 f'_x,f'_y,f''_{yx}在点(x_0,y_0)的一个邻域内存在.若 $f''_{yx}(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续,则存在 $f''_{xy}(x_0,y_0)$,且有 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

(3) 设 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)的一个邻域存在 f''_{xy},f''_{yx}.若 f''_{xy}在点(x_0,y_0)处对 x 连续,f''_{yx}对 y 在点(x_0,y_0)处连续,则 $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

证明 (1) 取 $h\neq0$,使得由顶点(0,0),$(h,0)$,(h,h),$(0,h)$组成的正方形含于 $U_0(\delta)$,并考察改变量

$$\Delta(h)=f(h,h)-f(h,0)-f(0,h)+f(0,0).$$

只需指出存在极限$\lim\limits_{h\to0}\Delta(h)/h$且等于 $f''_{xy}(0,0)$,$f''_{yx}(0,0)$.

为此,作 $F(x)=f(x,h)-f(x,0)$,则 $\Delta(h)=F(h)-F(0)$.根据中值定理可

知,存在位于 0 与 h 之间的 ξ,使得

$$F(h)-F(0)=F'(\xi)h=h\{f_x'(\xi,h)-f_x'(\xi,0)\}.$$

因为 $f_x'(x,y)$在点(0,0)处可微,所以有 Taylor 展式

$$f_x'(\xi,h)=f_x'(0,0)+f_{xx}''(0,0)\xi+f_{xy}''(0,0)h+(\xi^2+h^2)^{1/2}\alpha(h),$$

$$f_x'(\xi,0)=f_x'(0,0)+f_{xx}''(0,0)\xi+\xi\cdot\beta(h),$$

其中当 $h\to0$ 时,有 $\alpha(h)\to0$,$\beta(h)\to0$.将上式代入 $\Delta(h)$,导出

$$\Delta(h)=f_{yx}''(0,0)h^2+\gamma(h),\quad \gamma(h)=h(\xi^2+h^2)^{1/2}\alpha(h)+h|\xi|\beta(h).$$

因为 $|\xi|\leqslant|h|$,所以 $0\leqslant|\gamma(h)|\leqslant\sqrt{2}h^2|\alpha(h)|+h^2|\beta(h)|$.由此即知

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta(h)}{h^2}=f_{yx}''(0,0).$$

类似地,以 $G(y)=f(h,y)-f(0,y)$代 $F(x)$,也能推出

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta(h)}{h^2}=f_{xy}''(0,0).$$

(2) 我们考察二阶偏导数的定义:

$$\begin{aligned}f_{xy}''(x_0,y_0)&=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f_x'(x_0,y_0+\Delta y)-f_x'(x_0,y_0)}{\Delta y}\\&=\lim_{\Delta y\to0}\frac{1}{\Delta y}\left\{\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)}{\Delta x}\right.\\&\qquad\left.-\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\right\}=\lim_{\Delta y\to0}\lim_{\Delta x\to0}\frac{S}{\Delta x\Delta y},\end{aligned}$$

$$S=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0).$$

注意到 $f(x,y)$在邻域中对 x 可导,故当 Δy 充分小时,存在极限 $\lim\limits_{\Delta x\to0}S/\Delta x$.

现在令 $g(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$,则可写出

$$\begin{aligned}\frac{S}{\Delta x\Delta y}&=[g(y_0+\Delta y)-g(y_0)]/\Delta x\Delta y=g_y'(y_0+\theta\Delta y)/\Delta x\\&=\frac{1}{\Delta x}[f_y'(x_0+\Delta x,y_0+\theta\Delta y)-f_y'(x_0,y_0+\theta\Delta y)]\\&=f_{yx}''(x_0+\theta_2\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\quad(0<\theta,\theta_2<1).\end{aligned}$$

再注意到 f_{yx}'' 在点(x_0,y_0)处连续,立即导得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{S}{\Delta x\Delta y}=f_{yx}''(x_0,y_0).$$

这说明重极限$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{S}{\Delta x\Delta y}$存在且等于累次极限 $f_{yx}''(x_0,y_0)$,故结论为真.

(3) 考察在点(x_0,y_0)的邻域内的函数差 $\varphi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$,则 $\varphi'(y)=f_y'(x_0+\Delta x,y)-f_y'(x_0,y)$.我们有

$$\begin{aligned}
&\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)=\varphi'(y_0+\theta_1\Delta y)\Delta y\\
&=[f'_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta_1\Delta y)-f'_y(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)]\Delta y\\
&=[f''_{yx}(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)\Delta x+o(\Delta x)]\Delta y\\
&=f''_{yx}(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)\Delta x\Delta y+o(\Delta x)\Delta y\quad(0<\theta_1<1,\Delta x\to 0).
\end{aligned}\qquad ①$$

再考察 $\psi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$,又有

$$\begin{aligned}
&\psi(x_0+\Delta x)-\psi(x_0)=\psi'(x_0+\theta_2\Delta x)\Delta x\\
&=[f'_x(x_0+\theta_2\Delta x,y_0+\Delta y)-f'_x(x_0+\theta_2\Delta x,y_0)]\Delta x\\
&=[f''_{xy}(x_0+\theta_2\Delta x,y_0)\Delta y+o(\Delta y)]\Delta x\\
&=f''_{xy}(x_0+\theta_2\Delta x,y_0)\Delta x\Delta y+o(\Delta y)\Delta x\quad(0<\theta_2<1,\Delta y\to 0).
\end{aligned}\qquad ②$$

因为成立等式

$$\begin{aligned}
\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\\
&\quad-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0),\\
\psi(x_0+\Delta x)-\psi(x_0)&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)\\
&\quad-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0),
\end{aligned}$$

所以根据①,②可知($\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$)

$$\begin{aligned}
&f''_{yx}(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)\Delta x\cdot\Delta y+o(\Delta x)\Delta y\\
&=f''_{xy}(x_0+\theta_2\Delta x,y_0)\Delta x\cdot\Delta y+o(\Delta y)\Delta x.
\end{aligned}$$

注意到 $o(\Delta x)\Delta y/\Delta x\Delta y\to 0$,$o(\Delta y)\Delta x/\Delta x\Delta y\to 0$($\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$),以及 $f''_{yx}(x,y)$ 在点(x_0,y_0)处对 y 连续,$f''_{xy}(x,y)$在点(x_0,y_0)处对 x 连续,故当 $\Delta x,\Delta y\to 0$ 时,由上式导出 $f''_{yx}(x_0,y_0)=f''_{xy}(x_0,y_0)$.

例 2.2.17 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x,y,z)$有连续二阶偏导数,且是 n 次齐次函数,则

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z)=n(n-1)f(x,y,z).$$

(2) 设 $v=v(x,y,z)$是 n 次齐次函数.若 $\Delta v=0$,则 $u=v/r^{2n+1}$ ($r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$)也是调和函数,即 $\Delta u=0$.

(3) 设 $f(x,y,z)$有连续二阶偏导数,且是 n 次齐次函数,则

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & f'_x\\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} & f'_y\\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} & f'_z\\ f'_x & f'_y & f'_z & 0\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz}\\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz}\\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz}\end{vmatrix}=-\frac{n}{n-1}f.$$

(4) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续二阶偏导数,且 $f(x,y)\neq 0$,以及

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=0\quad((x,y)\in\mathbf{R}^2).$$

若 $f(x,y)$是 k 次齐次函数,则 $k\in\mathbf{N}$.

(5) 设 $P_n=P_n(x,y,z)$是 n 次齐次多项式,则

$$\mathrm{d}^n P_n(x,y,z)=n!\cdot P_n(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z).$$

证明　(1) 依题设知

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=nf(x,y,z). \qquad ①$$

以 tx_0,ty_0,tz_0 代 x,y,z,并对 t 求导可得

$$\begin{aligned}&x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z+tx_0^2f''_{xx}+ty_0^2f''_{yy}+tz_0^2f''_{zz}\\&\quad+t(2x_0y_0f''_{xy}+2x_0z_0f''_{xz}+2y_0z_0f''_{yz})=n(x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z).\end{aligned}$$

令 $t=1$,则可推出

$$\begin{aligned}&x_0^2f''_{xx}+y_0^2f''_{yy}+z_0^2f''_{zz}+2(x_0y_0f''_{xy}+x_0z_0f''_{xz}+y_0z_0f''_{yz})\\&=(n-1)(x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z).\end{aligned} \qquad ②$$

综合①,②,我们有

$$\left(x_0\frac{\partial}{\partial x}+y_0\frac{\partial}{\partial y}+z_0\frac{\partial}{\partial z}\right)^2f(x_0,y_0,z_0)=n(n-1)f(x_0,y_0,z_0).$$

由此即得所证($(x_0,y_0,z_0)\in\mathbf{R}^3$ 是任意的).

(2) 计算偏导数,易知

$$u'_x=v'_x/r^{2n+1}-(2n+1)vr'_x/r^{2n+2}=v'_x/r^{2n+1}-(2n+1)xv/r^{2n+3},$$

$$\begin{aligned}u''_{xx}&=\frac{v''_{xx}}{r^{2n+1}}-(2n+1)\frac{v'_xr'_x}{r^{2n+2}}-(2n+1)\left[\frac{v+xv'_x}{r^{2n+3}}-(2n+3)\frac{xvr'_x}{r^{2n+4}}\right]\\&=\frac{v''_{xx}}{r^{2n+1}}-2(2n+1)\frac{xv'_x}{r^{2n+3}}-\frac{(2n+1)v}{r^{2n+3}}+(2n+1)(2n+3)\frac{vx^2}{r^{2n+5}}.\end{aligned}$$

利用变量 x,y,z 的对称性,立即可写出 u''_{yy},u''_{zz},经计算可得

$$\Delta u=\frac{\Delta v}{r^{2n+1}}-2(2n+1)\frac{nv}{r^{2n+3}}-\frac{3(2n+1)v}{r^{2n+3}}+\frac{(2n+1)(2n+3)v}{r^{2n+3}}.$$

注意到 $\Delta v=0$,立即导出

$$\Delta u=-\frac{(2n+1)(2n+3)v}{r^{2n+3}}+\frac{(2n+1)(2n+3)v}{r^{2n+3}}=0.$$

(3) 由题设知,$xf'_x+yf'_y+zf'_z=nf$,以及偏导数是$(n-1)$次齐次,又知

$$\begin{aligned}xf''_{xx}+yf''_{xy}+zf''_{xz}&=(n-1)f'_x,\\xf''_{yx}+yf''_{yy}+zf''_{yz}&=(n-1)f'_y,\\xf''_{zx}+yf''_{zy}+zf''_{zz}&=(n-1)f'_z,\end{aligned}$$

从以上四式中消去 x,y,z,我们有

$$\begin{vmatrix}f''_{xx}&f''_{xy}&f''_{xz}&(n-1)f'_x\\f''_{yx}&f''_{yy}&f''_{yz}&(n-1)f'_y\\f''_{zx}&f''_{zy}&f''_{zz}&(n-1)f'_z\\f'_x&f'_y&f'_z&nf\end{vmatrix}=0.$$

将此行列式改写为

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & (n-1)f'_x+0 \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} & (n-1)f'_y+0 \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} & (n-1)f'_z+0 \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0+nf \end{vmatrix}=0.$$

由此就可导出

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & (n-1)f'_x \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} & (n-1)f'_y \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} & (n-1)f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & 0 \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} & 0 \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} & 0 \\ f'_x & f'_y & f'_z & nf \end{vmatrix},$$

从而我们有

$$(n-1)\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} & f'_x \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} & f'_y \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} & f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix}=-nf\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix}.$$

即得所证.

(4) 采用极坐标 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta(0\leqslant r<\infty, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$,依题设 $f(x,y)=r^kf(\cos\theta,\sin\theta)=r^kg(\theta)$.注意到 Laplace 算符 Δ 在极坐标下有表示

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2},$$

故可得

$$\begin{aligned}0=\Delta(r^kg(\theta))&=k(k-1)r^{k-2}g(\theta)+kr^{k-2}g(\theta)+r^{k-2}g''(\theta)\\&=r^{k-2}[k^2g(\theta)+g''(\theta)].\end{aligned}$$

这说明 $g(\theta)$是常微分方程 $g''(\theta)+k^2g(\theta)=0$ 的一个解,注意到此方程的一般解为 $g(\theta)=a\cos k\theta+b\sin k\theta$,且 $g(\theta)$必须以 2π 为周期,故 k 必须是整数.

(5) 在式 $P_n(tx,ty,tz)=t^nP_n(x,y,z)$中对 t 求 n 次导数,可知

$$P_n^{(n)}(tx,ty,tz)=n!P_n(x,y,z). \qquad ③$$

另一方面,令 $F(t)=P_n(tx,ty,tz)$.我们有

$$F'(t)=\frac{\partial P_n}{\partial x}x+\frac{\partial P_n}{\partial y}y+\frac{\partial P_n}{\partial z}z=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)P_n,$$

$$\begin{aligned}F''(t)&=x^2\frac{\partial^2P_n}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2P_n}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2P_n}{\partial z^2}+2\frac{\partial P_n}{\partial x\partial y}xy+2\frac{\partial P_n}{\partial x\partial z}xz+2\frac{\partial P_n}{\partial y\partial z}yz\\&=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2P_n,\end{aligned}$$

且根据归纳法,不难导出

$$F^{(n)}(t)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n P_n(tx,ty,tz).$$

因为 P_n 是 n 次齐次多项式,所以其 n 阶偏导数是常数,与 t 无关.这说明

$$F^{(n)}(t)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n P_n(x,y,z). \qquad ④$$

比较式③与④,且以 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 代 x,y,z,即可得证.

例 2.2.18　解答下列问题:

(1) 试求复合函数 $u=f(\xi,\eta)$;$\xi=xy$,$\eta=x/y$ 的一、二阶微分.

(2) 设 $f(x,y)$在区域 D 上连续可微.若存在 $g(x,y)$,使得

$$\mathrm{d}g(x,y)=f(x,y)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y),$$

则 $x\dfrac{\partial f}{\partial x}=y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

解　(1) 由 $\mathrm{d}u=f_1'\cdot(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+f_2'\cdot(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)/y^2$ 可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u=&f_{11}''\cdot(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)^2+2f_{12}''(y^2\mathrm{d}x^2-x^2\mathrm{d}y^2)/y^2\\&+f_{22}''\cdot(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2/y^2+2f_1'\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2f_2'\cdot(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\mathrm{d}y/y^3.\end{aligned}$$

(2) 依题设知$\dfrac{\partial g}{\partial x}=yf$,$\dfrac{\partial g}{\partial y}=xf$.由 f 之可微性又知

$$\frac{\partial g}{\partial y\partial x}=f+yf_y',\quad \frac{\partial g}{\partial x\partial y}=f+xf_x'(x,y).$$

注意到 f,f_x',f_y'皆连续函数,故上两式相等.从而有 $yf_y'=xf_x'$.

2.3　隐函数的求导法(以二、三元函数为例)

在这里,先介绍隐函数的求导方法,至于隐函数的存在性与可导性将在第 3 章中介绍.下面总假定函数 f 在区域 D 上具有连续偏导数.

(1) 设$(x_0,y_0)\in D$,$f(x,y)=0$ 在 D 上确定了 y 是 x 的函数 $y=\varphi(x)$,$y_0=\varphi(x_0)$,若有 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$,则在适当区间 $I_\delta=[x_0-\delta,x_0+\delta]$上 $f(x,\varphi(x))=0$,且$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-f_x'/f_y'$.

(2) 设 $f(x,y,z)=0$ 确定了 z 是 x,y 的函数,且 $f_z'\neq 0$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-f_x'/f_z',\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-f_y'/f_z'.$$

(3) 设由方程组 $f(x,y,z)=0$,$g(x,y,z)=0$ 确定 $y=\varphi(x)$,$z=\psi(x)$,且 $J=\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\neq 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\begin{vmatrix}f_x'&f_z'\\g_x'&g_z'\end{vmatrix}\Big/J,\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\begin{vmatrix}f_y'&f_x'\\g_y'&g_x'\end{vmatrix}\Big/J.$$

(4) 设由方程组 $f(x,y,u,v)=0$,$g(x,y,u,v)=0$ 确定了 $u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$且 $J=\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\neq 0$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\begin{vmatrix} f'_x & f'_v \\ g'_x & g'_v \end{vmatrix}\bigg/ J,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\begin{vmatrix} f'_y & f'_v \\ g'_y & g'_v \end{vmatrix}\bigg/ J,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\begin{vmatrix} f'_u & f'_x \\ g'_u & g'_x \end{vmatrix}\bigg/ J,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\begin{vmatrix} f'_u & f'_y \\ g'_u & g'_y \end{vmatrix}\bigg/ J.$$

(5) 设由方程组 $f(x,y,z,u,v,w)=0$, $g(x,y,z,u,v,w)=0$, $h(x,y,z,u,v,w)=0$,确定了 $u=u(x,y,z)$, $v=v(x,y,z)$, $w=w(x,y,z)$,且 $J=\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}\neq 0$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\begin{vmatrix} f'_x & f'_v & f'_w \\ g'_x & g'_v & g'_w \\ h'_x & h'_v & h'_w \end{vmatrix}\Bigg/ J.$$

其余类推.

例 2.3.1 解答下列问题:

(1) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=a^3$ 所确定,试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ $(z^2\neq xy)$.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^x=y^z$ 所确定,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

(3) 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\tan(z/\sqrt{x^2-y^2})$ 所确定,试求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 (1) 在原式两端对 x 求导,可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{yz}{z^2-xy}$.从而知

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=(z^2-xy)\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)-yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}-x\right)\bigg/(z^2-xy)^2\\ &=z(z^4-2z^2xy-x^2y^2)/(z^2-xy)^3.\end{aligned}$$

(2) 对原式取对数,得 $x\ln z=z\ln y$.在两端对 x 求导,我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=-\frac{1}{x^2}\frac{z\ln z}{\ln z-1}+\frac{1}{x}\frac{(\ln z+1)(\ln z-1)-(z\ln z)/z}{(\ln z-1)^2}\\ &=z\ln z(\ln z-2)/x^z(\ln z-1)^2.\end{aligned}$$

(3) 在原式两端对 x 求导,可解出(记 $u=\sqrt{x^2-y^2}$)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{x}{u}\tan\dfrac{z}{u}+u\cos^{-2}\dfrac{z}{u}\cdot\dfrac{xz}{u^3}}{1-u\cos^{-2}\dfrac{z}{u}\cdot\dfrac{1}{u}}.$$

由题设知 $\tan\dfrac{z}{u}=\dfrac{z}{u}$, $\cos^{-2}\dfrac{z}{u}=\dfrac{z^2}{u^2}+1$,代入前式,我们有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-\dfrac{x}{u}\dfrac{z}{u}+\dfrac{xz}{u^2}\left(\dfrac{z^2}{u^2}+1\right)}{-z^2/u^2}=\frac{xz}{x^2-y^2}\quad (x^2\neq y^2).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(x^2-y^2)x\dfrac{\partial z}{\partial y}-xz(-2y)}{(x^2-y^2)^2}=\frac{(x^2-y^2)x(-yz)/(x^2-y^2)+2xyz}{(x^2-y^2)^2}$$
$$=xyz/(x^2-y^2)^2\quad(x^2\neq y^2).$$

例 2.3.2 解答下列问题:

(1) 设 $x^2-xy+2y^2+x-y-1=0$,试求 $x=0,y=1$ 时 y',y'',y'''.

(2) 设 $(x^2+y^2)^2=3x^2y-y^3$,试求 $x=0,y=0$ 时的 y'.

解 (1) 在原式两端对 x 求导三次,可得

$$2x-y-xy'+4yy'+1-y'=0,$$
$$2-2y'-xy''+4y'^2+4yy''-y''=0,$$
$$-3y''+xy'''+12y'y''+4yy'''-y'''=0.$$

以 $x=0,y=1$ 代入,可知

$$3y'=0,\quad 2+3y''=0,\quad 2+3y'''=0.$$

由此导得 $y'=0,y''=-2/3,y'''=-2/3$.

(2) 令 $y=tx$,则由原式可解出

$$x=(3t-t^3)/(1+t^2)^2,\quad y=(3t^2-t^4)/(1+t^2)^2.$$

从而可知在 $t=0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$时有 $x=0,y=0$.因为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(1+t^2)(6t-4t^3)-4t(3t^2-t^4)}{(1+t^2)(3-3t^2)-4t(3t-t^3)},$$

所以在 $t=0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$时得出 $y'=0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$.

例 2.3.3 解答下列问题:

(1) 设 f 可微,$z=z(x,y)$由 $f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$ 确定,试求 z'_x.

(2) 设 $f(u)$可微,且方程 $y=f(x^2+y^2)+f(x+y)$确定隐函数 $y=g(x)$.若 $g(0)=2,f'(2)=1/2,f'(4)=1$,试求 $g'(0)$.

(3) 设 $z=z(x,y)$由方程 $z=x+y\varphi(z)$确定,$u=f(z)$,其中 $\varphi(z),f(z)$任意次可导,试证明

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left\{\varphi^n(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right\},\quad n\in\mathbf{N}.$$

解 (1) 在原式两端对 x 求导,我们有

$$f'_1\cdot(1+z'_x)+f'_2\cdot(2x+2zz'_x)=0,\quad z'_x=-\frac{f'_1+2xf'_2}{f'_1+2zf'_2}.$$

(2) 记 $\varphi(x,y)=f(x^2+y^2),\psi(x,y)=f(x+y)$,则

$$y'=g'(x)=\varphi'_x\cdot(2x+2yy')+\psi'_x\cdot(1+y')$$
$$=2x\varphi'_x+2y\varphi'_xy'+\psi'_x+\psi'_x\cdot y'.$$

由此知 $y'=g'(x)=(2x\varphi'_x+\psi'_x)/(1-2y\varphi'_x-\psi'_x)$,从而得

$$g'(0)=\frac{f'[0+g(0)]}{1-2g(0)f'[0+g^2(0)]-f'[0+g(0)]}$$
$$=\frac{f'(2)}{1-2\cdot 2\cdot f'(4)-f'(2)}=-\frac{1}{7}.$$

(3) 应用归纳法.首先对 $z=x+y\varphi(z)$求导,可知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1\bigg/\left(1-y\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(z)\bigg/\left(1-y\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial \varphi}{\partial z}\neq 1\right).\qquad ①$$

由此以及 $u=f(z)$,则求导又可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\varphi(z)\bigg/\left(1-y\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\bigg/\left(1-y\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\right).$$

这说明$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}$,即 $n=1$ 时式①为真.其次假定式①对 $n=k>1$ 时为真,即$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]$,则对 $n=k+1$,有

$$\frac{\partial^{k+1}u}{\partial y^{k+1}}=\frac{\partial^k}{\partial x^{k-1}\partial y}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right].\qquad ②$$

注意到$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}$以及式①,可导出

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi^k(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]&=k\varphi^{k-1}(z)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi^k(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\&=k\varphi^{k-1}(z)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi^k(z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=k\varphi^k(z)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi^k(z)\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\\&=k\varphi^k(z)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi^k(z)\left[\varphi(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right]\\&=\left[(k+1)\varphi^k(z)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+\varphi^{k+1}(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi^{k+1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].\end{aligned}$$

由此以及式②,即得

$$\frac{\partial^{k+1}u}{\partial y^{k+1}}=\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left[\varphi^{k+1}(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

例 2.3.4 解答下列问题:

(1) 设 $z=z(x,y)$由方程 $x/z=\ln(z/y)+1$ 所确定,试求 $\mathrm{d}^2 z$.

(2) 设 $F(u,v)$二次可微.$z=z(x,y)$由方程 $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$ 确定,试求 $\mathrm{d}^2 z$.

解　(1) 对原式求一阶微分,可得

$$\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}=\frac{y}{z}\,\frac{y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y}{y^2},$$

$$yz\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}z-yz\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}y=0.$$

再微分,我们有 $y(x+z)\mathrm{d}^2z=z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(z\mathrm{d}y-x\mathrm{d}y)\mathrm{d}z-y\mathrm{d}z^2$,即

$$\mathrm{d}^2z=-z^2(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2/y^2(x+z)^3\quad(x\neq -z).$$

(2) 由题设易知

$$F_1'\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}+F_2'\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}=0. \tag{①}$$

以 z^2 乘两端,并再求微分,我们有

$$F_{11}''\frac{(z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z)^2}{z^2}+2F_{12}''\frac{(z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z)(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)}{z^2}$$

$$+F_{22}''\frac{(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)^2}{z^2}-(xF_1'+yF_2')\mathrm{d}^2z=0.$$

从式①解出 $\mathrm{d}z=z(F_1'\mathrm{d}x+F_2'\mathrm{d}y)/(xF_1'+yF_2')$,并得

$$z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z=zF_2'(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)/(xF_1'+yF_2'),$$

$$z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z=-zF_1'(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)/(xF_1'+yF_2').$$

从而可导出

$$\mathrm{d}^2z=(xF_1'+yF_2')^{-3}[(F_2')^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+(F_1')^2F_{22}''](y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2.$$

例 2.3.5　试证明下列命题:

(1) 设 $u=u(x,y,z)$由 $F(u^2-x^2,u^2-y^2,u^2-z^2)=0$ 确定,其中 F 可微,则

$$x^{-1}u_x'+y^{-1}u_y'+z^{-1}u_z'=u^{-1}.$$

(2) 设 $u=u(x,y,z)$由$\dfrac{x^2}{a^2+u}+\dfrac{y^2}{b^2+u}+\dfrac{z^2}{c^2+u}=1$ 确定,则

$$(u_x')^2+(u_y')^2+(u_z')^2=2(xu_x'+yu_y'+zu_z').$$

(3) 设 $z=f(u)$,且 $u=u(x,y)$是由方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x\psi(t)\mathrm{d}t$ 确定,其中 $f(u)$,$\varphi(u)$均可导,且 $\psi(t)$与 $\varphi'(u)$均连续,$\varphi'(u)\neq 1$,则 $\psi(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\psi(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

证明　(1) 记 $X=u^2-x^2$,$Y=u^2-y^2$,$Z=u^2-z^2$.在方程两端对 x 求导,可知

$$F_X'\cdot X_x'+F_Y'Y_x'+F_Z'Z_x'=0,$$

$$F_X'(2uu_x'-2x)+F_Y'\cdot 2uu_x'+F_Z'\cdot 2uu_x'=0.$$

由此可推 $uu_x'(F_X'+F_Y'+F_Z')=xF_X'$,或写成

$$x^{-1}u_x'\cdot(F_X'+F_Y'+F_Z')=u^{-1}F_X'.$$

类似地可得

$$y^{-1}u_y'(F_X'+F_Y'+F_Z')=u^{-1}F_Y',\quad z^{-1}u_z'\cdot(F_X'+F_Y'+F_Z')=u^{-1}F_Z'.$$

从而将上述三式相加,即得所证.

(2) 在原式两端对 x,y,z 分别求导,可得

$$\frac{2x}{a^2+u}-Au'_x=0,\quad A=\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}.$$

$$\frac{2y}{b^2+u}-Au'_y=0,\quad \frac{2z}{c^2+u}-Au'_z=0.$$

由此可知 $(u'_x)^2+(u'_y)^2+(u'_z)^2=4/A$, $xu'_x+yu'_y+zu'_z=2/A$.即得所证.

(3) 由原表达式两端求导,可知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+\psi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-\psi(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\psi(x)}{1-\varphi'(u)},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\psi(y)}{1-\varphi'(u)}.$$

注意到 z 通过 u 变成 x,y 的函数,故可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

从而我们有

$$\begin{aligned}\psi(y)\frac{\partial z}{\partial x}+\psi(x)\frac{\partial z}{\partial y}&=\psi(y)f'(u)\frac{\psi(x)}{1-\varphi'(u)}+\psi(x)f'(u)\frac{-\psi(y)}{1-\varphi'(u)}\\&=f'(u)[\psi(y)\psi(x)-\psi(x)\psi(y)]/(1-\varphi'(u))=0.\end{aligned}$$

例 2.3.6 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x,y,z)$ 可微.若在方程 $f(x,y,z)=0$ 中,其中任一变量均可视为其余二个变量的函数,并用 $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)_z$ 表示固定 z 时 x 对 y 求导,则

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)_z\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)_x\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)_y=-1.$$

(2) 设 $F(u,v)$ 可微,则在 $F'_v\neq 0$ 处由方程 $F(xy,z-2x)=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 满足 $xz'_x-yz'_y=2x$.

(3) 设 $f(x,y,z)$ 是 n 次齐次的可微函数.若方程 $f(x,y,z)=0$ 隐含函数 $z=\varphi(x,y)$(即 $f'_z\neq 0$,见隐函数存在定理),则 $\varphi(x,y)$ 是一次齐次函数.

证明 (1) 对原方程求微分得 $f'_x\mathrm{d}x+f'_y\mathrm{d}y+f'_z\mathrm{d}z=0$.若视 z 为常数,则 $\mathrm{d}z=0$.从而知 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-f'_y/f'_x$.类似地可知 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)_x=-f'_z/f'_y$, $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)_y=-f'_x/f'_z$.由此相乘即可得证.

(2) 在原方程两端对 x,y 各求导,可得

$$F'_u\cdot y+F'_v(z'_x-2)=0,\quad F'_u\cdot x+F'_v z'_y=0.$$

由此导出 $(xz'_x-yz'_y-2x)F'_v=0$,从而可知 $xz'_x-yz'_y-2x=0$.

(3) 只需指出 $x\varphi_x'+y\varphi_y'=\varphi$.为此,在 $f(x,y,z)=0$ 两端对 x,y 各求导可得

$$f_x'+f_z'z_x'=0,\quad f_y'+f_z'\cdot z_y'=0.$$

以 x,y 各乘一式并相加,有 $xf_x'+yf_y'+f_z'\cdot(xz_x'+yz_y')=0$.注意到 $xf_x'+yf_y'+zf_z'=nf=0$,故导出

$$-zf_z'+f_z'\cdot(xz_x'+yz_y')=0\quad 即\quad f_z'\cdot(xz_x'+yz_y'-z)=0.$$

因此由题设推得 $xz_x'+yz_y'=z$.

例 2.3.7 解答下列问题:

(1) 设 $u(x,y)$是由方程组 $u=yz+zx+xy$, $x^2+y^2+z^2=1$ 所确定,试求 u_{xy}''.

(2) 设 $y(x)$, $z(x)$是由方程组 $lx+my+nz=p$, $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所确定,试求 y'', z''.

(3) 设 $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$是由方程组

$$u+v+w=x,\quad uv+vw+wu=y,\quad uvw=z$$

所确定,试求 u,v,w 的一阶偏导数.

证明 (1) 依第二式所确定的 $z(x,y)$对 x 及 y 之导数为 $z_x'=-x/z$, $z_y'=-y/z$.而在第一式对 x 求导可知

$$u_x'=yz_x'+z_x'\cdot x+z+y=y+z-x(x+y)/z,$$

因此再对 y 求导,我们有

$$u_{xy}''=1+z_y'-x/z+x(x+y)z_y'/z^2=1-(x+y)z-xy(x+y)/z^3.$$

(2) 在原方程组两端对 x 求导,可得

$$l+my'+nz'=0,\quad x+yy'+zz'=0, \tag{①}$$

且从中可解出 $y'=(lz-nx)/(ny-mz)$, $z'=(mx-ly)/(ny-mz)$.在①的两式中再各对 x 求导,又得

$$my''+nz''=0,\quad 1+(y')^2+yy''+(z')^2+zz''=0.$$

用 y', z'的表示式代入上式,并解出 y'', z'',我们有

$$y''=-\frac{n[(ny-mz)^2+(lz-nx)^2+(mx-ly)^2]}{(ny-mz)^2},$$

$$z''=\frac{m[(ny-mz)^2+(lz-nx)^2+(mx-ly)^2]}{(ny-mz)^2}.$$

(3) 对原三式两端作微分,可得

$$\begin{cases} du+dv+dw=dx, \\ (v-w)du+(w+u)dv+(u+v)dw=dy, \\ vwdu+wudv+uwdw=dz. \end{cases}$$

由此解出

$$\mathrm{d}u=\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & 1 & 1\\ \mathrm{d}y & w+u & u+v\\ \mathrm{d}z & wu & uv\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ v+w & w+u & u+v\\ vw & wu & uv\end{vmatrix}$$
$$=(u^2\mathrm{d}x-u\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)/(u-v)(u-w).$$

类似地可得

$$\mathrm{d}v=\frac{v^2\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{(v-u)(v-w)},\quad \mathrm{d}w=\frac{w^2\mathrm{d}x-w\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{(w-u)(w-v)}.$$

由此即知(对 $\mathrm{d}u$ 等式中令 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}z=0,\cdots$)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u^2}{(u-v)(u-w)},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-u}{(u-v)(u-w)},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{(u-v)(u-w)}.$$

类似地可导出其它偏导数.

例 2.3.8 解答下列问题:

(1) 设 $f(u,v,w),g(u,v,w),h(u,v,w)$是可微函数,$u=u(x,y,z)$由方程组

$$x=f(u,v,w),\quad y=g(u,v,w,)\quad z=h(u,v,w)$$

所确定,试求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$.

(2) 设 $f(x,y,z,t),g(y,z,t),h(z,t)$是可微函数,$u(x,y)$是由方程组

$$u=f(x,y,z,t),\quad g(y,z,t)=0,\quad h(z,t)=0$$

所确定.若$\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq 0$,试求$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 (1) 微分原方程组,可得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=f'_u\mathrm{d}u+f'_v\mathrm{d}v+f'_w\mathrm{d}w,\\ \mathrm{d}y=g'_u\mathrm{d}u+g'_v\mathrm{d}v+g'_w\mathrm{d}w,\\ \mathrm{d}z=h'_u\mathrm{d}u+h'_v\mathrm{d}v+h'_w\mathrm{d}w.\end{cases}$$

由此又导出

$$\mathrm{d}u=\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & f'_v & f'_w\\ \mathrm{d}y & g'_v & g'_w\\ \mathrm{d}z & h'_v & h'_w\end{vmatrix}\Bigg/\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}$$
$$=\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)}\mathrm{d}x+\frac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)}\mathrm{d}y+\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}\mathrm{d}z\right)\Bigg/\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)}.$$

从而我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{I_1}{I},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{I_2}{I},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{I_3}{I},$$

$$I=\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(u,v,w)},\quad I_1=\frac{\partial(g,h)}{\partial(v,w)},\quad I_2=\frac{\partial(h,f)}{\partial(v,w)},\quad I_3=\frac{\partial(f,g)}{\partial(v,w)}.$$

(2) 因为$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_y'+f_z'z_y'+f_t't_y'$,以及

$$\begin{cases} g_y'+g_z'z_y'+g_t't_y'=0, \\ h_z'\cdot z_y'+h_t't_y'=0, \end{cases}\qquad t_y'=-\frac{h_z'}{h_t'}z_y',$$

所以导出

$$g_y'+g_z'z_y'-\frac{g_t'}{h_t'}h_z'z_y'=0,\quad z_y'=\frac{g_y'}{g_t'h_z'/h_t'-g_z'}=\frac{g_y'h_t'}{\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(t,z)}}.$$

从而我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=f_y'-f_z'g_y'h_t'\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}+f_t'h_z'g_y'h_t'\Big/h_t'\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\\&=f_y'-g_y'\cdot\frac{\partial(f,h)}{\partial(z,t)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}.\end{aligned}$$

例 2.3.9　试证明下列命题:

(1) 设 f、g 是二元可微函数,且 $u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$由方程组 $x=f(u,v)$,$y=g(u,v)$所确定.若有 $f_u'\cdot\varphi_x'=1$,则 x 只是 u 的函数,或 y 只是 v 的函数.

(2) 设 $\varphi(u,v)$,$\psi(u,v)$有一阶连续偏导数,且有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}=1. \qquad ①$$

若在方程组 $x=\varphi(u,v)$,$y=\psi(u,v)$中,x 与 v 是独立变量,则式①变成$\dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

(3) 设 $f(u)$可导,$u(x,y)$可微,若 $z=z(x,y)$由方程组

$$\begin{cases} (z-f(u))^2=x^2(y^2-u^2), & ② \\ (z-f(u))f'(u)=ux^2 & ③ \end{cases}$$

给定,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$.

证明　(1) 在 $x=f(u,v)$两端对 x 求导,可得

$$1=f_u'\cdot u_x'+f_v'v_x'=f_u'\cdot\varphi_x'+f_v'\psi_x'=1+f_v'\cdot\psi_x'.$$

依条件立即导出 $f_v'\cdot\psi_x'=0$,即 $f_v'=0$ 或 $\psi_x'=0$.若 $f_v'=0$,则 x 只是 u 的函数;若 $\psi_x'=0$,则 v 只是 y 的函数,即 y 只是 v 的函数.

(2) 由题设知,对每个 x 和 v,存在唯一的 u,v,使得 $x=\varphi(u,v)$,$y=\psi(u,v)$.换句话说,存在 $\alpha(x,v)$,$\beta(x,v)$,使得 $u=\alpha(x,v)$,$y=\beta(x,v)$.我们有

$$\varphi_1'u_v'+\varphi_2'=0,\quad \varphi_1'u_x'=1;\quad \psi_1'u_v'+\psi_2'=y_v',\quad \psi_1'u_x'=y_x'. \qquad ④$$

由此可知 $\varphi_1'y_v'=\psi_1'\varphi_1'u_v'+\psi_2'\varphi_1'=-\psi_1'\varphi_2'+\varphi_1'\psi_2'=1$(题设①).再以 u_x乘两端,再注意到④中第二式,即所证.

(3) 对式②作微分,可知

$$2(z-f(u))(\mathrm{d}z-f'(u)\mathrm{d}u)=2x(y^2-u^2)\mathrm{d}x+2x^2(y\mathrm{d}y-u\mathrm{d}u).$$

依据③,可知上式 $\mathrm{d}u$ 之系数为 0.再注意到式②,又可得

$$\mathrm{d}z=(z-f(u))\mathrm{d}x/x+x^2y\mathrm{d}y/(z-f(u)),$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z-f(u)}{x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2y}{z-f(u)}\quad (z\neq f(u)).$$

从而我们有

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z-f(u)}{x}\frac{x^2y}{z-f(u)}=xy.$$

2.4　三维空间几何形态的描述

设空间曲线 L 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$表示,又 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)\in L(x_0=x(t_0),y_0=y(t_0),z_0=z(t_0))$.又 $x(t),y(t),z(t)$在 t_0 处可导,且满足 $x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)\neq 0$,则 L 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的切线方程和切向量 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},\quad \boldsymbol{T}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)).$$

L 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的法平面为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

设空间曲面 S 由参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in D(\text{区域})$$

表示,$\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)\in S$,其中 $x_0=x(u_0,v_0),y_0=y(u_0,v_0),z_0=z(u_0,v_0),(u_0,v_0)\in D$.又 $x(u,v),y(u,v),z(u,v)$在点(u_0,v_0)处可微,且在点(u_0,v_0)处的矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}_{(u_0,v_0)}$$

的秩等于 2.若记 $A=\left.\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{X_0},B=\left.\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{X_0},C=\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{X_0}$ $(A,B,C$不同时为 0),则曲面 S 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(A,B,C)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}_{X_0}.$$

而 S 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的切平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

S 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C},$$

法线的方向余弦为

$\cos\alpha=\pm A/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$， $\cos\beta=\pm B/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$， $\cos\gamma=\pm C/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

设空间曲面 S 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 表示，$\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)\in S$.又 $F(x,y,z)$在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处可微，且在三个偏导数 $F_x'(x_0,y_0,z_0)$，$F_y'(x_0,y_0,z_0)$，$F_z'(x_0,y_0,z_0)$中至少有一个不是 0，则 S 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的切平面方程为

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

而 S 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}.$$

法向量为 $\boldsymbol{n}=(F_x'(x_0,y_0,z_0),F_y'(x_0,y_0,z_0),F_z'(x_0,y_0,z_0))$，方向余弦为

$$\cos\alpha=\pm F_x'(\boldsymbol{X}_0)/k,\quad \cos\beta=\pm F_y'(\boldsymbol{X}_0)/k,\quad \cos\gamma=\pm F_z'(\boldsymbol{X}_0)/k,$$

其中 $k=\sqrt{(F_x'(\boldsymbol{X}_0))^2+(F_y'(\boldsymbol{X}_0))^2+(F_z'(\boldsymbol{X}_0))^2}$.

注　若曲面由 $z=f(x,y)$给出，且 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微.此时，可视其为 $z-f(x,y)=0$ 确定的隐函数，则

切平面方程： $z-z_0=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$，

法线方程： $$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\beta=\pm\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\gamma=\mp\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

其中 $p=f_x'(x_0,y_0)$，$q=f_y'(x_0,y_0)$.

设空间曲线 L 由方程组 $f(x,y,z)=0$，$g(x,y,z)=0$ 表示，$\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)\in L$(即 $f(x_0,y_0,z_0)=0$，$g(x_0,y_0,z_0)=0$).又 $f(x,y,z)$，$g(x,y,z)$在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处可微，且记

$$A=\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}\right|_{X_0},\quad B=\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}\right|_{X_0},\quad C=\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}\right|_{X_0}.$$

若 A，B，C 不同时为 0，则 L 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的切向量为 $\boldsymbol{T}=(A,B,C)$，L 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的切线方程与法平面方程为

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C},\quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

例 2.4.1　解答下列问题：

(1) 求曲线 $x=a\sin^2 t$，$y=b\sin t\cos t$，$z=c\cos^2 t$ 在 $t=\pi/4$ 处的切线方程，法平面方程.

(2) 求曲线 $x^2+y^2+z^2=4a^2$，$x^2+y^2=2ax$ 在点 $\boldsymbol{X}_0=(a,a,\sqrt{2}a)$处的切线方程与法平面方程.

(3) 试证明曲线 $x=ae^t\cos t$，$y=ae^t\sin t$，$z=ae^t$ 与圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各条母线之交角均相等.

解　(1) $t=\pi/4$ 相当于点 $x_0=a/2$，$y_0=b/2$，$z_0=c/2$，再注意到 $x'(t)|_{t=\pi/4}=a$，$y'(t)|_{t=\pi/4}=0$，$z'(t)|_{t=\pi/4}=-c$，故切线方程为

$$\frac{x-a/2}{a}=\frac{z-c/2}{-c},\quad y=\frac{b}{2}.$$

从而法平面方程为

$$a\left(x-\frac{a}{2}\right)+(-c)\left(z-\frac{c}{2}\right)=0 \quad 或 \quad ax-cz=(a^2-c^2)/2.$$

(2) 令 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4a^2$，$g(x,y,z)=x^2+y^2-2ax$，则可得

$$f'_x(\boldsymbol{X}_0)=2a,\quad f'_y(\boldsymbol{X}_0)=2a,\quad f'_z(\boldsymbol{X}_0)=2\sqrt{2}a;$$
$$g'_x(\boldsymbol{X}_0)=0,\quad g'_y(\boldsymbol{X}_0)=2a,\quad g'_z(\boldsymbol{X}_0)=0.$$

由此知切线方程为

$$\frac{x-a}{-4\sqrt{2}a^2}=\frac{y-a}{0}=\frac{z-\sqrt{2}a}{4a^2} \quad 或 \quad x+\sqrt{2}z=3a,\quad y=a.$$

而法平面方程为 $\sqrt{2}x-z=0$.

(3) 设点 (x,y,z) 在圆锥面上，其母线方向为 $\boldsymbol{l}=(x,y,z)$，切向量 τ 为

$$(ae^t(\cos t-\sin t),ae^t(\sin t+\cos t),ae^t)=(x-y,x+y,z).$$

由此可知，$\boldsymbol{l}$ 与 τ 之交角的余弦为

$$\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{l},\tau)&=\boldsymbol{l}\cdot\tau/|\boldsymbol{l}|\cdot|\tau|\\&=[x(x-y)+y(x+y)+z^2]/(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\&\quad\cdot\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2+z^2})\\&=2z^2/\sqrt{2z^2}\cdot\sqrt{3z^2}=2/\sqrt{6}.\end{aligned}$$

证毕.

例 2.4.2 解答下列问题：

(1) 证明螺旋线 $x=a\cos t,y=a\sin t,z=bt$ 的切线与 z 轴形成一定角 α.

(2) 设 $f(x,y)$ 可微，则对于由方程组

$$z=f(x,y),\quad (x-x_0)/\cos\theta=(y-y_0)/\sin\theta$$

确定的曲线，它在点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 处之切线与 xOy 平面的夹角 α 满足：

$$\cos\alpha=[f'_x\cos\theta+f'_y\sin\theta]/\sqrt{1+(f'_x\cos\theta+f'_y\sin\theta)^2}.$$

(3) 设 $z=f(x,y)$ 可微，且它与平面 xy 之交线为 $y=2x^2-3x+4$. 若 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,3)}=2$，试求 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,3)}$.

(4) 给定光滑曲线 $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$，证明它到原点的距离 $\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}$ 为常数当且仅当位移向量 $(x(t),y(t),z(t))$ 与切向量 $(x'(t),y'(t),z'(t))$ 的内积为零.

解 (1) 因为 $x'(t)=-a\sin t,y_t=a\cos t,z_t=b$，所以

$$\cos\alpha=z'_t/\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(2) 令 $\varphi(x,y)=z-f(x,y)$，$\psi(x,y)=(x-x_0)\sin\theta-(y-y_0)\cos\theta$，则有

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,z)}=\cos\theta,\quad \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,x)}=\sin\theta,\quad \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)}=f'_x\cos\theta+f'_y\sin\theta.$$

从而可知

$$\cos\alpha=(f'_x\cos\theta+f'_y\sin\theta)/\sqrt{1+(f'_x\cos\theta+f'_y\sin\theta)^2}.$$

(3) 由题设知 $f(x,2x^2-3x+4)=0$,在两端对 x 求导可得 $f'_1+f'_2\cdot(4x-3)=0$.因为 $z'_x|_{(1,3)}=2$,所以有

$$f'_2|_{(1,3)}=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,3)}=-f'_1/(4x-3)|_{(1,3)}=-2.$$

(4) 必要性.假定 $x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=C$(常数),则得

$$x(t)x'(t)+y(t)y'(t)+z(t)z'(t)=0,\quad 即内积\quad (x,y,z)(x',y',z')=0.$$

充分性.假定 $x(t)x'(t)+y(t)y'(t)+z(t)z'(t)=0$,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)]=0\quad 或\quad x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=C\quad(常数).$$

例 2.4.3　试证明下列命题:

(1) 设平面上有一点 $\boldsymbol{P}$,一条直线 L 以及一条曲线 C.若过 L 上任一点 $\boldsymbol{Q}$ 作曲线 C 之切线总与直线 PQ 垂直,则 C 的方程为 $4ay=x^2$.

(2) 若曲线在每一点处的法平面都经过一个定点,则它必是一条球面曲线.

(3) 设 $F(x,y)$是 n 次多项式,则 n 次代数曲线 $F(x,y)=0$ 在每点上作出的切线至多有 $n(n-1)$条,作出的法线至多有 n^2 条.

证明　(1) 设 L 为 x 轴作直角坐标系,使点 $\boldsymbol{P}$ 有坐标$(0,a)$,$\boldsymbol{Q}$ 的坐标为$(b,0)$,则直线 PQ 的方程为

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1\quad 或\quad y=-\frac{a}{b}x+a.$$

从而可知曲线 C 上任一点处之切线方程为

$$y=\frac{b}{a}(x-b)\quad 或\quad ay-bx+b^2=0.\qquad ①$$

记 $f(x,y)=ay-bx+b^2$,则 $f'_b=2b-x=0$.由此可解出 $b=x/2$.代入式①我们有 $4ay=x^2$.

(2) 假定曲线由 $x(t),y(t),z(t)$表示,则其上任一点(X,Y,Z)处的法平面方程为 $x'(t)(X-x)+y'(t)(Y-y)+z'(t)(Z-z)=0$.若记经过的定点为$(a,b,c)$,则又知

$$x'(t)(X-a)+y'(t)(Y-b)+z'(t)(Z-c)=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2\}=0,$$

由此即知$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=r^2$($r$ 为常数),证毕.

(3) 首先,我们知道曲线 $F(x,y)=0$ 在点(X,Y)处的切线方程为

$$(X-x)F'_x+(Y-y)F'_y=0 \quad 或 \quad XF'_x+YF'_y=xF'_x+yF'_y. \qquad ②$$

其次,对 n 次多项式 $F(x,y)$,若记其中的 k 次齐次多项式为 f_k,则可写成

$$F(x,y)=f_n+f_{n-1}+\cdots+f_k+\cdots+f_1+f_0,$$

$$\begin{aligned}xF'_x+yF'_y&=nf_n+(n-1)f_{n-1}+\cdots+kf_k+\cdots+f_1\\&=n(f_n+f_{n-1}+\cdots+f_1+f_0)-(f_{n-1}+2f_{n-2}+\cdots+nf_0).\end{aligned}$$

从而根据②可知

$$XF'_x+YF'_y+f_{n-1}+2f_{n-2}+\cdots+nf_0=n(f_n+f_{n-1}+\cdots+f_1+f_0),$$

$$XF'_x+YF'_y+f_{n-1}+2f_{n-2}+\cdots+nf_0=0.$$

现在设定点是(x_0,y_0),则过此点应有

$$x_0F'_x+y_0F'_y+f_{n-1}+\cdots+nf_0=0. \qquad ③$$

将此方程与 $F(x,y)=0$ 联立,就可解出切点之坐标.注意到式③是$(n-1)$次代数式,而 $F(x,y)=0$ 是 n 次代数式,所以一般地讲,可解得 $n(n-1)$个根(包含复根).这说明从点(x_0,y_0)处作出的切线至多有 $n(n-1)$条.

注意到法线方程为 $XF'_y-YF'_x=xF'_y-yF'_x$,故过定点(x_0,y_0)处的条件应是

$$x_0F'_y-y_0F'_x=xF'_y-yF'_x.$$

这是关于 x,y 的 n 次代数式,它与 $F(x,y)=0$ 之交点显然至多有 n^2 个.证毕.

例 2.4.4 试证明下列命题:

(1) 设 $F(x,y)$有二阶连续偏导数,且$\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$,则对任意的常数 C,$F(x,y)=C$ 的解 $y=f(x)$是一条直线的充分必要条件是

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0. \qquad ①$$

(2) 由方程 $y=x\varphi(z)+\psi(z)$确定的 $z=z(x,y)$满足

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \qquad ②$$

证明 (1) 由 $F(x,f(x))=C$ 可知 $y'=f'(x)=-F'_x/F'_y$.进一步又可导得

$$\begin{aligned}y''=f''(x)&=-[(F''_{xx}+F''_{xy}y')F'_y-F'_x(F''_{xy}+F''_{yy}y')]/(F'_y)^2\\&=-\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]\Big/\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

因此式①成立当且仅当 $f''(x)=0$.证毕.

(2) 由题设知 $z=C$(常数)与 $z=z(x,y)$之交线是直线,故$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$.而在 $z(x,y)=C$ 两端求导可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}y'=0 \quad 或 \quad y'=-\frac{\partial z}{\partial x}\Big/\frac{\partial z}{\partial y}.$$

从而我们有(再对 x 求导)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial z}{\partial y\partial x}\cdot y'+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(y')^2+\frac{\partial z}{\partial y}y''=0.$$

以 y'代入即得式②.

例 2.4.5　解答下列问题：

(1) 求曲面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v$ 在点 $\boldsymbol{X}_0=(\sqrt{2},\sqrt{2},\pi/4)$处之切平面方程.

(2) 求 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $\boldsymbol{X}_0=(1,-2,2)$处的法线方程.

(3) 求椭球面 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 在点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0, y_0, z_0)$处的切平面.

(4) 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面.

解　(1) 易知该曲面在点 $\boldsymbol{X}_0(u_0=2, v_0=\pi/4)$处两个切向量为

$$\tau_1:(x_u', y_u', z_u')|_{X_0}=(\cos v, \sin v, 0)|_{X_0}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right).$$

$$\tau_2:(x_v', y_v', z_v')|_{X_0}=(-u\sin v, u\cos v, 1)|_{X_0}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},1).$$

由此即知该曲面在 $\boldsymbol{X}_0$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_u' & y_u' & z_u'\\ x_v' & y_v' & z_v'\end{vmatrix}\quad\text{或}\quad(1,-1,2\sqrt{2}).$$

因此,切面方程为$(x-\sqrt{2})-(y-\sqrt{2})+2\sqrt{2}(z-\pi/4)=0$.

(2) 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$,则曲面方程可写为 $F(x,y,z)=0$.因此该曲面在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的法向量为$(F_x', F_y', F_z')|_{X_0}=(2,-8,12)$.从而其法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}.$$

(3) 该曲面在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的法向量为$(2x_0/a^2, 2y_0/b^2, 2z_0/c^2)$.故切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0.$$

注意到点 X_0 在曲面上:$x_0^2/a^2+y_0^2/b^2+z_0^2/c^2=1$,因此切平面方程可化简为 $x_0x/a^2+y_0y/b^2+z_0z/c^2=1$.

(4) 注意曲面的法向量是$(x,2y,3z)$,而依题设知

$$\frac{x}{1}=\frac{2y}{4}=\frac{3z}{6}=\lambda\quad\text{或}\quad x=\lambda,\quad y=2\lambda,\quad z=2\lambda.$$

代入曲面方程可得 $\lambda=\pm1$,从而求出曲面上的两个切点应为$(\pm1,\pm2,\pm2)$,而两个切平面方程就是

$$(x\mp1)+4(y\mp2)+6(z\mp2)=0,$$

$$x+4y+6z=21,\quad x+4y+6z=-21.$$

例 2.4.6　试证明下列命题：

(1) 设 $F(u,v)$可微,则曲面 $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的所有切平面过一定点.

(2) 设 $F(u,v)$可微,并给定曲面 $F(nx-ly,ny-mz)=0$,则其所有的切平面都与某定直线平行.

(3) 设有二次曲面(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j 是常数)

$$ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz+gx+hy+iz+j=0,$$

若从一点 $\boldsymbol{X}_0$ 可作该曲面的切线,则曲面上的这些切点共面.

(4) 设 $F(x,y,z)$是可微的 n 次齐次函数,则曲面 $F(x,y,z)=1$ 上点(x_0,y_0,z_0)的切平面方程为

$$x\cdot F'_x(x_0,y_0,z_0)+y\cdot F'_y(x_0,y_0,z_0)+zF'_z(x_0,y_0,z_0)=n.$$

证明　(1) 设 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$是曲面上一点,则点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}:\left(F'_1/(z-c),F'_2/(z-c),F'_1\cdot\left(-\frac{x-a}{(z-c)^2}\right)+F'_2\cdot\left(-\frac{y-b}{(z-c)^2}\right)\right)\bigg|_{X_0}.$$

从而知其切平面方程为

$$\frac{x-x_0}{z_0-c}\cdot F'_1\bigg|_{X_0}+\frac{y-y_0}{z_0-c}F'_2\bigg|_{X_0}-\left[\frac{(x_0-a)}{(z_0-c)^2}F'_1\bigg|_{X_0}+\frac{y_0-b}{(z_0-c)^2}F'_2\bigg|_{X_0}\right](z-z_0)=0.$$

现在用(a,b,c)代(x,y,z),上式成立,这说明点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的切平面通过点(a,b,c),而 $\boldsymbol{X}_0$ 是曲面上任一点,命题成立.

(2) 令 $u=nx-lz$,$v=ny-mz$,则该曲面在点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$处的切平面为

$$nF'_u\cdot(x-x_0)+nF'_v\cdot(y-y_0)-(lF'_u+mF'_v)(z-z_0)=0.$$

现在,考察其方向余弦为 l,m,n 的直线 L,由于有等式

$$l(nF'_u)+m(nF'_v)+n[-(lF'_u+mF'_v)]=0,$$

故知上述切平面与直线 L 平行.注意到 $\boldsymbol{X}_0$ 是曲面上任意取的点,结论得证.

(3) 设点 $\boldsymbol{X}_0$ 之坐标为(x_0,y_0,z_0),点(x,y,z)是曲面上的切点,则切平面方程为

$$(2ax+dy+fz+g)(x_0-x)+(2by+dx+ez+h)(y_0-y)$$
$$+(2cz+ey+fx+i)(z_0-z)=0,$$

整合后可知,上式左端含有式

$$2ax^2+2by^2+2cz^2+dxy+eyz+fzx+dxy+eyz+fzx,$$

而注意到原曲面方程,则切平面方程可化为关于 x,y,z 的一次式.这说明切点位于一个平面上.

(4) 易知该曲面在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面方程为

$$(x-x_0)F'_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F'_y(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)F'_z(x_0,y_0,z_0)=0.$$

这说明(注意,齐次函数的性质)

$$x\cdot F'_x(x_0,y_0,z_0)+yF'_y(x_0,y_0,z_0)+zF'_z(x_0,y_0,z_0)$$
$$=x_0F'_x(x_0,y_0,z_0)+y_0F'_y(x_0,y_0,z_0)+z_0F'_z(x_0,y_0,z_0)$$

$$= nF(x_0, y_0, z_0) = n.$$

例 2.4.7　试证明下列命题：

(1) 曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$的切平面在坐标轴上截下的线段长的和为一常量.

(2) 设有曲面 $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$，则曲面上任一点处的切平面与各坐标轴相交之各交点坐标的平方和为一常量.

(3) 过曲面 $xyz=a^3$ $(a>0)$上任一点的切平面与三个坐标平面形成的四面体的体积均相同.

证明　(1) 易知该曲面在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面方程为

$$(x-x_0)/\sqrt{x_0}+(y-y_0)/\sqrt{y_0}+(z-z_0)/\sqrt{z_0}=0.$$

从而知它在三个坐标轴上的截距各为

$$\bar{x}=x_0+\sqrt{x_0}(\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}),$$
$$\bar{y}=y_0+\sqrt{y_0}(\sqrt{x_0}+\sqrt{z_0}),$$
$$\bar{z}=z_0+\sqrt{z_0}(\sqrt{y_0}+\sqrt{x_0}).$$

由此得 $\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}=(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})^2=a$.

(2) 易知曲面上任一点(x_0, y_0, z_0)处的切平面方程为

$$x_0^{-1/3}(x-x_0)+y_0^{-1/3}(y-y_0)+z_0^{-1/3}(z-z_0)=0,$$
$$x_0^{-1/3}x+y_0^{-1/3}y+z_0^{-1/3}z=x_0^{2/3}+y_0^{2/3}+z_0^{2/3}=a^{2/3}.$$

由此知它在 x 轴上的截点坐标为 $X_0=a^{2/3}x_0^{1/3}$，在 y 轴与 z 轴上的截点坐标各为 $Y_0=a^{2/3}y_0^{1/3}$，$Z_0=a^{2/3}z_0^{1/3}$. 从而得到

$$Z_0^2+Y_0^2+Z_0^2=a^{4/3}(x_0^{2/3}+y_0^{2/3}+z_0^{2/3})=a^{4/3}a^{2/3}=a^2.$$

(3) 易知过曲面上点(x_0, y_0, z_0)处的切平面方程为

$$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0.$$

故它与各坐轴之交点各为 $3x_0$，$3y_0$，$3z_0$. 由此知所形成的四面体体积为

$$V=3x_0\cdot 3y_0\cdot 3z_0/6=9x_0y_0z_0/2=9a^3/2.$$

例 2.4.8　试证明下列命题：

(1) 设 $f(u)$可微，则曲面 $ax+by+cz=f(x^2+y^2+z^2)$在点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0, y_0, z_0)$处的法向量与向量$(a, b, c)$以及向量$(x_0, y_0, z_0)$共面.

(2) 设 $F(x, y, z)$，$G(x, y, z)$可微，则两个曲面

$$F(x, y, z)=0,\quad G(x, y, z)=0$$

正交的条件是 $F'_xG'_x+F'_yG'_y+F'_zG'_z=0$.

(3) 三个曲面 $xy/z=u$，以及

$$\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=v,\quad \sqrt{x^2+z^2}-\sqrt{y^2+z^2}=w$$

在相交的点处互相正交.

证明　(1) 易知该曲面在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的法向量为

$$(a-f'\cdot 2x_0, b-2y_0 f', c-2z_0 f').$$

从而可得行列式

$$\begin{vmatrix} a-2x_0 f' & b-2y_0 f' & c-2z_0 f' \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= acy_0 - abz_0 - 2cx_0 y_0 f' + 2bx_0 z_0 f' + abz_0 - cbx_0 - 2ay_0 z_0 f' \\ &\quad + 2cx_0 y_0 f' + bcx_0 - acy_0 - 2bx_0 z_0 f' + 2ay_0 z_0 f' = 0.\end{aligned}$$

由此即得所证.

(2) 易知两曲面在交线上各点处的法向量为 (F'_x, F'_y, F'_z), (G'_x, G'_y, G'_z). 而法向量正交即指其内积 $(F'_x, F'_y, F'_z)\cdot(G'_x, G'_y, G'_z)=0$.

(3) 因为垂直于各曲面的法向量各为

$$\boldsymbol{n}_1 = (y/z, x/z, -xy/z^2),$$

$$\boldsymbol{n}_2 = (x/\sqrt{x^2+z^2}, y/\sqrt{y^2+z^2}, z/\sqrt{x^2+z^2}+z/\sqrt{y^2+z^2}),$$

$$\boldsymbol{n}_3 = (x/\sqrt{x^2+z^2}, -y/\sqrt{y^2+z^2}, z/\sqrt{x^2+z^2}-z/\sqrt{y^2+z^2}),$$

由此易知内积 $(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)=0$, $(\boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3)=0$, $(\boldsymbol{n}_3, \boldsymbol{n}_1)=0$.

例 2.4.9　解答下列问题:

(1) 试求 $\lambda>0$ 的值, 使得两曲面 $xyz=\lambda$, $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 相切.

(2) 试证明下述以 λ 为参数的曲面族互相正交:

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}=1 \quad (a>b>c).$$

解　(1) 假定该两曲面在交点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0, y_0, z_0)$ 处有相同的切平面, 则先将其切平面方程写出, 我们有

$$y_0 z_0 (x-x_0) + z_0 x_0 (y-y_0) + x_0 y_0 (z-z_0) = 0,$$

$$x_0 (x-x_0)/a^2 + y_0 (y-y_0)/b^2 + z_0 (z-z_0)/c^2 = 0.$$

因为它们是同一平面, 所以有

$$y_0 z_0 \Big/ \left(\frac{x_0}{a^2}\right) = z_0 x_0 \Big/ \left(\frac{y_0}{b^2}\right) = x_0 y_0 \Big/ \left(\frac{z_0}{c^2}\right).$$

再注意到点 $\boldsymbol{X}_0$ 在曲面上, 故知 $x_0^2/a^2 = y_0^2/b^2 = z_0^2/c^2 = 1/3$. 从而得到

$$(x_0 y_0 z_0)^2 = (abc)^2/3^3, \quad \lambda^2 = (abc)^2/3^3, \quad \lambda = abc/3\sqrt{3}.$$

(2) 给定曲面族之交点 (x_0, y_0, z_0), 对此先求出 λ 的值, 作函数

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) - (b-\lambda)(c-\lambda)x_0^2 \\ &\quad - (c-\lambda)(a-\lambda)y_0^2 - (a-\lambda)(b-\lambda)z_0^2,\end{aligned}$$

我们有 $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} f(\lambda)=+\infty$，$f(c)=-(a-c)(b-c)z_0^2<0$，以及

$$f(b)=-(c-b)(a-b)y_0^2>0,\quad f(a)=-(b-a)(c-a)z_0^2<0.$$

这说明 $f(\lambda)=0$ 有三个实根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$：

$$-\infty<\lambda_1<c,\quad c<\lambda_2<b,\quad b<\lambda_3<a.$$

现在，我们在三个 λ 值中任取二个：λ_i,λ_j，它们自然满足

$$\frac{x_0^2}{a-\lambda_i}+\frac{y_0^2}{b-\lambda_i}+\frac{z_0^2}{c-\lambda_i}=1,\quad \frac{x_0^2}{a-\lambda_j}+\frac{y_0^2}{b-\lambda_j}+\frac{z_0^2}{c-\lambda_j}=1.$$

将两式相减，得到

$$(\lambda_i-\lambda_j)\left\{\frac{x_0^2}{(a-\lambda_i)(a-\lambda_j)}+\frac{y_0^2}{(b-\lambda_i)(b-\lambda_j)}+\frac{z_0^2}{(c-\lambda_i)(c-\lambda_j)}\right\}=0,$$

$$\frac{x_0}{a-\lambda_i}\cdot\frac{x_0}{a-\lambda_j}+\frac{y_0}{b-\lambda_i}\cdot\frac{y_0}{b-\lambda_j}+\frac{z_0}{c-\lambda_i}\cdot\frac{z_0}{c-\lambda_j}=0.$$

依据上述例 2.4.8(2)，即得所证．

例 2.4.10 解答下列问题：

(1) 设 $f(x,y)$ 满足 $f_x'+ff_y'\equiv0$，试问函数 $z=f(x,y)$ 的等位线有何特征．

(2) 设 $f(x,y)$ 可微．若曲面 $z=f(x,y)$ 上任一点处的法线均与 z 轴相交，试证明此曲面是一个旋转曲面．

(3) 设 $f(x,y)$ 可微．若以点 (a,b,c) 为顶点，以 xOy 平面上曲线 $f(x,y)=0$ 为准线的锥面方程为 $f((z-c)/(x-a),(z-c)/(y-b))=0$，试求锥面所满足的微分方程．

(4) 设 $f(x,y)$ 可微，试证明以直线 (l,m,n) 为母线，平面曲线 $f(x,y)=0$ 为准线的柱面方程是 $f(lz-nx,mz-ny)=0$．

解 (1) 在等位线 $f(x,y)=C$ 对 x 求导 $(y=y(x))$，可得 $f_1'+f_2'\cdot y'=0$．注意到题设条件，又知 $f_2'(y'-f)=0$．

(i) 若 $f_2'=0$，则由前式得 $f_1'=0$．即 $f(x,y)\equiv C'$（常数）

(ii) 否则，就有 $y'(x)=f(x,y)=C$．即 $y=Cx+d$．

(2) 曲面上点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $(f_x',f_y',-1)$，故其法线方程为

$$(x-x_0)/f_x'(x_0,y_0)=(y-y_0)/f_y'(x_0,y_0)=-(z-z_0).\qquad①$$

根据题设可知，不论点 $\boldsymbol{X}_0$ 位于何处，点 $(0,0,z)$ 必满足式①，即

$$-x_0/f_x'(x_0,y_0)=-y_0/f_y(x_0,y_0)=-(z-z_0).$$

令上式的值为 λ，我们有

$$f_x'(x_0,y_0)=-x_0/\lambda,\quad f_y'(x_0,y_0)=-y_0/\lambda.$$

从而得（(x_0,y_0) 改写为 (x,y)）

$$f(x,y)=-\int\frac{x}{\lambda}\mathrm{d}x+g(y)=-\frac{x^2}{2\lambda}+g(y).$$

由此导得 $g'(y)=f'_y(x,y)$,即 $g(y)=-y^2/2\lambda+C$.最后有

$$z=f(x,y)=-(x^2+y^2)/2\lambda+C.$$

(3) 令 $u=(z-c)/(x-a)$,$v=(z-c)/(y-b)$,并在原式中对 x,y 求导,可得

$$f'_u\cdot\frac{z'_x(x-a)-(z-c)}{(x-a)^2}+f'_v\cdot\frac{z'_x}{y-b}=0,$$

$$f'_u\cdot\frac{z'_y}{x-a}+f'_v\frac{z'_y(y-b)-(z-c)}{(y-b)^2}=0.$$

消去 f'_u,f'_v,可知 $(x-a)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial z}{\partial y}=z-c$.

(4) 柱面方程 $f(x,y)-z=0$ 的法向量为 $(f'_x,f'_y,-1)$,依题设知它与 (l,m,n)垂直,故 $lf'_x+mf'_y-n=0$.

令 $\xi=lz-nx$,$\eta=mz-ny$,则可得

$$l\cdot\left(-n\cdot\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)+m\cdot\left(-n\cdot\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)-n=0,\quad l\frac{\partial f}{\partial\xi}+m\frac{\partial f}{\partial\eta}+1=0.$$

这说明曲面 $f(\xi,\eta)-z=0$ 与 $(l,m,-1)$正交,因此柱面方程为

$$z=f(\xi,\eta)=f(lz-nx,mz-ny).$$

例 2.4.11　试证明下列命题:

(1) 设 $f(x,y)$有连续偏导数.若曲面 $z=f(x,y)$上各点处的法线方向均相同,则 $z-f(x,y)=0$ 是一个平面.

(2) 设 $f(x,y)$可微.若曲面 $z=f(x,y)$上的切平面均过一定点 (a,b,c),则

$$f[t(x-a)+a,t(y-b)+b]=t[f(x,y)-c].$$

(3) 记曲面 S:$z=f(x,y)$在点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)$处的切平面为 T,则 T 是 S 上三个点 (x_i,y_i,z_i)($i=0,1,2$;$z_i=f(x_i,y_i)$)的平面在点 $\boldsymbol{X}_1=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{X}_2=(x_2,y_2)$沿着角度不等于 0°,180°的不同方向趋近 $\boldsymbol{X}_0$ 时的极限位置.

证明　(1) 不妨假定 $(f'_x,f'_y,-1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,则由 $f'_x=\alpha_1$,$f'_y=\alpha_2$ 可知

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y)-\alpha_1x+\alpha_2y]=0,\quad\frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)-\alpha_1x+\alpha_2y]=0.$$

从而有 $f(x,y)=Ax+By+C$.

(2) 依题设知

$$f'_x\cdot(x-a)+f'_y(y-b)=z-c=f(x,y)-c.$$

以 $t(x-a)+a$ 换 x,$t(y-b)+b$ 换 y,则得

$$t(x-a)\cdot f'_x[t(x-a)+a,t(y-b)+b]=f[t(x-a)+a,t(y-b)+b]-c.$$

也可写成

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f[t(x-a)+a,t(y-b)+b]=f[t(x-a)+a,t(y-b)+b]-c,$$

$$\frac{\mathrm{d}f[t(x-a)+a,t(y-b)+b]}{f[t(x-a)+a,t(y-b)+b]}=\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

$$\ln\{f[t(x-a)+a,t(x-b)+b]-c\}=\ln t+A.$$

令 $t=1$,可得 $A=\ln[f(x,y)-c]$.从而有

$$f[t(x-a)+a,t(y-b)+b]=t[f(x,y)-c].$$

(3) 易知过三点 $(x_i,y_i,z_i)(i=0,1,2)$ 的平面方程为

$$\begin{aligned}z-z_0=\{&(x-x_0)[k_1(z_2-z_0)-k_2(z_1-z_0)]\\&+(y-y_0)[h_2(z_1-z_0)-h_1(z_2-z_0)]\}/(h_2k_1-h_1k_2),\end{aligned}\qquad ①$$

其中 $h_i=x_i-x_0,k_i=y_i-y_0(i=1,2)$.

在式①中令 $h_i=\rho_i\cos\theta_i,k_i=\rho_i\sin\theta_i(i=1,2)$,则

$$z_i-z_0=\rho_i\left[\cos\theta_i\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta_i\frac{\partial z}{\partial y}\right]+o(\rho_i)\quad(\rho_i\to 0).$$

将其代入式①,即得所要结果

$$z-z_0=(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{o(\rho_2)}{\rho_2}+\frac{o(\rho_1)}{\rho_1}\quad(\rho_1,\rho_2\to 0).$$

2.5　方向导数、梯度(以二、三元函数为例)

设 $f(x,y,z)$ 在点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域内定义,$\boldsymbol{l}$ 为一单位向量,设 $\boldsymbol{l}$ 与 x,y,z 轴正向的夹角分别为 $\alpha,\beta,\gamma(0\leqslant\alpha\leqslant\pi,0\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant\gamma\leqslant\pi)$,则 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$:

$$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

过 $\boldsymbol{X}_0$ 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的直线方程 L 为

$$x=x_0+t\cos\alpha,\quad y=y_0+t\cos\beta,\quad z=z_0+t\cos\gamma.$$

将函数限制在直线 L 上,它是 $t=0$ 邻域上的一元函数,此函数在 $t=0$ 的导数就称为 $f(x,y,z)$ 在 $\boldsymbol{X}_0$ 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数.

定义 2.5.1　若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

存在,则称它为函数 $f(x,y,z)$ 在 $\boldsymbol{X}_0$ 点沿 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 方向的方向导数或变化率,记为 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{X_0}$.

定理 2.5.1　设 $f(x,y,z)$ 在 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 点可微,则它沿 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 方向的方向导数存在,且

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

注 1　设区域 D 由光滑闭曲面围成,$f\in C^{(1)}(\overline{D})$,这时在 D 的内点定理的结论成立,通过取极限,认为在 D 的边界点定理的结论也成立.由于边界是光滑的,它有外法线方向 $\boldsymbol{n}$,函数在边界点沿外法线方向的方向导数.约定为 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=-\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}^-}$.

注 2　对于二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的情形.因为方向 $\boldsymbol{l}$ 可表示为

$$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)=(\cos\alpha,\sin\alpha)\quad(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi),$$

其中 α 是由 x 轴正向转到 $\boldsymbol{l}$ 方向转过的角度；或 $-\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi$，逆时针转动时，$\alpha$ 为正，顺时针则为负．其方向导数公式为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\sin\alpha.$$

定义 2.5.2　设函数 $f(x,y,z)$ 在点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，称向量

$$\Delta f(\boldsymbol{X}_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{X_0}\quad 或\quad \frac{\partial f(\boldsymbol{X}_0)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f(\boldsymbol{X}_0)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f(\boldsymbol{X}_0)}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

为 f 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的梯度，记为 $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{X}_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{X_0}$．

注 1　函数 f 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的梯度是一向量，其方向是函数 f 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处周围之值增加最快的方向，其向量长度是 f 在($\boldsymbol{X}_0$ 处)该方向的变化率．

注 2　方向导数与梯度的联系公式为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=|\operatorname{grad} f(\boldsymbol{X}_0)|\cdot\cos(\operatorname{grad} f(\boldsymbol{X}_0),\boldsymbol{l}).$$

注 3　设 $f(x,y,z)$ 在点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则过点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的等位面是 $f(x,y,z)=f(x_0,y_0,z_0)$，而此等位面在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{X_0}$，就是梯度．因此，梯度与等位面正交，方向由低值等位面指向高值等位面．

例 2.5.1　试证明下列命题：

(1) 设 $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & x=0 \text{ 或 } y=0,\\ 1, & \text{其它},\end{cases}$ 则 $f_x'(0,0)=1$，$f_y'(0,0)=1$，但在点(0,0)处按 $\boldsymbol{l}=(a,b)$($a\neq 0,b\neq 0$)的方向导数不存在．

(2) 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy^2/(x^2+y^4), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则在点(0,0)处按 $\boldsymbol{l}=(\alpha_1,\alpha_2)$ 的方向导数存在，但 $f(x,y)$ 在点(0,0)处不连续．

(3) 设 $f(x,0)=0$，$f(x,y)=\left(1-\cos\frac{x^2}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2}$ ($y\neq 0$)，则 $f(x,y)$ 在(0,0)处连续；在(0,0)处的方向导数均为 0；$f(x,y)$ 在点(0,0)处不可微．

(4) 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^3/(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在(0,0)处的各方向导数均存在，但方向导数公式

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta \tag{①}$$

可以不成立．

(5) 设 $f(x,y)=\begin{cases}2xy^2/(x^2+y^4), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则在点(0,0)处式①成立，但 $f(x,y)$ 在点(0,0)处不可微．

证明 (1) 依题设知 $f(0,0)=0$，故知

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1,\quad f'_y(0,0)=1;$$

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$不存在，因为$\frac{f(t\alpha_1,t\alpha_2)-f(0,0)}{t}=\frac{1}{t}$.

(2) 因为我们有 $f(0,0)=0$，所以得出

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t\alpha_1,t\alpha_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha_1\alpha_2^2}{\alpha_1^2+t^2\alpha_2^4}=\begin{cases}\alpha_2^2/\alpha_1, & \alpha_1\neq 0,\\ 0, & \alpha_1=0.\end{cases}$$

即方向导数存在.此外，令 $x=y^2$，则 $f(x,y)=1/2(x,y\neq 0)$，$f(0,0)=0$.故 $f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续.

(3) 由 $|f(x,y)|\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$ 即知 f 在$(0,0)$处连续.因为我们有 $f(0,0)=0$，所以在 $y\neq 0$ 的方向上有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(tx,ty)}{t}=\lim_{t\to 0}\left(1-\cos\frac{t^2x^2}{ty}\right)\sqrt{x^2+y^2}\,|t|/t=0,$$

而在 x 轴方向，其方向导数自然为 0.此外，如果 $f(x,y)$在$(0,0)$可微，那么应该有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0\quad(\text{注意偏导数为 }0).$$

然而当极限是沿着 $y=x^2/\pi$ 进行时，可得

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2/\pi}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y}}=1-\cos\pi=2.$$

导致矛盾，证毕.

(4) 因为我们有

$$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\begin{cases}t\cos^3\alpha\cdot\sin^3\alpha, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}=t\cos^3\alpha\cdot\sin^3\alpha,$$

所以$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)|_{(0,0)}=\cos^3\alpha\cdot\sin^3\alpha$.但是由于 $f'_x|_{(0,0)}=1$，$f'_y|_{(0,0)}=0$，故按式①导致$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=1\cdot\cos\alpha$.即得所证.

(5) 易知 $f(x,y)$在$(0,0)$处不连续，但因 $f'_x(0,0)=0=f'_y(0,0)$，以及

$$|2r^3\cos\theta\cdot\sin^2\theta/r^2(\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta)|\leqslant Mr,$$

说明 $f(x,y)$在$(0,0)$处的方向导数存在且等于 0，从而式①成立.

例 2.5.2 解答下列问题：

(1) 求 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点$(x,y)\neq(0,0)$处沿 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$的方向导数.

(2) 试问 $f(x,y)=1/r(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$在方向 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$上的方

向导数何时为0.

(3) 设 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$, $\boldsymbol{X}_0=(1,1)$. 若 $\boldsymbol{l}$ 方向是位于与 Ox 轴, Oy 轴交角各为 $\pi/3$, $\pi/6$ 处, 试求在 $\boldsymbol{X}_0$ 处的 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$, 再求其最大、最小值以及0值时的方向 $\boldsymbol{l}$.

解 (1) 记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 因为 $f'_x=x/r$, $f'_y=y/r$, 所以我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}&=\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\sin\alpha=\cos\theta\cdot\cos\alpha+\sin\theta\cdot\sin\alpha\\&=\cos(\theta-\alpha)=\cos(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l})\quad(x=r\cos\theta).\end{aligned}$$

(2) 因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\dfrac{x}{r^3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{y}{r^3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}=-\dfrac{z}{r^3}$, 所以我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}&=-\frac{x\cos\alpha}{r^3}-\frac{y\cos\beta}{r^3}-\frac{z\cos\gamma}{r^3}\\&=-\frac{1}{r^2}[\cos(\boldsymbol{r},x)\cos\alpha+\cos(\boldsymbol{r},y)\cos\beta+\cos(\boldsymbol{r},z)\cos\gamma]\\&=-\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})/r^2=0,\end{aligned}$$

即 $\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{r})=0$, $\boldsymbol{l}\perp\boldsymbol{r}$.

(3) 因为 $f'_x|_{X_0}=1$, $f'_y|_{X_0}=1$, 所以方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{X_0}=1\cdot\cos\frac{\pi}{3}+1\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

此外, 由 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha+\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$, 可知当 $\alpha=\pi/4$ 时, 其方向导数值最大且等于 $\sqrt{2}$, 其它略述.

例 2.5.3 解答下列问题:

(1) 设 $\boldsymbol{l}$ 方向是曲线 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 在 $\boldsymbol{X}_0=(a/\sqrt{2},b/\sqrt{2})$ 处的内法线方向, 试求 $z=1-(x^2/a^2+y^2/b^2)$ 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处 $\boldsymbol{l}$ 上的方向导数.

(2) 试求 $w=e^{-2y}\cdot\ln(x+z^2)$ 在点 $\boldsymbol{X}_0=(e^2,1,e)$ 处沿曲面 $x=e^{u+v}$, $y=e^{u-v}$, $z=e^{uv}$ 上法线方向的方向导数.

解 (1) 易知在 $\boldsymbol{X}_0$ 处曲线的内法线的斜率为 $\tan\alpha=-1/y'(a/\sqrt{2})=a/b$. 因此其方向余弦各为(注意内法向, 要加"－"号)

$$\cos\alpha=-b/\sqrt{a^2+b^2},\quad \cos\beta=-a/\sqrt{a^2+b^2}.$$

而由 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{X_0}=-\sqrt{2}/a$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{X_0}=-\sqrt{2}/b$ 即得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{X_0}=\frac{b\sqrt{2}}{a\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a\sqrt{2}}{b\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}.$$

(2) 由题设 $e^2=e^{u+v}$, $1=e^{u-v}$, $e=e^{uv}$ 可解出 $u=1$, $v=1$. 从而在点(1,1)处可

得两个切向量：

$v=1$.由 $x=e^{u+1}$,$y=e^{u-1}$,$z=e^{u}$ 可知,切向量为$(e^2, 1, e)$;

$u=1$.由 $x=e^{1+v}$,$y=e^{1-v}$,$z=e^{v}$ 可知,切向量为$(e^2, -1, e)$.

因此对于法向量,我们有

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ e^2 & 1 & e \\ e^2 & -1 & e \end{vmatrix}=2(e, 0, -e^2)=2e(1, 0, -e).$$

$$\cos\alpha=1/\sqrt{1+e^2},\quad \cos\beta=0,\quad \cos\gamma=-e/\sqrt{1+e^2}.$$

再注意到$(w'_x, w'_y, w'_z)|_{X_0}=(1/2e^4, -2(\ln 2+2)/e^2, 1/e^3)$,可得

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{1}{2e^4\sqrt{1+e^2}}-\frac{1}{e^2\sqrt{1+e^2}}.$$

例 2.5.4　试证明下列命题：

(1) 设 $y=\varphi(x)$在$[a,b]$上可微,$z=f(x,y)$在区域 D 上有连续偏导数,且曲线 Γ:$y=\varphi(x)$在 D 内.若 $f[x,\varphi(x)]=0$,则 $f(x,y)$在 Γ 上任一点 $\boldsymbol{X}=(x,\varphi(x))$处沿 Γ 之切线方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数为 0.

(2) 设 $f(x,y)$在点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0, y_0)$处可微,又设向量

$$\boldsymbol{l}_1=(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1),\quad \boldsymbol{l}_2=(\cos\alpha_2, \sin\alpha_2)$$

线性无关,则 $f(x,y)$在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{X}_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right|_{\boldsymbol{X}_0}A+\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right|_{\boldsymbol{X}_0}B,$$

$$A=\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \end{vmatrix}\Big/C,\quad B=\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \end{vmatrix}\Big/C,\quad C=\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \end{vmatrix}.$$

证明　(1) 记曲线上点 $\boldsymbol{X}$ 的切线方向是$(\cos\alpha,\cos\beta)$,则$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=f'_x\cos\alpha+f'_y\cos\beta$.

由 $f(x,\varphi(x))=0$ 可知

$$f'_x(\boldsymbol{X})+f'_y(\boldsymbol{X})\cdot\varphi'(x)=0,\quad \tan\alpha=\varphi'(x)=-f'_x/f'_y.$$

从而得

$$\cos\alpha=\pm 1/\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\pm|f'_y|/\sqrt{(f'_x)^2+(f'_y)^2},$$

$$\cos\beta=\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\left[\pm 1/\sqrt{(f'_x)^2+(f'_y)^2}\right](-f'_x|f'_y|/f'_y).$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{\boldsymbol{X}}=\pm(f'_x\cdot|f'_y|-f'_x|f'_y|)/\sqrt{(f'_x)^2+(f'_y)^2}=0.$$

(2) 因为我们有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}=f'_x\cos\alpha_1+f'_y\sin\alpha_1,\quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}=f'_x\cos\alpha_2+f'_y\sin\alpha_2,$$

所以可解得(由题设知 $C\neq 0$)

$$f'_x=\left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\sin\alpha_2-\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\sin\alpha_1\right]\Big/C,\quad f'_y=\left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\cos\alpha_1-\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\cos\alpha_2\right]\Big/C.$$

从而得到

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=f'_x\cdot\cos\alpha+f'_y\sin\alpha=\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\sin\alpha_2-\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\sin\alpha_1\right)\cos\alpha$$
$$+\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\cos\alpha_1-\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\cos\alpha_2\right)\sin\alpha=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}A+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}B.$$

例 2.5.5　试证明下列命题:

(1)设 $f(x,y)$在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上可微,给定两个方向:$\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2$,记它们之间的夹角为 $\varphi(0<\varphi<\pi)$,则

(i)　$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right)^2}$.

(ii)　$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right)^2}$.

(2)设 $f(x,y,z)$在 $\mathbf{R}^3$ 上有连续二阶偏导数,且令方向

$$\boldsymbol{l}_1=(\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1),$$
$$\boldsymbol{l}_2=(\cos\alpha_2,\cos\beta_2,\cos\gamma_2),$$
$$\boldsymbol{l}_3=(\cos\alpha_3,\cos\beta_3,\cos\gamma_3)$$

互相垂直,则(i) $I=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}\right)^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$.(ii) $J=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{l}_i^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

(3)设 $f(x,y,z)$有连续一阶偏导数,又令 $\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2,\boldsymbol{l}_3$ 是点 $\boldsymbol{X}_0$ 处给定的三个互相正交的单位向量.若 $\boldsymbol{l}$是点 $\boldsymbol{X}_0$ 处的任一单位向量,则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}_1)+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}_2)+\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_3}\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}_3).$$

证明　(1)不妨设 $\boldsymbol{l}_1=(\cos\alpha_1,\sin\alpha_1)$,$\boldsymbol{l}_2=(\cos\alpha_2,\sin\alpha_2)$,$\alpha_2-\alpha_1=\varphi$.则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_1+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha_1,\\[2ex]\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_2+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha_2,\end{cases}\qquad\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2\end{vmatrix}=\sin\varphi.$$

由此易知

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|=\frac{1}{\sin\varphi}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1} & \sin\alpha_1\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2} & \sin\alpha_2\end{vmatrix}\leqslant\frac{1}{\sin\varphi}\sum_{i=1}^{2}\left|\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}\sin\alpha_i\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right)^2}.$$

故(i)为真,类似地可推得(ii).

注 由上述结论可推知,若对任一点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0, y_0)$上,$f(x,y)$沿两个不共线方向上的方向导数均为 0,则 $f(x)\equiv C$(常数).

(2)(i) 由题设可求出三个方向的方向导数各为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_1+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta_1+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma_1,\\
\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_2+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta_2+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma_2,\\
\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_3}&=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha_3+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta_3+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma_3.
\end{aligned} \tag{①}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
I=&\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2(\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3)\\
&+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2(\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3)+2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\cos\alpha_1\cdot\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cdot\cos\beta_2\\
&+\cos\alpha_3\cdot\cos\beta_3)+2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}(\cos\alpha_1\cdot\cos\gamma_1+\cos\alpha_2\cdot\cos\gamma_2+\cos\alpha_3\cdot\cos\gamma_3)\\
&+2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}(\cos\beta_1\cdot\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cdot\cos\gamma_2+\cos\beta_3\cdot\cos\gamma_3).
\end{aligned} \tag{②}$$

注意到矩阵

$$\begin{pmatrix}
\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\
\cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\
\cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3
\end{pmatrix} \tag{③}$$

是从标准正交基到标准正交基$(\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2,\boldsymbol{l}_3)$的变换矩阵,故其任一行(列)之元素的平方和均等于 1,任两行(列)相应元素的乘积之和等于 0.从而知式②中$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$,$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$,$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$的系数均为 1,而$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$,$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}$,$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}$的系数均为 0.因此依式②立即得证.

(ii) 根据式①可导出

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{l}_1^2}=&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\alpha_1+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\beta_1+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cos^2\gamma_1+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\alpha_1\cdot\cos\beta_1\\
&+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\cos\alpha_1\cdot\cos\gamma_1+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\cos\beta_1\cdot\cos\gamma_1.
\end{aligned}$$

类似地(利用对称性)可得$\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{l}_2^2}$,$\frac{\partial^2 f}{\partial \boldsymbol{l}_3^2}$的表达式.从而我们有

$$J=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos^2\alpha_1+\cos^2\alpha_2+\cos^2\alpha_3)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos^2\beta_1+\cos^2\beta_2+\cos^2\beta_3)$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\cos^2\gamma_1+\cos^2\gamma_2+\cos^2\gamma_3)+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\cos\alpha_1\cdot\cos\beta_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2$$

$$+\cos\alpha_3\cos\beta_3)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(\cos\alpha_1\cdot\cos\gamma_1+\cos\alpha_2\cdot\cos\gamma_2+\cos\alpha_3\cdot\cos\gamma_3)$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(\cos\beta_1\cdot\cos\gamma_1+\cos\beta_2\cdot\cos\gamma_2+\cos\beta_3\cdot\cos\gamma_3).$$

再应用矩阵③的性质,即可得证.

(3)采用矩阵写法,我们有($(\boldsymbol{l}_1,x)$表示 $\boldsymbol{l}_1$ 与 Ox 轴正向之交角)

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1} & \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2} & \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}_1)\\ \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}_2)\\ \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}_3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\boldsymbol{l}_1,x) & \cos(\boldsymbol{l}_2,y) & \cos(\boldsymbol{l}_3,z)\\ \cos(\boldsymbol{l},x) & \cos(\boldsymbol{l}_2,y) & \cos(\boldsymbol{l}_3,z)\\ \cos(\boldsymbol{l},x) & \cos(\boldsymbol{l}_2,y) & \cos(\boldsymbol{l}_3,z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}_1)\\ \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}_2)\\ \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}_3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\boldsymbol{l},x)\\ \cos(\boldsymbol{l},y)\\ \cos(\boldsymbol{l},z)\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}.$$

例 2.5.6 下述梯度运算公式成立.

(1)设 $f(x,y)$,$g(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上可微,则

(i) $\mathrm{grad}(f\cdot g)=f\cdot\mathrm{grad}(g)+g\cdot\mathrm{grad}(f)$.

(ii) $\mathrm{grad}\left(\frac{1}{f}\right)=-\frac{1}{f^2}\cdot\mathrm{grad}(f)\quad(x\in\mathbf{R}^2\setminus\{0\})$.

(2) $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上可微,$g(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上可微,则

$$\mathrm{grad}(g[f(x,y)])=g'[f(x,y)]\cdot\mathrm{grad}(f).$$

证明略.

例 2.5.7 解答下列问题:

(1)设 $u=x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2$,试求其在点$(x,y,z)$处沿向径 $\boldsymbol{r}=(x/r,y/r,z/r)$($r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$)方向的方向导数.又问何时此方向导数值等于其在该点之梯度的绝对值.

(2)设 $u=x(x^2+y^2+z^2)^{-1}$,试求其在点 $\boldsymbol{X}_1=(1,2,2)$,$\boldsymbol{X}_2=(-3,1,0)$处两梯度之间的夹角 φ.

(3) 试求 $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的梯度,又问在何处该梯度垂直于 z 轴? 平行于 z 轴? 何时为零向量?

(4) 设 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$,$a^2+b^2+c^2\neq 0$.试求

$$u=ax^2+by^2+cz^2,\quad v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$$

在 $\boldsymbol{X}_0$ 处两梯度间的夹角 φ,且求 $\lim\limits_{|\boldsymbol{X}_0|\to+\infty}\varphi$.

解 (1) 由题设知

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{x}{r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{z}{r}$$

$$=\frac{2x}{a^2}\frac{x}{r}+\frac{2y}{b^2}\frac{y}{r}+\frac{2z}{c^2}\frac{z}{r}=\frac{2u}{r},$$

又有 $|\mathrm{grad}(u)|_{x_0}=2\sqrt{x^2/a^4+y^2/b^4+z^2/c^4}$.从而根据等式

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}}\right|_{x_0}=|\mathrm{grad}(u)|_{x_0}\quad 得\quad \frac{u}{r}=\sqrt{x^2/a^4+y^2/b^4+z^2/c^4}.$$

即 $a=b=c$ 时其值相等.

(2) 先求 u 的三个偏导数,我们有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

由此易知

$$\mathrm{grad}(u)|_{x_1}=\left(\frac{7}{81},\frac{-4}{81},\frac{-4}{81}\right),\qquad \mathrm{grad}(u)|_{x_2}=\left(\frac{-2}{25},\frac{3}{50},0\right).$$

从而可得

$$\cos\varphi=\frac{(\mathrm{grad}(u)|_{x_1},\mathrm{grad}(u)|_{x_2})}{|\mathrm{grad}(u)|_{x_1}|\mathrm{grad}(u)|_{x_2}}=-\frac{8}{9}.$$

(3) 依据题设,可算出梯度为

$$\mathrm{grad}(u)=(3x^2-3yz)\boldsymbol{i}+(3y^2-3xz)\boldsymbol{j}+(3z^2-3xy)\boldsymbol{k}.$$

从而可知

(i) $\mathrm{grad}(u)\perp Oz$ 即 $\mathrm{grad}(u)\cdot\boldsymbol{k}=0$.我们有 $3z^2-3xy=0$,或 $z^2=xy$.

(ii) $\mathrm{grad}(u)/\!/ Oz$ 即

$$3x^2-3yz=0,\quad 3y^2-3xz=0.$$

解此方程组,可解出 $x=y=0$ 以及 $x=y=z$.这说明在两个点:$\boldsymbol{X}_1=(0,0,z)$,$\boldsymbol{X}_2=(x,y,z)|_{x=y=z}$ 处有此性质.

(iii) 梯度值为 0 即得方程组

$$3x^2-3yz=0,\quad 3y^2-3xz=0,\quad 3z^2-3xy=0.$$

解之有 $x=y=z$.

(4) 由题设易知两梯度向量为

$$\operatorname{grad}(u)|_{x_0}=(2ax_0,2by_0,2cz_0),$$

$$\operatorname{grad}(v)|_{x_0}=(2ax_0+2m,2by_0+2n,2cz_0+2p).$$

从而可得 $|\operatorname{grad}(u)|_{x_0}=2\sqrt{(ax_0)^2+(by_0)^2+(cy_0)^2}$,以及

$$|\operatorname{grad}(v)|_{x_0}=2\sqrt{(ax_0+m)^2+(by_0+n)^2+(cz_0+p)^2}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{(\operatorname{grad}(u),\operatorname{grad}(v))}{|\operatorname{grad}(u)|\cdot|\operatorname{grad}(v)|}\\&=\frac{ax_0(ax_0+m)+by_0(by_0+n)+cz_0(cz_0+p)}{\sqrt{[(ax_0)^2+(by_0)^2+(cz_0)^2][(ax_0+m)^2+(by_0+n)^2+(cz_0+p)^2]}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\sin\varphi|&=\sqrt{1-\cos^2\varphi}\\&=\sqrt{\frac{(ax_0n-by_0m)^2+(ax_0p-cz_0m)^2+(by_0p-cz_0n)^2}{[(ax_0)^2+(by_0)^2+(cz_0)^2][(ax_0+m)^2+(by_0+n)^2+(cz_0+p)^2]}}.\end{aligned}$$

应用不等式 $2|x_0y_0|\leqslant x_0^2+y_0^2$,$2|x_0z_0|\leqslant x_0^2+z_0^2$,$2|y_0z_0|\leqslant y_0^2+z_0^2$,并以 A^2 记 x_0^2,y_0^2,z_0^2 的系数绝对值之最大者,可得估计

$$(ax_0n-by_0m)^2+(ax_0p-cz_0m)^2+(by_0p-cz_0n)^2\leqslant A^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2).$$

不失普通性,可假定 $a\neq0$,$b\neq0$,$c\neq0$.且记 $B=\min\{|a|,|b|,|c|\}$,则 $a^2x_0^2+b^2y_0^2+c^2z_0^2\geqslant B^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$.从而得估计

$$0\leqslant|\sin\varphi|\leqslant\frac{A\cdot\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}{B\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\cdot\sqrt{(ax_0+m)^2+(by_0+n)^2+(cz_0+p)^2}}$$

$$=\frac{A}{B\sqrt{(ax_0+m)^2+(by_0+n)^2+(cz_0+p)^2}}\to0\quad\left(\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}\to+\infty\right).$$

这说明 $\sin\varphi\to0$,$\varphi\to0$ $(x_0^2+y_0^2+z_0^2\to+\infty)$.

例 2.5.8　试证明下列命题:

(1) 设 $z=f(x,y)$在区域 $x^2+y^2>0$ 上可微.令 $x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,并在点(x,y)处作单位向量 $\boldsymbol{e}_r$,$\boldsymbol{e}_\theta$($\boldsymbol{e}_r$ 表示 θ 固定沿 r 增加的方向,$\boldsymbol{e}_\theta$ 表示 r 固定而沿 θ 增加的方向),则

$$\frac{\partial z}{\partial\boldsymbol{e}_r}=\frac{\partial z}{\partial r},\quad\frac{\partial z}{\partial\boldsymbol{e}_\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\quad\left(\operatorname{grad}(z)=\frac{\partial z}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta\right).$$

(2) 一个三元函数在球坐标系

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi$$

下为 $u=f(r,\theta,\varphi)$,则在正交系:$\boldsymbol{e}_r$,$\boldsymbol{e}_\theta$,$\boldsymbol{e}_\varphi$ 下梯度可表示为

$$\operatorname{grad}(u)=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

(3) 设 $z=\ln(x^2+y^2)$，$\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)\neq(0,0)$，$\boldsymbol{l}$ 为过 $\boldsymbol{X}_0$ 且垂直于该曲面的等位线的单位向量，则

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{X_0}=2/\sqrt{x_0^2+y_0^2}.$$

证明　(1) 易知 $\boldsymbol{e}_r=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\boldsymbol{e}_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta)$，故可得 $\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{e}_r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$，$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{e}_\theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\theta$. 注意到

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,\quad \frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta,$$

则有 $\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{e}_r}=\frac{\partial z}{\partial r}$，$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{e}_\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}$，且梯度公式成立.

注　由上可知，若 $z=f(x,y)$ 在每点 (x,y) 处的梯度向量与向量 (x,y) 相同，则 $f(x,y)=g(r)$. 这只需注意梯度公式中第二项 $\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta$ 为 0，即 $\frac{\partial z}{\partial \theta}\equiv 0$.

(2) 只需注意表达式

$$\boldsymbol{e}_r=(\sin\varphi\cos\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\varphi),$$
$$\boldsymbol{e}_\theta=(-\sin\varphi\sin\theta,\sin\varphi\cos\theta,0),$$
$$\boldsymbol{e}_\varphi=(\cos\varphi\cos\theta,\cos\varphi\sin\theta,-\sin\varphi).$$

(3) 因为梯度向量是垂直于等位线 $\ln(x^2+y^2)=C$ 的，所以有

$$\cos\alpha=\frac{\partial z}{\partial x}\Big/|\operatorname{grad}(z)|,\quad \cos\beta=\frac{\partial z}{\partial y}\Big/|\operatorname{grad}(z)|.$$

此外，经计算易知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2},\quad |\operatorname{grad}(z)|=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

从而得到 $\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{z_0}=2/\sqrt{x_0^2+y_0^2}$.

2.6　Taylor 公式(以二元函数为例)

定理 2.6.1　设 D 是平面凸域，$f\in C^{(n+1)}(D)$，$(x_0,y_0)\in D$，则对 D 内任意点 $(x_0+h,y_0+k)\in D$，成立

$$f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\quad(0<\theta<1),$$

这里记号 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)$ 理解为算子 $h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}$ 连续 m 次作用到函数 $f(x,y)$，得

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x,y)=\sum_{r=0}^{m}C_m^r h^{m-r}k^r\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^{m-r}\partial y^r},$$

然后再用 $x=x_0$, $y=y_0$ 代入.公式中余项也作同样理解.

定理 2.6.2(带 Peano 余项的 Taylor 公式) 记点(x_0,y_0)的邻域为 U.若 $f\in C^{(n)}(U)$,则

$$f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)+o(\rho^n)\quad(\rho\to 0).$$

其中 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$.

注 定理 2.6.2 中当 $n=2$ 时,有

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)=&f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}k\\&+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}k^2\right]+o(\rho^2)\quad(\rho\to 0).\end{aligned}\tag{①}$$

定义 2.6.1 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的凸区域,$f\in C^{(2)}(D)$,$(x_0,y_0)\in D$,则称

$$H_f(x_0,y_0)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\\ \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\end{bmatrix}$$

为 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的 Hesse(黑塞)矩阵.此时公式①可写为

$$\begin{aligned}f(x_0+h,y_0+k)=&f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}\\&+\frac{1}{2}(h\quad k)H_f(x_0,y_0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o(\rho^2)\quad(\rho\to 0).\end{aligned}$$

定理 2.6.3 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的凸区域,$f(x,y)\in C^{(2)}(D)$,则下列命题等价:

(1) $f(x,y)$是 D 上的凸函数.

(2) 对任给$(x_0,y_0)\in D$,有

$$f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0).$$

(3) 对任给$(x_0,y_0)\in D$,Hesse 矩阵 $H_f(x_0,y_0)$半正定.

例 2.6.1 试求函数 $f(x,y)=e^x\sin y$ 在点(0,0)处的 Taylor 展式.

解 注意到 $f(0,0)=0$,可知

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,0)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!x^m y^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{x^m y^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(0,0)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}.\end{aligned}$$

令 $n-m=k$,又得

$$f(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m y^k}{m!k!}\frac{\partial^{m+k}f(0,0)}{\partial x^m\partial y^k}.$$

注意到$\dfrac{\partial^{m+k}f(x,y)}{\partial x^m\partial y^k}=\mathrm{e}^x\cdot\sin(y+k\pi/2)$,故有

$$\frac{\partial^{m+k}f(0,0)}{\partial x^m\partial y^k}=\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^n & k=2n+1,\\ 0, & k=2n.\end{cases}$$

$$\mathrm{e}^x\sin y=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^m y^{2n+1}}{m!(2n+1)!}\quad(|x|,|y|<+\infty).$$

例 2.6.2 试求下列函数在点(0,0)处的 Taylor 展式前若干项.

(1) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. (2) $f(x,y)=(1-x^2-y^2)^{-1/2}$.

(3) $f(x,y)=\arctan\dfrac{1+x+y}{1-x+y}$. (4) $f(x,y)=\ln(1-x)\ln(1-y)$.

(5) $f(x,y)=\cos x/\cos y$.

解 (1) 记 $g(x,y)=1-x^2-y^2$,则求导可知

$f'_x=-x/g^{1/2}$, $f'_y=-y/g^{1/2}$;

$f''_{xx}=-(1-y^2)/g^{3/2}$, $f''_{xy}=-xy/g^{3/2}$, $f''_{yy}=-(1-x^2)/g^{3/2}$;

$f'''_{xxx}=-3x(1-y^2)/g^{5/2}$, $f'''_{xxy}=-y(1+2x^2-y^2)/g^{5/2}$,

$f'''_{xyy}=-x(1-x^2+2y^2)/g^{5/2}$, $f'''_{yyy}=-3y(1-x^2)/g^{5/2}$;⋯.

由此易得 $f(0,0)=1$, $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$,以及

$$f''_{xx}(0,0)=f''_{yy}(0,0)=-1,\quad f''_{xy}(0,0)=0;$$

$$f'''_{xxx}(0,0)=f'''_{xxy}(0,0)=f'''_{xyy}(0,0)=f'''_{yyy}(0,0)=0.$$

进一步计算还能算出 $f^{(4)}_{x^4}(0,0)=f^{(4)}_{y^4}(0,0)=-3$,以及

$$f^{(4)}_{x^3y}(0,0)=f^{(4)}_{xy^3}(0,0)=0,\quad f^{(4)}_{x^2y^2}(0,0)=-1.$$

从而我们有

$$\sqrt{1-x^2-y^2}=1-\frac{1}{2!}(x^2+y^2)+\frac{1}{4!}(-3x^4-6x^2y^2-3y^4)+\cdots.$$

(2) 经计算易知 $f(0,0)=1$, $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$;还有

$f''_{xx}(0,0)=f''_{yy}(0,0)=1$, $f''_{xy}(0,0)=0$;

$f'''_{xxx}(0,0)=f'''_{xxy}(0,0)=f'''_{xyy}(0,0)=f'''_{yyy}(0,0)=0$.

$f^{(4)}_{x^4}(0,0)=f^{(4)}_{y^4}(0,0)=0$, $f^{(4)}_{x^3y}(0,0)=f^{(4)}_{xy^3}(0,0)=0$, $f^{(4)}_{x^2y^2}(0,0)=3$.

从而我们有

$$(1-x^2-y^2)^{-1/2}=1+\frac{1}{2!}(x^2+y^2)+\frac{1}{4}(9x^4+6\cdot 3x^2y^2+9x^4)+\cdots.$$

(3) 注意到公式 $\arctan\alpha+\arctan\beta=\arctan[(\alpha+\beta)/(1-\alpha\beta)]$,可知

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\arctan 1+\arctan[x/(1+y)]\\&=\frac{\pi}{4}+\frac{x}{1+y}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+y}\right)^3+o(x^4)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4} + x(1 - y + y^2 - y^3 + y^4 + o(y^4)) \\
&\quad - \frac{1}{3}x^3(1 - y + y^2 - y^3 + y^4 + o(y^4))^3 + o(x^4) \\
&= \frac{\pi}{4} + x - xy + xy^2 - xy^3 - \frac{1}{3}x^3 + o(y^4) + o(x^4) \quad (x, y \to 0).
\end{aligned}
$$

(4) $$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \left(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}x^m/m\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}y^n/n\right) \\
&= \sum_{m=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}(-1)^{m+n}\frac{x^m y^n}{mn} + o(x^4) + o(y^4) \quad (x, y \to 0).
\end{aligned}
$$

(5) $$
\begin{aligned}
f(x,y) &= (1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^4))(1 - \sin^2 y)^{-1/2} \\
&= (1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^4))(1 + \sin^2 y/2 + 3\sin^4 y/8 + o(y^4)) \\
&= (1 - x^2/2 + x^4/4! + o(x^4))[1 + (y - y^3/6 + o(y^4))^2/2 + o(y^4)] \\
&= 1 - (x^2 + y^2)/2 + x^4/4 - y^4/6 - x^2y^2/4 + o(x^4) + o(y^4) \quad (x, y \to 0).
\end{aligned}
$$

例 2.6.3 试求下列函数在指定点处的 Taylor 展式.

(1) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $(1,1,1)$.

(2) $f(x,y) = x^y$, $(1,1)$(展到三次项).

证明 (1) 注意到 f 的高于三阶偏导数均为 0,以及 $f(1,1,1)=0$,$f'_x(1,1,1)=f'_y(1,1,1)=f'_z(1,1,1)=0$,可得

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) = 3[&(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) \\
&- (y-1)(z-1) + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 \\
&- 3(x-1)(y-1)(z-1)].
\end{aligned}
$$

(2) 求偏导数:$f'_x = yx^{y-1}$, $f'_y = x^y \ln x$;以及

$$
\begin{aligned}
&f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f''_{xy} = (1 + y\ln x)x^{y-1}, \quad f''_{yy} = x^y \ln^2 x; \\
&f'''_{x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-3}, \quad f'''_{x^2y} = [2y - 1 + y(y-1)\ln x]x^{y-2}, \\
&f'''_{xy^2} = (y\ln^2 x + 2\ln x)x^{y-1}, \quad f'''_{y^3} = x^y \ln^3 x.
\end{aligned}
$$

由此立即可知它们在点(1,1)处的值.从而有展式

$$
f(x,y) = 1 + \mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y + R_2(1 + \theta\mathrm{d}x, 1 + \theta\mathrm{d}y),
$$

其中 $\mathrm{d}x = x - 1$, $\mathrm{d}y = y - 1$, $0 < \theta < 1$,以及

$$
\begin{aligned}
R_2(x,y) &= \frac{1}{6}\mathrm{d}^3 f(x,y) \\
&= \frac{xy}{6}\left(\frac{y(y-1)(y-2)}{x^3}(\mathrm{d}x)^3\right) + 3\frac{2y - 1 + y(y-1)\ln x}{x^2}(\mathrm{d}x)^2\mathrm{d}y \\
&\quad + 3\frac{y\ln^2 x + 2\ln x}{x}\mathrm{d}x(\mathrm{d}y)^2 + \ln^3 x \cdot (\mathrm{d}y)^3.
\end{aligned}
$$

例 2.6.4　解答下列问题:

(1) 试求由方程 $u=a+e\sin u$ 确定的函数 $u(e,a)$ 对 e 的 Taylor 展式(a 是常数,展到第四项).

(2) 试证明方程 $x^m+ax+b=0$ 之根 x 有展式

$$x=\frac{b}{a}-\frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^m+\frac{2m}{2!}\frac{1}{a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{2m-1}-\frac{3m(3m-1)}{3!}\frac{1}{a^3}\left(\frac{b}{a}\right)^{3m-2}+\cdots.$$

解　(1) (参阅 2.3 节例 2.3.3(3))我们有 $\dfrac{\partial^n u}{\partial e^n}=\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\sin^n u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial a}\right)$,故

$$u(0,a)=a,\quad \frac{\partial^n u(0,a)}{\partial e^n}=\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}a^{n-1}}(\sin^n a\cdot 1)\quad\left(\frac{\partial u}{\partial a}=1\right).$$

代入 $u(e,a)=u(0,a)+\dfrac{\partial u(0,a)}{\partial e}e+\dfrac{1}{2!}\dfrac{\partial^2 u(0,a)}{\partial e^2}e^2+\cdots$,可知

$$\begin{aligned}u(e,a)&=a+e\sin a+\frac{e^2}{2!}2\sin a\cos a+\frac{e^3}{3!}(3\sin^2 a\cos a)'_a+\cdots\\&=a+e\sin a+e^2\sin a\cos a+\frac{e^3}{2}\sin a(\cos^2 a+\cos 2a)+\cdots.\end{aligned}$$

(2) 想到 2.3 节例 2.3.3(3)之所示,改写原式为

$$x=\frac{b}{a}+\frac{1}{a}(-x^m)=p+q\varphi(x)\quad\left(p=\frac{b}{a},q=\frac{1}{a},\varphi(x)=-x^m\right),$$

则隐函数 $x(p,q)$ 可展成

$$x(p,q)=x(p,0)+q\frac{\partial x(p,0)}{\partial q}+\frac{q^2}{2!}\frac{\partial^2(p,0)}{\partial q^2}+\frac{q^3}{3!}\frac{\partial^3 x(p,0)}{\partial q^3}+\cdots.$$

首先,我们有 $x(p,0)=p$,以及

$$\frac{\partial x}{\partial p}=1+q\varphi'(x)\frac{\partial x}{\partial p},\quad \frac{\partial x(p,0)}{\partial p}=1.$$

其次,依据 2.3 节例 2.3.3(3)之公式 $\dfrac{\partial^n x}{\partial q^n}=\left[\varphi^n(x)\dfrac{\partial x}{\partial p}\right]$,且取 $q=0$,$[\varphi(x)]_{q=0}=\varphi(p)=-p^m$,可得

$$\frac{\partial^n x(p,0)}{\partial q^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}}[(-p^m)^n\cdot 1]=\frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}}[(-1)^n p^{mn}].$$

从而可知 $\dfrac{\partial x(p,0)}{\partial q}=-p^m$,$\dfrac{\partial^2 x(p,0)}{\partial q^2}=\dfrac{\partial}{\partial p}(p^{2m})=2mp^{2m-1}$,以及

$$\frac{\partial^3 x(p,0)}{\partial q^3}=\frac{\partial^2}{\partial p^2}(-p^{2m})=-3m(3m-1)p^{2m-2},\cdots.$$

因此,最后展式为

$$x(p,q)=p-qp^m+\frac{2m}{2!}q^2p^{2m-1}-\frac{3m(3m-1)}{3!}q^3p^{2m-2}+\cdots,$$

$$x=\frac{b}{a}-\frac{1}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^m+\frac{2m}{2!}\frac{1}{a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{2m-1}-\frac{3m(3m-1)}{3!}\frac{1}{a^2}\left(\frac{b}{a}\right)^{2m-2}+\cdots.$$

例 2.6.5　解答下列问题：

(1) 设 $f(x,y)$是任意次可微的,试将函数

(i) $F(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)$展成点(0,0)处的 Taylor 级数.

(ii) $F(x,y)=\frac{1}{4}[f(x+h,y)+f(x,y+h)+f(x-h,y)+f(x,y-h)]-f(x,y)$展成点(0,0)处的 Taylor 级数精确到 h^4 项.

(2) 设 $f(x+\rho\cos\varphi,y+\rho\sin\varphi)$是任意次可微函数,且可以展成关于 ρ的幂级数,试将函数

$$F(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+\rho\cos\varphi,y+\rho\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

展成关于 ρ的幂级数.

解　(1) (i) 对 $f(x+h,y+k)$,依据 Taylor 展式易知

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y),\qquad ①$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}h^mk^{n-m}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}$$

$$=\sum_{m=1}^{n-1}\frac{n!}{m!(n-m)!}h^mk^{n-m}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}+h^n\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}+k^n\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}.$$

从而式①成为

$$f(x+h,y+k)=f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^mk^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+k^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right).$$

利用此式,还可得出

$$f(x+h,y)=f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n},$$

$$f(x,y+k)=f(x,y)+k\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{k^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}.$$

最后,我们有

$$F(x,y)=hk\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m\partial y^{n-m}}.$$

(ii) 依据展式,我们有

$$\begin{aligned}F(x,y)=\frac{1}{4}\Big[&f+hf'_x+\frac{h^2}{2}f''_{xx}+\frac{h^3}{6}f'''_{x^3}+\frac{h^4}{24}f^{(4)}_{x^4}+o(h^4)+f+hf'_y+\frac{h^2}{2}f''_{y^2}\\&+\frac{h^3}{6}f'''_{y^3}+\frac{h^4}{24}f^{(4)}_{y^4}+o(h^4)+f-hf'_x+\frac{h^2}{2}f''_{x^2}+\frac{h^3}{6}f'''_{x^3}+\frac{h^4}{24}f^{(4)}_{x^4}+o(h^4)\\&+f-hf'_y+\frac{h^2}{2}f''_{y^2}-\frac{h^3}{6}f'''_{y^3}+\frac{h^4}{24}f^{(4)}_{y^4}+o(h^4)\Big]-f\quad(h\to0).\end{aligned}$$

由此即可得出

$$\begin{aligned}F(x,y)=&\frac{h^2}{4}(f''_{x^2}(x,y)+f''_{y^2}(x,y))\\&+\frac{h^4}{48}(f^{(4)}_{x^4}(x,y)+f^{(4)}_{y^4}(x,y))+o(h^4)\quad(h\to0).\end{aligned}$$

(2) 按展式可知

$$f(x+\rho\cos\varphi,y+\rho\sin\varphi)=f(x,y)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y).$$

在上式对 φ 作逐项积分,可得(记左端为 $F(\rho)$)

$$F(\rho)=f(x,y)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)\mathrm{d}\varphi.$$

因此我们有公式

$$\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varphi\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^j\partial y^{k-j}}\cos^j\varphi\cdot\sin^{k-j}\varphi,$$

所以前式 $F(\rho)$ 又可写成

$$F(\rho)=f(x,y)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{\partial^k f(x,y)}{\partial x^j\partial y^{k-j}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^j\varphi\cdot\sin^{k-j}\varphi\mathrm{d}\varphi.\quad ②$$

现在来估算

$$I(j,k-j)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^j\varphi\cdot\sin^{k-j}\varphi\mathrm{d}\varphi.\qquad ③$$

若 $j=2m-1$,则 $\cos^j\varphi\cdot\sin^{k-j}\varphi\mathrm{d}\varphi=P_{k-1}(\sin\varphi)\mathrm{d}\sin\varphi$,其中 $P_{k-1}(\sin\varphi)$是 $k-1$ 次多项式.由此可知

$$I(2m-1,k-2m+1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_{k-1}(\sin\varphi)\mathrm{d}\sin\varphi=0.$$

类似地,若 $k=2n-1$,也可得 $I(j,2n-1-j)=0$.因此,积分③只在 $k=2n,j=2m$ 时不等于 0:

$$I(2m,2n-2m)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^{2m}\varphi\cdot\sin^{2n-2m}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

应用分部积分公式,我们有

$$I(2m,2n-2m)=\frac{2m-1}{2n-2m+1}I(2m-2,2n-2m+2).$$

$$=\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1\cdot I(0,2n)}{(2n-2m+1)(2n-2m+3)\cdots(2n-3)(2n-1)}$$

$$=\frac{(2m-1)!!(2n-2m-1)!!}{(2n-1)!!}I(0,2n).$$

注意到 $I(0,2n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\varphi\mathrm{d}\varphi=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\varphi\mathrm{d}\varphi=\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$,故知

$$I(2m,2n-2m)=\frac{(2m-1)!!(2n-2m-1)!!}{(2n-1)!!}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$=\frac{(2m-1)!!(2n-2m-1)!!}{(2n)!!}.$$

又注意到 $(2k-1)!!=(2k)!/2^k k!$,最后导出

$$I(2m,2n-2m)=\frac{(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n}\cdot n!\cdot m!(n-m)!}.$$

在式②中,以 $2n$ 代 k,$2m$ 代 j,再用上式即得

$$F(\rho)=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho^{2n}}{(2n)!}\sum_{m=0}^{n}\frac{(2n)!}{(2m)!(2n-2m)!}\frac{(2m)!(2n-2m)!}{2^{2n}\cdot n!m!(n-m)!}\frac{\partial^{2n}f(x,y)}{\partial x^{2m}\partial y^{2n-2m}}$$

$$=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\rho/2)^{2n}}{(n!)^2}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{\partial^{2n}f(x,y)}{\partial x^{2m}\partial y^{2n-2m}}$$

$$=f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n f(x,y).$$

例 2.6.6 试证明下列命题:

(1) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数,且有

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|\leqslant M,\quad\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\leqslant M\quad(x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

则 $|f(\boldsymbol{P})-f(\boldsymbol{Q})|\leqslant\sqrt{2}M\|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}\|$,其中 $\boldsymbol{P}=(x',y')$,$\boldsymbol{Q}=(x'',y'')$是 $\mathbf{R}^2$ 中任意两点,$\|\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}\|=((x'-x'')^2+(y'-y'')^2)^{1/2}$.

(2) 设在 $\mathbf{R}^3$ 上定义的 $u=f(x,y,z)$是 z 的连续函数,且$\dfrac{\partial f}{\partial x}$,$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在 $\mathbf{R}^3$ 上连续,则 u 在 $\mathbf{R}^3$ 上连续.

(3) 设 $f(x,y)$在原点附近有二阶连续偏导数,则

$$I=\lim_{h\to 0}\frac{f(2h,\mathrm{e}^{-1/2h})-2f(h,\mathrm{e}^{-1/h})+f(0,0)}{h^2}=f''_{xx}(0,0).$$

证明 (1) 采用插入项并用 Taylor(中值)公式

$$
\begin{aligned}
&|f(\boldsymbol{P})-f(\boldsymbol{Q})|=|f(x',y')-f(x'',y'')|\\
\leqslant&|f(x',y')-f(x'',y')|+|f(x'',y')-f(x'',y'')|\\
=&|f'_x(x'+\theta(x''-x'),y')||x'-x''|+|f'_y(x'',y'+\theta(y''-y'))||y''-y'|\\
\leqslant&M(|x'-x''|+|y'-y''|)\leqslant M\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}.
\end{aligned}
$$

(2) 任意取定 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbf{R}^2$,并作闭区域:

$$D=\{(x,y,z):|x-x_0|\leqslant 1,|y-y_0|\leqslant 1,|z-z_0|\leqslant 1\},$$

再取 $M>0$,使得

$$\left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right|\leqslant M,\quad \left|\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right|\leqslant M\quad (x,y,z)\in D.$$

由此可知(Taylor 中值公式)

$$
\begin{aligned}
&|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)|\\
\leqslant&|f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)|\\
&+|f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)|\\
\leqslant&|f'_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta x|+|f'_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta y|\\
&+|f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)|\\
\leqslant&M|\Delta x|+M|\Delta y|+\varepsilon\quad(|\Delta z|<\delta)\\
<&M(\varepsilon/M)+M(\varepsilon/M)+\varepsilon<3\varepsilon\quad(|\Delta x|,|\Delta y|<\varepsilon/M<\delta).
\end{aligned}
$$

(3) 依据 Taylor(中值)公式,可知

$$
\begin{aligned}
f(2h,\mathrm{e}^{-2h})=&f(0,0)+f'_x(0,0)2h+f'_y(0,0)\mathrm{e}^{-1/2h}\\
&+\frac{1}{2}f''_{xx}(2\theta_1 h,\theta_1\mathrm{e}^{-1/2h})(2h)^2+f''_{xy}(2\theta_1 h,\theta_1\mathrm{e}^{-1/2h})\cdot 2h\cdot\mathrm{e}^{-1/2h}\\
&+\frac{1}{2}f''_{yy}(2\theta_1 h,\theta_1\mathrm{e}^{-1/2h})\mathrm{e}^{-1/2h},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2f(h,\mathrm{e}^{-1/h})=&2f(0,0)+f'_x(0,0)2h+f'_y(0,0)2\mathrm{e}^{-1/h}+f''_{xx}(\theta_2 h,\theta_2\mathrm{e}^{-1/h})h^2\\
&+2f''_{xy}(\theta_2 h,\theta_2\mathrm{e}^{-1/h})h\mathrm{e}^{-1/h}+f''_{yy}(\theta_2 h,\theta_2\mathrm{e}^{-1/h})\mathrm{e}^{-2/h}.
\end{aligned}
$$

依题设知 $\mathrm{e}^{-1/h}=o(h^2)(h\to 0)$可得

$$
\begin{aligned}
&f'_y(0,0)(\mathrm{e}^{-1/2h}-2\mathrm{e}^{-1/h})+2h[f''_{xy}(\xi_1,\eta_1)\mathrm{e}^{-1/2h}-f''_{xy}(\xi_2,\eta_2)\mathrm{e}^{-1/h}]\\
&+\left[\frac{1}{2}f''_{yy}(\xi_1,\eta_1)\mathrm{e}^{-1/h}-f''_{yy}(\xi_2,\eta_2)\mathrm{e}^{-2/h}\right]=o(h^2)\quad(h\to 0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(2h,\mathrm{e}^{-1/2h})-2f(h,\mathrm{e}^{-1/h})+f(0,0)\\
=&[2f''_{xx}(\xi_1,\eta_1)-f''_{xx}(\xi_2,\eta_2)]h^2+o(h^2)\quad(h\to 0),
\end{aligned}
$$

其中 $\xi_1=2\theta_1 h,\eta_1=\theta_1\mathrm{e}^{-1/2h},\xi_2=\theta_2 h,\eta_2=\theta_2\mathrm{e}^{-1/h},0<\theta_1,\theta_2<1$.从而根据 f''_{xx} 的连续性,即得 $I=f''_{xx}(0,0)$.

例 2.6.7　试证明下列命题:

(1) 设方程组$\begin{cases} x=f(x,y), \\ y=g(x,y) \end{cases}$有解 ξ,η,且其近似解列$\{x_i\}$,$\{y_i\}$为 $x_i=f(x_{i-1},y_{i-1})$,$y_i=g(x_{i-1},y_{i-1})$($i=1,2,\cdots$),其中 $f(x,y)$与 $g(x,y)$可微.若在点(ξ,η)的某邻域上有

$$|f'_x(x,y)|+|g'_x(x,y)|\leqslant M,\quad |f'_y(x,y)|+|g'_y(x,y)|\leqslant M,$$

则 $|\xi-x_n|+|\eta-y_n|\leqslant M^n(|\xi-x_0|+|\eta-y_0|)$.

(2) 设定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的 $f(x,y)$满足((x,y),(x_1,y_1),$(x_2,y_2)\in\mathbf{R}^2$)

(i) 存在极限$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(tx,ty)-f(0,0)}{t}=g(x,y)$;

(ii) $g(\alpha x_1+\beta x_2,\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha g(x_1,y_1)+\beta g(x_2,y_2)$;

(iii) 存在 $M>0$,使得

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

则 $f(x,y)=f(0,0)+g(x,y)+o(\rho)$ ($\rho=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\to 0$).

证明 (1) (i) 因为我们有($0<\theta<1$)

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(\xi,\eta)=&(x-\xi)f'_x(\xi+\theta(x-\xi),\eta+\theta(y-\eta)) \\ &+(y-\eta)f'_y(\xi+\theta(x-\xi),\eta+\theta(y-\eta)), \end{aligned}$$

所以可得($0<\theta<1$)

$$\begin{aligned} f(x_i,y_i)-f(\xi,\eta)=&(x_i-\xi)f'_x(\xi+\theta(x_i-\xi),\eta+\theta(y_i-\eta)) \\ &+(y_i-\eta)f'_y(\xi+\theta(x_i-\xi),\eta+\theta(y_i-\eta)), \\ x_{i+1}-\xi=&(x_i-\xi)f'_x(\xi+\theta(x_i-\xi),\eta+\theta(y_i-\eta)) \\ &+(y_i-\eta)f'_y(\xi+\theta(x_i-\xi),\eta+\theta(y_i-\eta)). \end{aligned}$$

同理还有($0<\theta'<1$)

$$\begin{aligned} y_{i+1}-\eta=&(x_i-\xi)g'_x(\xi+\theta'(x_i-\xi),\eta+\theta'(y_i-\eta)) \\ &+(y_i-\eta)g'_y(\xi+\theta'(x_i-\xi),\eta+\theta'(y_i-\eta)). \end{aligned}$$

从而我们有

$$\begin{aligned} |x_{i+1}-\xi|+|y_{i+1}-\eta|\leqslant&|x_i-\xi|\{|f'_x(\xi+\theta(x_i-\xi),\eta+\theta(y_i-\eta)| \\ &+|g'_x(\xi+\theta'(x_i-\xi),\eta+\theta'(y_i-\eta))\} \\ &+|y_i-\eta|\{|f'_y(\xi+\theta(x_i-\xi),\eta+\theta(y_i-\eta))| \\ &+|g'_y(\xi+\theta'(x_i-\xi),\eta+\theta'(y_i-\eta))|\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x_n-\xi|+|y_n-\eta|\leqslant&M\{|x_{n-1}-\xi|+|y_{n-1}-\eta|\} \\ \leqslant&M^2\{|x_{n-2}-\xi|+|y_{n-2}-\eta|\} \\ \leqslant&\cdots \\ \leqslant&M^n\{|x_0-\xi|+|y_0-\eta|\}. \end{aligned}$$

(2) 记 $N=\max\{|g(x,y)|:x^2+y^2=1\}$,$C=\max\{M,N\}$,对 $\varepsilon>0$,取点 $\boldsymbol{X}_i=$

$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,m)$满足：$\sqrt{x_i^2+y_i^2}=1(i=1,2,\cdots,m)$，且对任意具有 $x^2+y^2=1$ 之点 $\boldsymbol{X}=(x,y)$，均存在

$$\boldsymbol{X}_i=(x_i,y_i):\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}<\varepsilon/3C.$$

设 $\delta>0$，使得 $|f(tx_i,ty_i)-f(0,0)-g(tx_i,ty_i)|<\varepsilon t/3(0<t<\delta)$.故当 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，就有某个 i，使得 $\|\boldsymbol{X}/\|\boldsymbol{X}\|-\boldsymbol{X}_i\|<\varepsilon/3C$，$\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_i\|\boldsymbol{X}\|\|<\varepsilon\|\boldsymbol{X}\|/3C$.故

$$|f(x,y)-f(\|\boldsymbol{X}\|x_i,\|\boldsymbol{X}\|y_i)<M\varepsilon\|\boldsymbol{X}\|/3C\leqslant\varepsilon\|\boldsymbol{X}\|/3,$$

$$|f(\|\boldsymbol{X}\|x_i,\|\boldsymbol{X}\|y_i)-f(0,0)-g(\|\boldsymbol{X}\|x_i,\|\boldsymbol{X}\|y_i)|<\varepsilon\|\boldsymbol{X}\|/3,$$

$$|g(x,y)-g(\|\boldsymbol{X}\|x_i,\|\boldsymbol{X}\|y_i)|-|g(x-\|\boldsymbol{X}\|x_i,y-\|\boldsymbol{X}\|y_i)|$$

$$=\|\boldsymbol{X}-x\boldsymbol{X}_i\|g\left(\frac{x-\|\boldsymbol{X}\|x_i}{\|\boldsymbol{X}-\|\boldsymbol{X}\|\boldsymbol{X}_i\|},\frac{y-\|\boldsymbol{X}\|y_i}{\|\boldsymbol{X}-\|\boldsymbol{X}\|\boldsymbol{X}_i\|}\right)$$

$$\leqslant\varepsilon\|\boldsymbol{X}\|N/3C\leqslant\varepsilon\|\boldsymbol{X}\|/3.$$

从而导致 $|f(x,y)-f(0,0)-g(x,y)|<\frac{\varepsilon}{3}\|\boldsymbol{X}\|\cdot 3=\varepsilon\|\boldsymbol{X}\|$.

例 2.6.8 试证明下列命题：

(1) 设 $\boldsymbol{A}=(x_0,y_0)$，$\boldsymbol{B}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{C}=(x_2,y_2)$是 $\mathbf{R}^2$ 中三个点，又由可微函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$导出了三个点：$\boldsymbol{A}'=(u_0,v_0)$，$\boldsymbol{B}'=(u_1,v_1)$，$\boldsymbol{C}'=(u_2,v_2)$，其中$u_i=\varphi(x_i,y_i)(i=0,1,2)$.$v_i=\psi(x_i,y_i)(i=0,1,2)$.若$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$充分地小，则行列式

$$T_1=\begin{vmatrix}x_0&y_0&1\\x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\end{vmatrix},\quad T_2=\begin{vmatrix}u_0&v_0&1\\u_1&v_1&1\\u_2&v_2&1\end{vmatrix}$$

在$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}>0$ 时同号，在$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}<0$ 时反号.

(2) 设方程组 $f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$ 的第一个近似解为(x_0,y_0)，则其第二个近似解为

$$\begin{aligned}x_1&=x_0-\frac{1}{J_0}\begin{vmatrix}f(x_0,y_0)&f_y'(x_0,y_0)\\g(x_0,y_0)&g_y'(x_0,y_0)\end{vmatrix},\\y_1&=y_0-\frac{1}{J_0}\begin{vmatrix}f_x'(x_0,y_0)&f(x_0,y_0)\\g_x'(x_0,y_0)&g(x_0,y_0)\end{vmatrix}.\end{aligned}\qquad ①$$

一般而言，从(x_k,y_k)导出近似解

$$x_{k+1}=x_k-\frac{1}{J_k}\begin{vmatrix}f(x_k,y_k)&f_y'(x_k,y_k)\\g(x_k,y_k)&g_y'(x_k,y_k)\end{vmatrix},$$

$$y_{k+1}=y_k-\frac{1}{J_k}\begin{vmatrix}f_x'(x_k,y_k)&f(x_k,y_k)\\g_x'(x_k,y_k)&g(x_k,y_k)\end{vmatrix},$$

其中 $J_k=\begin{vmatrix} f_x'(x_k,y_k) & f_y'(x_k,y_k) \\ g_x'(x_k,y_k) & g_y'(x_k,y_k)\end{vmatrix}\quad(k=0,1,2\cdots)$.

证明 (1)根据 Taylor 展式可知($i=1,2$)

$$u_i-u_0=u_x'(x_0,y_0)(x_i-x_0)+u_y'(x_0,y_0)(y_i-y_0)+\varepsilon_i,$$
$$v_i-v_0=v_x'(x_0,y_0)(x_i-x_0)+v_y'(x_0,y_0)(y_i-y_0)+\varepsilon_i',$$

其中 $\varepsilon_i,\varepsilon_i'$是比 $\sqrt{(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2}$ 更高阶的无穷小量.从而有

$$T_2=\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1-u_0 & v_1-v_0 & 0 \\ u_2-u_0 & v_2-v_0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_1-u_0 & v_1-v_0 \\ u_2-u_0 & v_2-v_0\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} u_x'(x_1-x_0)+u_y'(y_1-y_0)+\varepsilon_1 & v_x'(x_1-x_0)+v_y'(y_1-y_0)+\varepsilon_1' \\ u_x'(x_2-x_0)+u_y'(y_2-y_0)+\varepsilon_2 & v_x'(x_2-x_0)+v_y'(y_2-y_0)+\varepsilon_2'\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} u_x'(x_1-x_0)+u_y'(y_1-y_0) & v_x'(x_1-x_0)+v_y'(y_1-y_0) \\ u_x'(x_2-x_0)+u_y'(y_2-y_0) & v_x'(x_2-x_0)+v_y'(y_2-y_0)\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & v_x'(x_1-x_0)+v_y'(y_1-y_0) \\ \varepsilon_2 & v_x'(x_2-x_0)+v_y'(y_2-y_0)\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix} u_x'(x_1-x_0)+u_y'(y_1-y_0) & \varepsilon_1' \\ u_x'(x_2-x_0)+u_y'(y_2-y_0) & \varepsilon_2'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_1' \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2'\end{vmatrix}.$$

易知上式中第二、三、四项皆为高阶无穷小量,从而其符号可由第一项确定,而第一项又可写成

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0\end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_x' & v_x' \\ u_y' & v_y'\end{vmatrix}=T_1\cdot\begin{vmatrix} u_x'(x_0,y_0) & u_y'(x_0,y_0) \\ v_x'(x_0,y_0) & v_y'(x_0,y_0)\end{vmatrix}.$$

由此即得所证.

(2)假定(α,β)是原方程组的根,则从 Taylor 展式

$$0=f(\alpha,\beta)=f(x_0,y_0)+(\alpha-x_0)f_x'(x_0,y_0)+(\beta-y_0)f_y'(x_0,y_0)+\varepsilon_1,$$
$$0=g(\alpha,\beta)=g(x_0,y_0)+(\alpha-x_0)g_x'(x_0,y_0)+(\beta-y_0)g_y'(x_0,y_0)+\varepsilon_2$$

中略去高阶无穷小量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$,可得近似根$(x_1,y_1)$:

$$(x_1-x_0)f_x'(x_0,y_0)+(y_1-y_0)f_y'(x_0,y_0)=-f(x_0,y_0).$$
$$(x_1-x_0)g_x'(x_0,y_0)+(y_1-y_0)g_y'(x_0,y_0)=-g(x_0,y_0).$$

解此方程组,即可得式①.一般情况类似.

注 特别对方程组

$$f(x,y)=4x^3-27xy^2+25=0,\quad g(x,y)=4x^2y-3y^3-1=0,$$

它在第一象限内解，且位于$(1,2)\times(1,2)$内．令 $x_0=y_0=1$，则 $J_0=507$，且有

$$\begin{vmatrix} f & f'_y \\ g & g'_y \end{vmatrix}=-10,\quad \begin{vmatrix} f'_x & f \\ g'_x & g \end{vmatrix}=-16.$$

由此可得 $x_1=1.019$，$y_1=1.031$．进一步又有

$$J_1=564.72196,\quad \begin{vmatrix} f & f'_y \\ g & g'_y \end{vmatrix}=-0.25319,\quad \begin{vmatrix} f'_x & f \\ g'_x & g \end{vmatrix}=0.19827.$$

从而可知 $x_2=1.01945$，$y_2=1.03065$．

第 3 章　隐函数存在定理

3.1　隐函数存在定理

定理 3.1.1　设 D 为 $|x-x_0|<a$, $|y-y_0|<b$ 的区域，$F(x,y)$满足：$F\in C^{(1)}(D)$，$F(x_0,y_0)=0$，$F_y'(x_0,y_0)\neq 0$.则存在区间 I：$|x-x_0|<\alpha(\alpha<a)$和区间 J：$|y-y_0|<\beta(\beta<b)$，方程 $F(x,y)=0$ 唯一地确定一个函数 $f:I\mapsto J$，满足：

(i) $F(x,f(x))=0(x\in I)$；　　(ii) $y_0=f(x_0)$；

(iii) $f(x)$在 I 上连续；　　(iv) $f(x)$在 I 上连续可导，且 $f'(x)=-\dfrac{F_x'(x,f(x))}{F_y'(x,f(x))}(x\in I)$.

定理 3.1.2　设区域 D：$|x-x_0|<a$, $|y-y_0|<a$, $|u-u_0|<b$, $|v-v_0|<b$，函数 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$满足：

(i) $F,G\in C^{(1)}(D)$；

(ii) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$；

(iii) $\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}\neq 0$，

则存在区域 I：$|x-x_0|<\alpha_1$，$|y-y_0|<\alpha_2(\alpha_1<a,\alpha_2<a)$和区域 J：$|u-u_0|<\beta_1$，$|v-v_0|<\beta_2(\beta_1<b,\beta_2<b)$，方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

唯一地确定一组函数$\begin{cases}u=f(x,y),\\ v=g(x,y),\end{cases}$ $(I\mapsto J)$满足：

(i) 在 I 上$\begin{cases}F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0,\\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0;\end{cases}$

(ii) $u_0=f(x_0,y_0)$，$v_0=g(x_0,y_0)$；

(iii) $f,g\in C^{(1)}(I)$，且$\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}=-\begin{bmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$.

定理 3.1.3(全域解)　设 $D=\{(x,y):a<x<b,-\infty<y<\infty\}$，$F(x,y)$是在 D 上连续函数，且 $F_y'\geqslant m>0$，则 $F(x,y)=0$ 在(a,b)上存在唯一连续解 $y=y(x)$.

例 3.1.1　解答下列问题：

(1) 试问下列方程组是否存在隐函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,z)$，$z=z(x,y)$?

(i)$\begin{cases}x=\mathrm{e}^{u+v},\\ y=\mathrm{e}^{u-v},\\ z=uv.\end{cases}$　　(ii)$\begin{cases}x=u+v,\\ y=u^2+v^2,\\ z=u^3+v^3.\end{cases}$

(2) 试证明方程 $y=x+\sin y/2$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上可确定隐函数 $y\in C^{(1)}(\mathbf{R}^1)$.

(3) 令 $D=\{(x,y):0<x,-\infty<y<+\infty\}$, $f(x,y)=1-\mathrm{e}^{-x}+y^3\mathrm{e}^{-y}$,试证明存在 $(0,\infty)$ 上 $C^{(1)}$ 类函数 $y(x)$,满足 $f(x,y)=0$.

(4) 设 $f(x,y)=y\cos^2 x-\sin^2 x-\mathrm{e}^{-y}=0\ (-\infty<x,y<\infty)$,试证明不存在 $(-\infty,\infty)$ 上的隐函数 $y=y(x)$ 满足 $f(x,y)=0$.

解　(1) (i) 令 $F_1(x,y,z,u,v)=x-\mathrm{e}^{u+v}$, $F_2(x,y,z,u,v)=y-\mathrm{e}^{u-v}$,以及 $F_3(x,y,z,u,v)=z-uv$,算出

$$\frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(z,u,v)}=\begin{vmatrix}0 & -\mathrm{e}^{u+v} & -\mathrm{e}^{u+v}\\ 0 & -\mathrm{e}^{u-v} & \mathrm{e}^{u-v}\\ 1 & -v & -u\end{vmatrix}=-2\mathrm{e}^{2u}\neq 0.$$

这说明在 $\mathbf{R}^2$ 中的任一点的邻域内均存在所指隐函数.

(ii) 令 $F_1(x,y,z,u,v)=x-u-v$, $F_2(x,y,z,u,v)=y-u^2-v^2$,以及 $F_3(x,y,z,u,v)=z-u^3-v^3$,则算出

$$\frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(z,u,v)}=\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & -2u & -2v\\ 1 & -3u^2 & -3v^2\end{vmatrix}=2(v-u).$$

为了存在所指的隐函数,要求 $v\neq u$,或 $(u-v)^2>0$,也可化为 $u^2+v^2>2uv$,或 $2y>x^2$.

(2) 令 $F(x,y)=y-x-\sin y/2$,则由 $F'_y=1-\dfrac{\cos y}{2}\geqslant\dfrac{1}{2}>0$ 可知(参阅定理 3.1.3),存在 $(-\infty,\infty)$ 上隐函数解 $y=y(x)$,且有

$$y'(x)=-F'_x/F'_y=1/[1-\cos y(x)/2]\geqslant 1/2.$$

(3) 因为当 $x>0$ 且 $y\geqslant 0$ 时有, $f(x,y)>0$,又在 $x>0$ 且 $y\to-\infty$ 时有 $f(x,y)\to-\infty$,所以对任意的 $x_0>0$,存在 y_0 ($(x_0,y_0)\in D$),使得 $f(x_0,y_0)=0$.

注意到, $f(x,0)>0$, $f(x,3)=1-\mathrm{e}^{-x}+(3/\mathrm{e})^3>0$,可知 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(4) $f'_y(x,y)=\cos^2 x+\mathrm{e}^{-y}>0\ (-\infty<x,y<\infty)$.易知对 x_0: $0<x_0<\pi/2$,我们有

$$\lim_{y\to-\infty}f(x_0,y)=-\infty,\quad \lim_{y\to+\infty}f(x_0,y)=+\infty.$$

这说明存在 y_0: $-\infty<y_0<+\infty$,使得 $f(x_0,y_0)=0$.由于 $f(\pi/2,y)=-1-\mathrm{e}^{-y}<0\ (-\infty<y<+\infty)$,故 $f(x,y)=0$ 没有 $(-\infty,\infty)$ 上的连续解(无全域解).

例 3.1.2　解答下列问题:

(1) 设 $F(x,y)=x^2+y+\sin(xy)=0$,试论其在 $(0,0)$ 点附近的隐函数解.

(2) 设有方程组

$$\begin{cases} 3x+y-z+u^4=0, & ① \\ x-y+2z+u=0, & ② \\ 2x+2y-3z+2u=0. & ③ \end{cases}$$

(i) 试问在$[-\varepsilon,\varepsilon]$($\varepsilon>0$)上方程组是否有连续可微且唯一的解:$x(z)$,$y(z)$,$u(z)$? 其中 $x(0)=y(0)=z(0)$.

(ii) 试证明方程组不存在对一切区间$[-\delta,\delta]$($\delta>0$)均有解 $x(u)$,$y(u)$,$z(u)$.

解 (1) 由 $F'_y(x,y)=1+x\cos(xy)$可知 $F'_y(0,0)=1$,因此在(0,0)的邻域上存在隐函数解 $y=y(x)$(满足 $y(0)=0$).在导数式

$$y'(x)=-(2x+y\cos(xy))/(1+x\cos(xy))$$

中,由 $y'(0)=0$ 知 $y(0)$是极大值.由此还可知 $F(x,y)=0$ 在(0,0)附近无隐函数解 $x=x(y)$($x(0)=0$).这是因为唯一解 $y(x)$在(0,0)附近不单调,无反函数.

(2) (i) 从式①减去式②,再减去式③,可得

$$u^4-3u=0,\quad 即\quad u=0,\sqrt{3}/3.$$

若 $u=0$,则有

$$\begin{cases} 3x+y-z=0, \\ x-y+2z=0, \\ 2x+2y-3z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-z/4, \\ y=7z/4. \end{cases}$$

若 $u=\sqrt[3]{3}$,则有

$$\begin{cases} 3x+y-z+3^{4/3}=0, \\ x-y+2z+3^{1/3}=0, \\ 2x+2y-3z+2\cdot 3^{1/3}=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-z/4-\sqrt[3]{3}, \\ y=7z/4. \end{cases}$$

从而可知,该方程组的解集是 $\mathbf{R}^4$ 中互不相交的两平行直线:

$$(x,y,z,u)=z(-1/4,7/4,1,0),$$
$$(x,y,z,u)=z(-1/4,7/4,1,0)+(-\sqrt[3]{3},0,0,\sqrt[3]{3})$$

之并.因此,对任给 $\varepsilon>0$,方程组对 $z\in[-\varepsilon,\varepsilon]$,均有解 $x(z)$,$y(z)$,$u(z)$:$x(0)=y(0)=z(0)=0$.也就是说,记 A,B是两个互不相交集:$A\cup B=[-\varepsilon,\varepsilon]\setminus\{0\}$,且令

$$x(z)=\begin{cases} -z/4, & z\in A, \\ -z/4-\sqrt[3]{3}, & z\in B, \\ 0, & z=0, \end{cases} \quad y(z)=\frac{7z}{4}, \quad u(z)=\begin{cases} 0, & z\in A, \\ \sqrt[3]{3}, & z\in B, \\ 0, & z=0, \end{cases}$$

那么,$y(z)$是唯一的连续且可微解,而 $x(z)$,$u(z)$不唯一;$x(z)$,$u(z)$是连续且可微解当且仅当 $B=\varnothing$;

(ii) 由(i)知,方程组有解当且仅当 $u=0$ 或 $u=\sqrt[3]{3}$.因此,若 $0<u<\sqrt[3]{3}$,则方程组无解.这说明该方程组不可能对任意的 $u\in[-\delta,\delta]$,均有解 $x(u)$,$y(u)$,$z(u)$.

例 3.1.3　试证明下列命题：

(1) 设 $D=\{(x,y):a<x<b,-\infty<y<\infty\}$，$F(x,y)$在 D 上满足

(i) $F(x,y)$是单变量 x 的函数；

(ii) 在 D 上存在 F'_y，且有 $m>0$，使得

$$0<m\leqslant F'_y(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

则 $F(x,y)=0$ 在(a,b)上存在唯一连续解 $y=y(x)$.

(2) 设 $D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$，$F(x,y)$在 D 上满足

(i) $F'_y(x,y)$在 D 上连续且 $F'_y(x,y)\neq 0$，$(x,y)\in D$；

(ii) 存在 $F'_x(x,y)$，$(x,y)\in D$；

(iii) $F(x,c)\cdot F(x,d)<0(a<x<b)$，

则方程 $F(x,y)=0$ 在$[a,b]$上存在唯一可微解 $y=y(x)$.

(3) 设 $\varphi(y)$在$[-a,a](a>0)$上可微，且有

$$\varphi(0)=0,\quad |\varphi'(y)|\leqslant k<1\quad (y\in[-a,a]).$$

则存在 $\delta>0$，在$[-\delta,\delta]$上方程 $x=y+\varphi(y)$有唯一可微解 $y=y(x)$：$y(0)=0$.

(4) 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$K(x,y)$在 $D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant x\}$上连续，则方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y$$

在$[a,b]$上有唯一连续解.

证明　(1) 对 $x_0\in(a,b)$，任取 y_1，$-\infty<y_1<\infty$，并令

$$g(y)=F(x_0,y_1)+m(y-y_1)\quad(-\infty<y<\infty),$$

则 $F(x_0,y_1)=g(y_1)$，以及$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[F(x_0,y)-g(y)]=F'_y(x_0,y)-m\geqslant 0$.由此知

$$F(x_0,y)\begin{cases}\leqslant g(y), & y\leqslant y_1,\\ \geqslant g(y), & y>y_1.\end{cases}$$

由此易得 $\lim\limits_{y\to-\infty}F(x_0,y)=-\infty$，$\lim\limits_{y\to+\infty}F(x_0,y)=+\infty$.根据中值定理，有 $y_0\in(-\infty,\infty)$，使得 $F(x_0,y_0)=0$.

从而由 $F'_y>0$ 即知在点 x_0 附近方程 $F(x,y)=0$ 有唯一解 $y=y(x)$：$y(x_0)=y_0$.再看解的连续性.对任给 $\varepsilon>0$，我们有

$$F(x_0,y(x_0)-\varepsilon)<0<F(x_0,y(x_0)+\varepsilon).$$

注意到 $F(x,y)$是 x 的连续函数，故存在 $\delta>0$，使得

$$F(x,y(x_0)-\varepsilon)<0<F(x,y(x_0)+\varepsilon),\quad |x-x_0|<\delta.$$

再根据中值定理，即得 $|y(x)-y(x_0)|<\varepsilon$，$|x-x_0|<\delta$.这说明 $y(x)$在 x_0 处连续.

(2) 由(iii)知，存在 $y_0\in(c,d)$，使得 $F(x_0,y_0)=0$.从而依条件(i)(不妨假定 $F'_y(x,y)\geqslant m>0$，$(x,y)\in D$)，知 $F(x,y)=0$ 有唯一解 $y=y(x)$.记 $\Delta y=y(x+$

$\Delta x)-y(x)$，我们有

$$\begin{aligned}0&=F(x+\Delta x,y(x+\Delta x))-F(x,y(x))\\&=F(x+\Delta x,y(x+\Delta x))-F(x+\Delta x,y(x))+F(x+\Delta x,y(x))-F(x,y(x))\\&=F'_y(x+\Delta x,y(x)+\theta\Delta y)\Delta y+\frac{F(x+\Delta x,y(x))-F(x,y(x))}{\Delta x}\Delta x.\end{aligned}$$

注意到 F'_y 在 D 上连续且大于等于正数 m，故可得

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}&=\lim_{\Delta x\to 0}-\left\{\frac{F(x+\Delta x,y(x))-F(x,y(x))}{\Delta x}\right\}\Big/F'_y(x+\Delta x,y(x)+\theta\Delta y)\\&=-F'_x(x,y(x))/F'_y(x,y(x)).\end{aligned}$$

这说明 $y(x)$ 可微.

(3) 由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1+\varphi'(y)>0\ (-a\leqslant y\leqslant a)$ 可知，$x=x(y)=y+\varphi(y)$ 是 $[-a,a]$ 上严格递增的连续函数.令

$$\delta=\min\{|x(-a+0)|,|x(a-0)|\},$$

对每个 $x\in[-\delta,\delta]$，仅有一值 $y\in(-a,a)$，使得 $y+\varphi(y)=x$.因此，在 $(-\delta,\delta)$ 上存在 $y=y(x)$，它是 $x=y+\varphi(y)$ 的反函数，且严格单调，易知 $y(0)=0$.关于它的可微性，我们取 x_0，$x_0+\Delta x\in(-\delta,\delta)$，$\Delta x\neq 0$，则 y_0，$y_0+\Delta y\in(-a,a)$(这里 y_0 是方程 $x_0=y+\varphi(y)$ 之根，且 $\Delta y\neq 0$).因为存在

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(1+\frac{\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)}{\Delta y}\right)=1+\varphi'(y_0),$$

而 $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=1\Big/\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，所以存在 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$(注意当 $\Delta x\to 0$ 时有 $\Delta y\to 0$).

(4) 假定 $|K(x,y)|\leqslant M\ ((x,y)\in D)$，$|f(x)|\leqslant N\ (a\leqslant x\leqslant b)$，且令

$$\varphi_1(x)=f(x),\quad \varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)\mathrm{d}y\quad(n=2,3,\cdots).$$

则根据归纳法不难推知

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|\leqslant\frac{N}{n!}|\lambda|^n M^n(x-a)^n\quad(n\in\mathbf{N}).$$

由此可得，存在 $\varphi(x)\ (a\leqslant x\leqslant b)$，使得当 $n\to\infty$ 时，$\varphi_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $\varphi(x)$，$\varphi(x)$ 自然也是该方程之解.

现在来指出此解的唯一性，并应用反证法.假定该方程还有另外一个解：$\psi(x)$，我们作 $F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$，则 $F(a)=\varphi(a)-\psi(a)=f(a)-f(a)=0$，且有

$$F(x)=\lambda\int_a^x K(x,y)F(y)\mathrm{d}y.$$

设 $|F(x)|\leqslant L\ (a\leqslant x\leqslant b)$，那么从上式可不断推出

$$|F(x)|\leqslant LM\lambda|(x-a)|;$$

$$|F(x)|=|\lambda|\int_a^x |K(x,y)||F(y)|\mathrm{d}y\leqslant LM^2|\lambda|^2(x-a)^2/2!;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|F(x)|\leqslant LM^n(b-a)^n/n!.$$

令 $n\to\infty$，我们有 $|F(x)|\leqslant 0$. 这说明 $\psi(x)=\varphi(x)$.

例 3.1.4　试证明下列命题：

(1) 设 $z=f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y): a<x<b, c<y<d\}$ 上连续，$\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)\in D$，若 $f'_y(x,y)$ 在 $\boldsymbol{X}_0$ 点一个邻域上连续.

(i) 方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y)\mathrm{d}t$$

在 x_0 点的一个邻域上确定一个函数 $y=y(x)$，$y(x_0)=y_0$.

(ii) 方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 在点 x_0 的一个邻域上有唯一解 $y(x)$：$\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=f(x,y(x))$，$y(x_0)=y_0$.

(2) 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数.

(i) 若 $f'_x(x,y)+f(x,y)f'_y(x,y)=0$，$(x,y)\in\mathbf{R}^2$，则 $f(x,y)\equiv C$.

(ii) 若 $(1+af(x,y))f'_x(x,y)+(1-af(x,y))f'_y(x,y)=0\ (a\neq 0)$，则 $f(x,y)\equiv C$.

证明　(1) (i) 令 $F(x,y)=y-y_0-\int_{x_0}^x f(t,y)\mathrm{d}t$，则有

$$F'_y(x,y)=1-\int_{x_0}^x f'_y(t,y)\mathrm{d}t.$$

由此知当 $|x-x_0|$ 充分小时，有 $F'_y(x,y)>0$. 再注意到 $F(x_0,y_0)=0$，故依隐函数存在定理即可得证.

(ii) 将问题化为：找出 $\delta>0$ 和在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上的连续函数 $y=y(x)$，使得

$$y=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y)\mathrm{d}t.$$

(由条件知 $|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant M|y'-y''|$，故也可用迭代法解.)

(2) (i) 由题(1)知，对 $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，存在点 (x_0,y_0) 的邻域 $U(x_0,\delta)$，使得在此邻域上有连续可微函数 $y(x)$：$y(x_0)=y_0$，且 $y'(x)=f(x,y(x))$. 从而对 $f(x,y(x))$ 求导可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y(x))&=f'_x(x,y(x))+f'_y(x,y(x))y'(x)\\&=f'_x(x,y(x))+f'_y(x,y(x))f(x,y(x))=0.\end{aligned}$$

这说明在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上有

$$y'(x)=f(x,y(x))=f(y_0,y(x_0))=f(x_0,y_0).$$

即 $y(x)$是直线 $y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0)$在$[x_0-\delta,x_0+\delta]$上的一段.

现在考察全直线上.令 δ^* 是上式成立的 $\delta>0$ 之上确界,若 $\delta^*<+\infty$,且记 $x^*=x_0+\delta^*$,$y^*=y_0+f(x_0,y_0)\delta^*$,则由连续性推出 $f(x^*,y^*)=f(x_0,y_0)$.从而依据上面类似的推理可知,存在 $\delta_1>0$,使 $f(x,y)=f(x_0,y_0)$,$x\in[x^*-\delta_1,x^*+\delta_1]$.这说明上述直线在$[x_0,x_0+\delta^*+\delta_1]$上又满足 $f(x,y)=f(x_0,y_0)$,易知这与 $\delta^*<+\infty$矛盾.因此 $f(x,y)=f(x_0,y_0)$在 $y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0)$的右半($x\geqslant 0$)上成立,类似地可证明在左半直线上也成立.总之我们有,在整个直线上 $f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

对于全平面的情形采用反证法.假定有点$(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^2$,使得 $f(\xi,\eta)\neq f(x_0,y_0)$,则由上知在过点$(\xi,\eta)$且以 $f(\xi,\eta)$为斜率的直线上有 $f(x,y)=f(\xi,\eta)$.注意到此直线与前述直线斜率不同,故两直线必有交点.而在交点处,$f(x,y)$就要取两个不同的值了,矛盾.证毕.

(ii) 令 $x=\xi+\eta$,$y=\xi-\eta$,且令 $F(\xi,\eta)=f(\xi+\eta,\xi-\eta)$,则由 $F'_\xi=f'_x+f'_y$,$F'_\eta=f'_x-f'_y$可知 $F'_\xi+aF\cdot F'_\eta=0$(依题设).现在再令 $g=aF$,则又有 $g'_\xi+gg'_\eta=0$.根据(i)可得 $g(x,y)\equiv C$,即 $F(\xi,\eta)\equiv C$.证毕.

例 3.1.5 解答下列问题:

(1) 设在 $u=\varphi_1(x,y,z)$,$v=\varphi_2(x,y,z)$,$w=\varphi_3(x,y,z)$中,视 x,v,w 为自变量.试证明:若$\dfrac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}\neq 0$,则$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\Big/\dfrac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}$,其中 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 皆可微.

(2) 设 $f,g\in C^{(1)}(\mathbf{R}^1)$,且 $f(0)=0$,$f'(0)\neq 0$,以及

$$f(x)=tg(x)\quad(t\in\mathbf{R}^1).\qquad ①$$

(i) 试证明存在 $\delta>0$,使方程①在$(-\delta,\delta)$上有唯一连续解 $x(t)$,$x(0)=0$.

(ii) 试求 $x(t)$在 $t=0$ 处的一阶 Taylor 公式.

(3) 设 $f(x,y)$,$g(x,y)$在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数,且有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\neq 0,\quad (x,y)\in D.$$

若 $D'\subset D$ 是有界闭区域,试证明在 D'内满足:

$$f(x,y)=0,\quad g(x,y)=0\qquad ②$$

的点(x,y)只有有限个.

解 (1) 由题设知,y 与 z 是 v 与 w 的函数,当然也是 x 的函数.若将其代入 $u=\varphi_1(x,y,z)$,则可得 $u=f(x,v,w)$.从而有 $u'_y=0$,$u'_z=0$,以及

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}u'_x & u'_y & u'_z\\ v'_x & v'_y & v'_z\\ w'_x & w'_y & w'_z\end{vmatrix}=u'_x\begin{vmatrix}v'_y & v'_z\\ w'_y & w'_z\end{vmatrix}-u'_y\begin{vmatrix}v'_x & v'_z\\ w'_x & w'_z\end{vmatrix}+u'_z\begin{vmatrix}v'_x & v'_y\\ w'_x & w'_y\end{vmatrix}$$

$$= u_x' \begin{vmatrix} v_y' & v_z' \\ w_y' & w_z' \end{vmatrix} = u_x' \frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}.$$

由此即可得证.

(2) (i) 作函数 $F(x,t)=f(x)-tg(x)$,则 F 是连续可微的函数,且有

$$F(0,0)=0,\quad \frac{\partial F(0,0)}{\partial x}=f'(0)-0\cdot g(0)\neq 0.$$

从而根据隐函数存在定理,可知存在 $\delta>0$,式①在 $(-\delta,\delta)$ 上有连续可微解 $x(t)$,$x(0)=0$.

(ii) 在公式 $f[x(t)]=tg[x(t)]$ 两端对 t 求导,可知 $x'(t)=g[x(t)]/(f'[x(t)]-f[x(t)])$.注意到 $x(0)=0$,故 $x(t)$ 的一阶 Taylor 展式为

$$x(t)=x(0)+x'(0)t=g(0)t/f'(0).$$

(3) (i) 由条件知,方程组②存在隐函数 $y=y(x)$,$y_0=y(x_0)$,$(x_0,y_0)\in D'$.

(ii) 反证法.若有 $\boldsymbol{X}_n^0=(x_n^0,y_n^0)\in D'(n\in\mathbf{N})$,在邻域 $U_n(\boldsymbol{X}_n^0)$ 上有唯一的 $y_n(x)$ 满足

$$\begin{cases} f(x,y_n(x))=0, \\ g(x,y_n(x))=0, \end{cases}\quad (x,y_n)\in U_n(\boldsymbol{X}_n^0),\quad y_n(x_n^0)\supset y_n^0.$$

不妨假定(D'闭)$x_n^0\to x^0$,$y_n^0\to y^0$ $(n\to\infty)$,显然有

$$\boldsymbol{X}_0=(x^0,y^0)\in D',\quad \begin{cases} f(x^0,y^0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^0,y_n^0)=0, \\ g(x^0,y^0)=\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n^0,y_n^0)=0. \end{cases}$$

再由隐函数存在定理,知在点 $\boldsymbol{X}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{X}_0)$ 上有唯一的 $y_0(x)$,使得 $y_0(x_0)=y^0$,以及 $f(x,y_0)\equiv 0$(在小区间上).但当 n 充分大时有 $(x_n^0,y_n^0)\in U(\boldsymbol{X}_0)$.这与唯一性矛盾.

3.2　逆变换存在定理

定理 3.2.1　设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是区域,$y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^{(1)}(D)(i=1,2,\cdots,n)$,$\boldsymbol{P}_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})\in D$,且该点的 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_{\boldsymbol{P}_0}\neq 0.$$

则存在 $\boldsymbol{P}_0$ 点邻域 $U\subset D$,和 $\boldsymbol{P}_0$ 点的像点 $\boldsymbol{Q}_0$ 的邻域 V,使得

(1) 变换 $y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n)$ 在 U 内单叶;

(2) 上述变换把 U 映为 V;

(3) 逆变换 $x_i=\varphi_i(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in C^{(1)}(V)(i=1,2,\cdots,n)$.

注　对 $n=1$,若 $f'(x)\neq 0(x\in\mathbf{R}^1)$,则在整个 $\mathbf{R}^1$ 上存在反函数 f^{-1}.对 $n\geqslant 2$,一般结论是局部可逆.例如

$$T:\begin{cases} u = e^x \sin y, \\ v = e^x \cos y, \end{cases} \quad \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1 \text{ 满射},$$

$|J| = -e^{2x} \neq 0$,故局部有逆,但在 $\mathbf{R}^1$ 上无.

设 $P_1 = (x_1, y_1)$,$P_2 = (x_1, y_1 + 2\pi)$,则 $u(P_1) = e^{x_1}\sin y_1 = e^{x_1}\sin y_2 = v(P_2)$.

推论 1　设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 为区域,变换 $y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)(i = 1, 2, \cdots, n) \in C^{(1)}(D)$.若在 D 上变换的 Jacobi 行列式不为零,则 D 的像集合 Ω 为一区域.

推论 2　设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 为区域,变换 $\boldsymbol{Q} = f(\boldsymbol{P})$在 D 上单叶,且 $f \in C^{(1)}(D)$,Jacobi 行列式

$$J_f(\boldsymbol{P}) \neq 0,$$

则 $f(D) = \Omega$为区域,逆变换 $\boldsymbol{P} = f^{-1}(\boldsymbol{Q})$在 Ω上属于 $C^{(1)}$类,这时,也称 $f: D \to \Omega$为微分同胚.

注　$n = 1$ 时单叶条件可以省略;$n > 1$ 时单叶条件不能省略.

例 3.2.1　试证明下列命题:

(1) 设 $z = f(x, y)$在区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上有连续二阶偏导数,则在(旋转)变换 $u = x\cos\theta + y\sin\theta$,$v = -x\sin\theta + y\cos\theta$下,表达式 $f''_{xx} + f''_{yy}$不变.

(2) 设 $f(x, y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续二阶偏导数,$\boldsymbol{X}_0 = (x_0, y_0)$是 $f(x, y)$的(非退化)临界点.即 $f'_x(x_0, y_0) = 0 = f'_y(x_0, y_0)$.又矩阵

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad T = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则存在点 $\boldsymbol{X}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{X}_0)$,$f(x, y)$在 $U(\boldsymbol{X}_0)$中除点 $\boldsymbol{X}_0$ 外再无其它临界点.

(3) 设 $u(x, y)$,$v(x, y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上连续可微函数,且有$\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq 0$,$\dfrac{\partial u}{\partial y} \neq 0$,梯度向量 ∇u 与 ∇v 是线性无关的.则对给定的点 $\boldsymbol{X}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$,必存在 $F \in C^{(1)}(\mathbf{R}^1)$,使得 $v(x, y) = F[u(x, y)]$.

(4) 设 T 是从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的连续可微映射:

$$\boldsymbol{X} = (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad \begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y), \end{cases} \quad T(x, y) = (u, v) \in \mathbf{R}^2,$$

且有$\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} \neq 0((x, y) \in \mathbf{R}^2)$.若对 $\mathbf{R}^2$ 中任一有界闭集 K,$T^{-1}(K)$也是有界闭集,则 T 是满映射.

证明　(1) 注意到 Jacobi 行列式$\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$,故存在逆变换:$x = \varphi(u, v)$,$y = \psi(u, v)$,使得通过变量 u, v f 转为 x, y 的函数.从而有

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = f'_u \cos\theta - f'_v \sin\theta,$$

$$f''_{xx} = f''_{uu}\cos^2\theta - 2f''_{uv}\sin\theta\cos\theta + f''_{vv}\sin^2\theta;$$

$$f'_y = f'_u \sin\theta + f'_v \cos\theta, \quad f''_{yy} = f''_{uu}\sin^2\theta + 2f''_{uv}\sin\theta \cdot \cos\theta + f''_{vv}\cos^2\theta.$$

由此即知 $f''_{xx}+f''_{yy}=f''_{uu}+f''_{vv}$.

(2) 考察函数 $F(x,y)=\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2$.易知 $F(x_0,y_0)=0$,且 $F(x,y)$有连续一阶偏导数.由题设以及反函数存在定理可知,$F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$ 是一个局部同胚满映射,即存在点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)$的邻域 $U(\boldsymbol{X}_0)$以及$(-\delta,\delta)$,F 是 $U(\boldsymbol{X}_0)$到$(-\delta,\delta)$的一个单射.证毕.

(3) 考察映射 $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 即

$$T(x,y)=(u(x,y),v(x,y)),\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$

由于 $\nabla u=(u'_x,u'_y)$与 $\nabla v=(v'_x,v'_y)$线性无关,且有 $\nabla u\neq(0,0)$,故知矩阵 $\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}$ 的秩为 1.因此,对 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,存在邻域 $U=U(\boldsymbol{X}_0)$与开集 G,以及微分同胚映射 $S:G\to U$,又有 $g\in C^{(1)}(\mathbf{R}^1):g(x)=(g_1(x),g_2(x))$,使得

$$T(S(x,y))=g(x),\quad (x,y)\in G.$$

由此知 $g_1'(x)\neq0$,根据反函数定理,$g_1(x)$局部可逆.不妨认定它可逆(U,G 作些收缩),即得

$$g_1^{-1}[u(s(x,y))]=x\quad 或\quad g_2\{g_1^{-1}[u(s(x,y))]\}=v[s(x,y)],\ (x,y)\in G.$$

因为 S 是从 G 到整个 U 上的微分同胚.所以我们有

$$g_2[g_1^{-1}(u(x,y))]=v(x,y),\quad (x,y)\in U.$$

这说明 $F=g_2(g_1^{-1})$满足要求.

(4) 由于 $T(\mathbf{R}^2)$是 $\mathbf{R}^2$ 中的连通集,故只需指出 $T(\mathbf{R}^2)$同时是开集和闭集.

(i) 对任一点 $\boldsymbol{X}=(x,y)\in\mathbf{R}^2$,记 $\boldsymbol{W}=T(\boldsymbol{X})\in T(\mathbf{R}^2)$,则由逆映射定理可知,存在点 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{W}$ 的邻域 $U(\boldsymbol{X})$与 $U(\boldsymbol{W})$,使得 $T:U(\boldsymbol{X})\to U(\boldsymbol{W})$是同胚映射.从而 $T(\mathbf{R}^2)$是开集.

(ii) 设$\{\boldsymbol{W}_n\}\subset T(\mathbf{R}^2)$是收敛列,且 $\boldsymbol{W}_n\to\boldsymbol{W}(n\to\infty)$,以及 $\boldsymbol{W}_n=T(\boldsymbol{X}_n)$.因为点集 $K=\{\boldsymbol{W}_n\}\cup\{\boldsymbol{W}\}$是有界闭集,所以 $T^{-1}(K)$也是有界闭集.由于$\{\boldsymbol{X}_n\}\subset T^{-1}(K)$,故 $T^{-1}(K)$包含一个收敛子列:$\boldsymbol{X}_{n_k}\to\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^2(k\to\infty)$.根据 T 的连续性,我们有 $T(\boldsymbol{X}_{n_k})\to T(\boldsymbol{X})(k\to\infty)$.再注意到 $\boldsymbol{W}_{n_k}\to\boldsymbol{W}(k\to\infty)$,即得 $T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{W}$.这说明 $T(\mathbf{R}^2)$是闭集.

例 3.2.2　试证明下列命题:

(1) 设 $k\neq0$,$\varphi(y)$是 $\mathbf{R}^1$ 上周期为 T 的可微函数,且有 $|\varphi'(y)|<|k|$.若 $\varphi(y)$是由方程 $x=ky+\varphi(y)$所确定的隐函数,则存在周期为 $|k|T$ 的函数 $\psi(x)$,使得

$$y=x/k+\psi(x).$$

(2) 设 $f(x,y)$有二阶连续偏导数,以及映射 $T:(x,y)\in\mathbf{R}^2\to(u,v)=(f'_x(x,y),f'_y(x,y))\in\mathbf{R}^2$.若有 $f''_{xx}(x,y)f''_{yy}(x,y)-(f''_{xy}(x,y))^2\neq0$,则存在唯一的逆映射 $T^{-1}:(u,v)\to(x,y)$,且可表示为

$$x = g_u'(u,v),\quad y = g_v'(u,v).$$

(3) 设 $P(x)$是 n次多项式,作从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的映射:

$$T(\boldsymbol{X}) = T(x,y) = (P(x+y), P(x-y)),\quad (x,y)\in \mathbf{R}^2,$$

则 T 的 Jacobi 矩阵在 $\mathbf{R}^2$ 的一个稠密开子集的点上是可逆的.

(4) 视实二阶矩阵 $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$为 $\mathbf{R}^4$ 中的向量 $\boldsymbol{X}=(a,b,c,d)$,全体记为 $\mathbf{R}^4$,作从 $\mathbf{R}^4$ 到 $\mathbf{R}^4$ 的映射 T:

$$T(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}^2 = \boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{X}\quad \left(X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right),$$

则 T 在点 $X_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$附近存在逆映射.

证明 (1) 对 $x_0\in\mathbf{R}^1$,作映射 A:$Ay=x/k-\varphi(y)/k(y\in\mathbf{R}^1)$,且令

$$\rho(Ay,Az) = \max_{-\infty<x<\infty}\{|Ay-Az|\},\quad -\infty<y,z<\infty,$$

则根据微分中值公式可知

$$\rho(Ay,Az)= \max_{-\infty<x<\infty}\left|\frac{\varphi(z)-\varphi(y)}{k}\right| = \max_{-\infty<x<\infty}\frac{|\varphi'(\xi)|}{|k|}|y-z|$$

$$\leqslant \max_{-\infty<x<\infty}\frac{|\varphi'(z)|}{|k|}\max_{-\infty<x<\infty}|y-z|,\quad \xi\text{位于 } y \text{ 与 } z \text{ 之间}.$$

注意到 $|\varphi'(y)|<|k|$,故 $0<\theta=\max\limits_{-\infty<\xi<\infty}\{|\varphi'(\xi)/k|\}<1$.从而得

$$\rho(Ay,Az)\leqslant\theta|y-z|,\quad 0<\theta<1.$$

这说明 A 是压缩映射,存在唯一不动点 y:$y=Ay$(即 $x=ky+\varphi(y)$).现在设

$$y_1 = x/k-\varphi(0),\quad y_n = x/k-\varphi(y_{n-1})/k\quad (n=2,3,\cdots),$$

且令 $n\to\infty$,则得

$$y = \frac{x}{k}t\psi(x),\quad \psi(x) =-\frac{1}{k}\lim_{n\to\infty}\varphi(y_{n-1}(x)).$$

下面指出:$\psi(x+|k|T)-\psi(x)=0$.

(i) $\varphi(y_{n-1}(x))$是以 $|k|T$ 为周期的,这可用归纳法证明:对 $n=2$,注意到 $\varphi(x\pm T)=\varphi(y)$,故有

$$\varphi(y_1(x+|k|T)) = \varphi\left(\frac{x+|k|T}{k}-\frac{\varphi(0)}{k}\right) = \varphi(y_1(x)+T\operatorname{sgn}(k)) = \varphi(y_1(x)).$$

现在假定 $\varphi(y_{n-1}(x))$以 $|k|T$ 为周期,则由

$$\begin{aligned}\varphi(y_n(x+|k|T))&= \varphi\left(\frac{x+|k|T}{k}-\frac{1}{k}\varphi(y_{n-1}(x+|k|T))\right)\\ &= \varphi\left(\frac{x}{k}-\frac{1}{k}\varphi(y_{n-1}(x))+T\cdot\operatorname{sgn}(k)\right)\\ &= \varphi(y_n(x))+T\cdot\operatorname{sgn}(k) = \varphi(y_n(x)).\end{aligned}$$

(ii) 我们在等式

$$\psi(x+|k|T)-\psi(x)=\left[\psi(x+|k|T)+\frac{1}{k}\varphi(y_{n-1}(x+|k|T))\right]$$
$$+\left[-\frac{1}{k}\varphi(y_{n-1}(x))-\psi(x)\right]$$

中令 $n\to\infty$,则得 $\psi(x+|k|T)-\psi(x)\equiv 0$.

(2) 令 $F(u,v,x,y)=u-f_x'(x,y)=0$, $G(u,v,x,y)=v-f_y'(x,y)=0$,则有 $F_x'=-f_{xx}''$, $F_y'=-f_{xy}'$, $G_x'=-f_{yx}''$, $G_y'=-f_{yy}''$.从而由题设知

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=f_{xx}''f_{yy}''-(f_{xy}'')^2\neq 0.$$

即存在唯一的逆映射 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$.注意到

$$\begin{aligned}\varphi(u,v)\mathrm{d}u+\psi(u,v)\mathrm{d}v&=x\mathrm{d}u+y\mathrm{d}v\\&=x(f_{xx}''\mathrm{d}x+f_{xy}''\mathrm{d}y)+y(f_{yx}''\mathrm{d}x+f_{yy}''\mathrm{d}y)\\&=(xf_{xx}''+yf_{yx}'')\mathrm{d}x+(xf_{xy}''+yf_{yy}'')\mathrm{d}y\\&=(xf_x'+yf_y'-f)_x'\mathrm{d}x+(xf_x'+yf_y'-f)_y'\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

故设 $g(x,y)=xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)-f(x,y)$时,就有逆变换表达式

$$\begin{cases}x=g_u'(u,v),\\y=g_v'(u,v),\end{cases}\quad \mathrm{d}g=\varphi(u,v)\mathrm{d}u+\psi(u,v)\mathrm{d}v.$$

(3) 注意到 T 的 Jacobi 行列式 J 为

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}P'(x+y) & P'(x+y)\\P'(x-y) & -P'(x-y)\end{vmatrix}=-2P'(x+y)\cdot P'(x-y),$$

故知 $J\neq 0$ 当且仅当 $P'(x+y)P'(x-y)\neq 0$.因为 $P'(x)$不恒等于0,所以 $P(x)$只有有限个零点:λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_m.此时,点集 $E=\{(x,y):J(x,y)=0\}$是有限多条直线:

$$x+y=\lambda_k;\quad x-y=\lambda_k\quad(k=1,2,\cdots,m)$$

之并集.易知,E是$\mathbf{R}^2$中无处稠密($\overline{E}$无内点)的闭集,从而点集$\{(x,y):J(x,y)\neq 0\}$是$\mathbf{R}^2$中的稠密开集.

(4) 定义从 $\mathbf{R}^4$ 到 $\mathbf{R}^4$ 的映射 T':

$$T'(x,y,z,w)=(x^2+yz,y(x+w),z(x+w),zy+w^2),$$

则由等式

$$\begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+yz & y(x+w)\\z(x+w) & zy+w^2\end{pmatrix}$$

可知,映射 T'对应着原映射 T.由于 T'的 Jacobi 行列式在点(1,0,0,1)处的值是2^4,故 T'在点(1,0,0,1)之附近是可逆的.

例 3.2.3　试证明下列命题:

(1) 设 $D=\{(x,y):x>y\}\subset\mathbf{R}^2$,作映射 T:

$$T:(x,y\in D)\to(u,v)=(x+y,x^2+y^2)\in\mathbf{R}^2.$$

(i) T 是局部一一映射.

(ii) 求 T 的值域,并证明 T 是全域一一映射.

(2) 设 $f\in C^{(1)}(\mathbf{R}^1)$,作从 $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的映射 T:

$$\begin{cases} u=u(x,y)=f(x), \\ v=v(x,y)=-y+xf(x), \end{cases}\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2.$$

若有 $x_0\in\mathbf{R}^1$,$f'(x_0)\neq 0$,则映射 T 在点(x_0,y_0)的一个邻域上是可逆的,且有表示

$$x=g(u),\quad y=-v+ug(u).$$

(3) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续可微,则存在连续双射 $g:[0,1]\to\mathbf{R}^2$,使得 $f[g(x)]\equiv C$.

证明 (1)(i) 易知 T 的 Jacobi 行列式为

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 2x\\ 1 & 2y\end{vmatrix}=2x-2y\neq 0,\quad (x,y)\in D.$$

(ii) 考察函数 $u=f(x,y)=x+y$,其中 $x^2+y^2=v$,则由 $x^2+y^2\geqslant 2xy$,可知 $(x+y)^2=v+2xy\leqslant 2v$.从而得$-\sqrt{2v}\leqslant x+y\leqslant\sqrt{2v}$,$(x,y)\in D$.

因此,T 的值域为 $R(T)=\{(u,v):v>0,-\sqrt{2v}\leqslant u\leqslant\sqrt{2v}\}$.

设$(u,v)\in R(T)$,在 xOy 平面上,$u=x+y$ 是斜率为 1 的直线方程,它与圆周 $x^2+y^2=v$ 相交,且确实在 D 内相交,这说明 T 是全域单射.

(2) 对 $y_0\in\mathbf{R}^1$,易知在点(x_0,y_0)处 T 的 Jacobi 行列式为$-f'(x_0)$,故根据逆映射定理,可知 T 在点(x_0,y_0)的某个邻域上是可逆的.又由题设知,$f(x)$在点 $x=x_0$ 的某个邻域上也有逆,记为 g.从而在点(x_0,y_0)的充分小邻域上,可解得 $F(x,y)=(f(x),-y+xf(x))$的逆 F^{-1} 之每个分量为 $g(u)=g[f(x)]=x$,以及

$$y=-v+xf(x)=-v+g(u)f[g(u)]=-v+ug(u).$$

(3) 不妨假定 f 不是常数函数,而存在 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,使得 $\nabla f(x_0,y_0)=(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0))\neq(0,0)$.从而又不妨假定 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$(否则旋转坐标轴),且记 $f(x_0,y_0)=a$,并考察映射

$$F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\quad F(x,y)=(f(x,y),y).$$

由于 F 的 Jacobi 行列式在点(x_0,y_0)处不为 0,故根据逆映射定理,可知 F 是局部可逆的.即存在点(a,y_0)的邻域上的映射 T,以及包含 y_0 的 $I_0=[y_0-\delta,y_0+\delta]$ $(\delta>0)$,使得 $F[T(a,y_0)]=(a,y)(y\in I_0)$.令 $\lambda(t)$是从$[0,1]$到 I_0 的双射,那么 $g(t)=T(a,\lambda(t))(0\leqslant t\leqslant 1)$就满足命题要求.

3.3 函数相关性(以二元函数为例)

定理 3.3.1 设 $u=f(x,y)$,$v=g(x,y)$在区域 D 上有连续偏导数,则 u 与 v 之间有函数关

系的充分必要条件是$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0((x,y)\in D)$.

例 3.3.1 试证明下列命题:

(1) 设 $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数,则 u 与 v 之间有函数关系当且仅当 $J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$.

(2) (i) $u=x^2-y^2$ 与 $v=2xy$ 之间无函数关系.

(ii) $u=x+y+z$, $v=xy+yz+zx$, $w=x^2+y^2+z^2$ 之间有函数关系.

(iii) $u=\ln x+\ln y$ 与 $v=\cos(xy)$相关.

(iv) $u=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$与 $v=\arcsin\frac{2(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$相关.

证明 (1) 必要性.假定 u,v 满足 $F(u,v)=0$,则由 $F(u,v)=F[f(x,y),g(x,y)]$可知

$$F'_u\cdot f'_x+F'_v g'_x=0,\quad F'_u f'_y+F'_v g'_y=0.$$

注意到 F'_u, F'_v不同时为0,故上述方程组存在非零解,从而有 $J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$.

充分性.若 u'_x, u'_y, v'_x, v'_y全为0,则 u,v 是常数,从而有关系 $u=cv$.若上述四个值有一个非0,例如是 $v'_y\neq0$,则由隐函数存在定理,可从 $v=g(x,y)$可确定函数 $y=\psi(x,v)$.代入 $u=f(x,y)$可得 $u=f(x,\psi(x,v))$,记为 $F(x,v)$.

因此,我们有

$$0=J=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F'_x+F'_v v'_x & F'_v v'_y\\ v'_x & v'_y\end{vmatrix}=F'_x v'_y.$$

由此知 $F'_x=0$.这说明 F不是 x 的函数,即 $u=F(v)$.

(2) (i) 注意 $J=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{vmatrix}=4(x^2+y^2)\neq0$.

(ii) 注意,其 Jacobi 行列式为

$$J=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ y+z & z+x & x+y\\ 2x & 2y & 2z\end{vmatrix}=0\quad(u^2-2v-w=0).$$

(iii) 注意 $J=\begin{vmatrix}1/x & 1/y\\ -y\sin(xy) & -x\sin(xy)\end{vmatrix}=-\sin(xy)\begin{vmatrix}1/x & 1/y\\ y & x\end{vmatrix}=0$.实际上,以 $xy=e^u$ 代入,可得 $v=\cos e^u$.

(iv) 求偏导数,可得

$$u'_x=\frac{1}{1+x^2},\qquad u'_y=\frac{1}{1+y^2},$$

$$v'_x=\frac{2}{\sqrt{(1+x^2)^2(1+y^2)^2-4(x+y)^2(1-xy)^2}}\,\frac{1-4xy-x^2-y^2+x^2y^2}{1+x^2},$$

$$v_y' = \frac{2}{\sqrt{(1+x^2)^2(1+y^2)^2-4(x+y)^2(1-xy)^2}}\,\frac{1-4xy-x^2-y^2+x^2y^2}{1+y^2},$$

$$J = \frac{2(1-4xy-x^2-y^2+x^2y^2)}{\sqrt{(1+x^2)^2(1+y^2)^2-4(x+y)^2(1-xy)^2}}\cdot\begin{vmatrix}\dfrac{1}{1+x^2} & \dfrac{1}{1+y^2}\\ \dfrac{1}{1+x^2} & \dfrac{1}{1+y^2}\end{vmatrix} = 0.$$

即 $\sin 2u = \sin v$.

例 3.3.2　解答下列问题:

(1) 设 $u=f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上是可微函数.

(i) 试求 u 只是 x^2+y^2 的函数的条件.

(ii) 试求 u 只是 y/x 的函数的条件.

(iii) 试求 u 只是 $ax+by(ab\neq 0)$的函数的条件.

(2) 设 $u=F(x,y,z,t)$,其中 x,y,z,t 满足

$$\varphi(y,z,t)=0,\quad \psi(z,t)=0,$$

且 F,φ,ψ 皆可微.试求存在 $u=u(x,y)$的条件.

(3) 设方程组$\begin{cases}x=f(u,v),\\ y=g(u,v)\end{cases}$确定出$\begin{cases}u=\varphi(x,y),\\ v=\psi(x,y),\end{cases}$其中 f,g 皆可微.若有 $f_u'\cdot\varphi_x'=1$,则 x 只是 u 的函数或 y 只是 v 的函数.

解　(1) (i) 令 $v=x^2+y^2$,则 u 是 v 相关的条件为

$$0=J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}f_x' & f_y'\\ 2x & 2y\end{vmatrix}=0,\quad yf_x'-xf_y'=0.$$

(ii) 令 $v=y/x$,则 u 与相关的条件为

$$0=J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}f_x' & f_y'\\ -y/x^2 & 1/x\end{vmatrix}=0,\quad xf_x'+yf_y'=0.$$

(iii) 令 $v=ax+by$,则条件为

$$0=J=\begin{vmatrix}f_x' & f_y'\\ a & b\end{vmatrix}=bf_x'-af_y'.$$

(2) 假定 $\psi_t'\neq 0$,则有函数 $t=t(z)$.代入 φ,且令 $\Phi(y,z)=\varphi(y,z,t(z))$,若 $\Phi_z'\neq 0$,即 $\varphi_z'+\varphi_t'\cdot t'(z)\neq 0$,则又存在函数 $z=z(y)$.从而得 $t=t[z(y)]$,可导出

$$u=F(x,y,z(y),t[z(y)])=u(x,y).$$

综合以上推理,所要条件为

$$0\neq\varphi_z'+\varphi_t't'(z)=\varphi_z'+\varphi_t'(-\psi_z'/\psi_t'),\quad \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(z,t)}\neq 0.$$

(3) 在式 $x=f(u,v)$两边对 x 求导,可得

$$1=f_u'u_x'+f_v'v_x'=f_u'\varphi_x'+f_v'\psi_x'=1+f_v'\psi_x'.$$

故知 $f'_v\psi'_x=0$,从而我们有

(i) 若 $f'_v=0$,则 x 只是 u 的函数;

(ii) 若 $\psi'_x=0$,则 v 只是 y 的函数.即 y 只是 v 的函数.

例 3.3.3 试证明下列命题:

(1) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$.若积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(任意的 $a<b$)只是 b/a 的函数,则 $f(x)=k/x$.

(2) 设 $f_k\in C([a,b])(k=1,2,\cdots,n)$,则 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关当且仅当

$$\det(a_{ij})\neq 0,\qquad a_{ij}=\int_a^b f_i(x)f_j(x)\mathrm{d}x\quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

证明 (1) 令 $u=g(a,b)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(即 $u=\varphi(b/a)$),又令 $v=h(a,b)=b/a$,则 u 与 v 相关之条件为

$$0=J=\begin{vmatrix} g'_a & g'_b \\ -b/a^2 & 1/a \end{vmatrix},\quad ag'_a+bg'_b=0.$$

因为 f 连续,所以有 $g'_a=-f(a)$,$g'_b=f(b)$.从而上式为

$$-af(a)+bf(b)=0,\quad af(a)=bf(b).$$

注意到 a,b 的任意性,可得 $xf(x)=k$(常数).

(2) 由题设可假定

$$\lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)+\cdots+\lambda_n f_n(x)=0,\quad x\in[a,b].$$

用 $f_i(x)$乘上式两端,且在$[a,b]$上作积分,可得方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{21}+\cdots+\lambda_n a_{n1}=0, \\ \lambda_1 a_{21}+\lambda_2 a_{22}+\cdots+\lambda_n a_{n2}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 a_{n1}+\lambda_2 a_{n2}+\cdots+\lambda_n a_{nn}=0 \end{cases}$$

有非零解当且仅当 $\det(a_{ij})=0$,即$\{f_j\}_{j=1,2,\cdots,n}$相关.而无关当且仅当 $\det(a_{ij})\neq 0$.

第 4 章　一般极值与条件极值

4.1　一般极值问题

求多元函数在其定义域上的最大值或最小值问题,称为一般极值问题(以二元函数为例).

定义 4.1.1　设 $f(x,y)$在区域 D 上定义,$(x_0,y_0)\in D$,若存在邻域 $U=U_\delta((x_0,y_0))\subset D$,使对一切$(x,y)\in U$,有

$$f(x_0,y_0)\geqslant f(x,y)\quad (f(x_0,y_0)\leqslant f(x,y))$$

成立,就说 $f(x,y)$在(x_0,y_0)点达到极大(小)值,(x_0,y_0)称为函数的极大(小)点.极大点与极小点统称为极值点,极大值与极小值统称为极值.

若对任给 $\delta>0$,邻域 $U_\delta((x_0,y_0))$中总存在两点(x_1,y_1)和(x_2,y_2),使得

$$f(x_1,y_1)>f(x_0,y_0),\quad f(x_2,y_2)<f(x_0,y_0),$$

则称(x_0,y_0)为函数 f 的鞍点.

定理 4.1.1　设 $f(x,y)$在(x_0,y_0)点取极值,且函数在该点可微,则

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0;\quad 或\quad \mathrm{d}f(x_0,y_0)=0.$$

定义 4.1.2　若函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)处满足

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\quad f'_y(x_0,y_0)=0,$$

则称点(x_0,y_0)为 $f(x,y)$的临界点(平稳点或稳定点).

若(x_0,y_0)为 $f(x,y)$的临界点,则曲面 $z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0,z_0=f(x_0,y_0))$处的切平面是水平的.

注　若函数 $z=f(x,y)$在极值点处可微,则极值点必是临界点;反之,临界点不一定是极值点.例如点$(0,0)$是函数 $z=xy$ 的临界点,也是鞍点.

定义 4.1.3　设 $f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在 $\boldsymbol{X}_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$点的邻域内属于 $C^{(2)}$ 类,$\boldsymbol{X}_0$ 点是函数 $f(\boldsymbol{X})$的临界点:$f'(\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{0}$.记 $H_f(\boldsymbol{X}_0)$为函数 f 在 $\boldsymbol{X}_0$ 点的 Hesse 矩阵,若其行列式 $\det H_f(\boldsymbol{X}_0)\neq 0$,则称 $\boldsymbol{X}_0$ 是函数非退化的临界点.

定理 4.1.2　设 $\boldsymbol{X}_0$ 是函数 $f(\boldsymbol{X})$非退化的临界点,这时矩阵 $H_f(\boldsymbol{X}_0)$或正定,或负定,或不定.

(1) 若 $H_f(\boldsymbol{X}_0)$是正定的,则 $f(\boldsymbol{X})$在 $\boldsymbol{X}_0$ 点取极小值,或临界点 $\boldsymbol{X}_0$ 是极小点;

(2) 若 $H_f(\boldsymbol{X}_0)$是负定的,则 $f(\boldsymbol{X})$在 $\boldsymbol{X}_0$ 点取极大值,或临界点 $\boldsymbol{X}_0$ 是极大点;

(3) 若 $H_f(\boldsymbol{X}_0)$是不定的,则 $f(\boldsymbol{X})$在 $\boldsymbol{X}_0$ 点无极值,或临界点 $\boldsymbol{X}_0$ 是鞍点.

为了采用矩阵 $H_f(\boldsymbol{X}_0)$的主子行列式来判别 $H_f(\boldsymbol{X}_0)$是正定、负定、不定的条件,记

$$\Delta_k(\boldsymbol{x}_0)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{X}_0)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{X}_0)}{\partial x_1\partial x_k}\\ \cdots & & \cdots\\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{X}_0)}{\partial x_k\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{X}_0)}{\partial x_k^2}\end{vmatrix}\quad (k=1,2,\cdots,n).$$

推论 1　设 $\boldsymbol{X}_0$ 是 $f(\boldsymbol{X})$非退化的临界点.

(1) 若 $\Delta_k(\boldsymbol{X}_0)>0(k=1,2,\cdots,n)$,则 $f(\boldsymbol{X})$在 $\boldsymbol{X}_0$ 点取极小值;

(2) 若$(-1)^k\Delta_k(\boldsymbol{X}_0)>0(k=1,2,\cdots,n)$,则 $f(\boldsymbol{X})$在 $\boldsymbol{X}_0$ 点取极大值;

(3) 若存在一偶数 $k(1<k\leqslant n)$,使 $\Delta_k(\boldsymbol{X}_0)\leqslant 0$,或存在两个不同奇数 $i,j(1\leqslant i,j\leqslant n)$,使 $\Delta_i(\boldsymbol{X}_0)\Delta_j(\boldsymbol{X}_0)\leqslant 0$,则 $f(\boldsymbol{X}_0)$在 $\boldsymbol{X}_0$ 点无极值.

当 $n=2$ 时,由推论1导出下面推论.

推论 2　设(x_0,y_0)是二元函数 $f(x,y)$的非退化临界点,记

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=f''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=f''_{yy}(x_0,y_0).$$

(1) 若 $A>0,AC-B^2>0$,则函数 f 在(x_0,y_0)点取极小值;

(2) 若 $A<0,AC-B^2>0$,则函数 f 在(x_0,y_0)点取极大值;

(3) 若 $AC-B^2<0$,则函数 f 在(x_0,y_0)点无极值.

定理 4.1.3　设 $y=y(x)$是方程 $f(x,y)=0$ 确定的函数.若 $f(x_0,y_0)=0,f'_x(x_0,y_0)=0$.则当$-f''_{xx}/f'_y>0$ 时,$y_0=y(x_0)$是极小值;当$-f''_{xx}/f'_y<0$ 时,$y_0=y(x_0)$是极大值.

注 1　对 $f(x,y)=x^2+y^4$,有 $f'_x(0,0)=0=f'_y(0,0)$,$f(0,0)=0$.因为 $\Delta_2(\boldsymbol{X})|_{\boldsymbol{X}=(0,0)}=0$,所以不能用上述定理判定其极值情况.但由于 $f(x,y)\geqslant 0$,故点$(0,0)$是 f 的极小值点.

注 2　函数 $z=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值,但没有极小值.理由如下:由方程组

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-(1+e^y)\sin x=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=e^y(\cos x-1-y)=0$$

可解出 $x=k\pi,y=(-1)^k-1(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.又因为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(1+e^y)\cos x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^y\sin x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^y(\cos x-2-y),$$

所以在点$(2m\pi,0)(m=0,\pm 1,\cdots)$处,可知

$$A=-2,\quad B=0,\quad C=-1;\quad AC-B^2=2>0.$$

这说$\{(2m\pi,0)\}$是极大值点列.

而对于点列$((2m+1)\pi,-2)(m=0,\pm 1,\cdots)$,由于

$$A=1+e^{-2},\quad B=0,\quad C=-e^{-2};\quad AC-B^2<0,$$

故该点列均非极值点.

注 3　函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$在过原点$(0,0)$的任一直线 l 上,$f(0,0)$取到极小值,但点$(0,0)$不是 $f(x,y)$的极值点.理由如下:

(i) 由 $f(0,y)=y^2,f(x,0)=2x^4$ 可知,在坐标轴上 $f(0,0)$是极小值;对于 $y=kx(k\neq 0)$,我们有 $f(x,kx)=x^2(k-x)(k-2x)$,故知 $f(x,kx)\geqslant f(0,0)=0(|x|<|k|/2)$.

(ii) 注意 $f(x,x)>0(0<x<1/2)$,$f(x,3x^2/2)<0(x\neq 0)$,故点$(0,0)$非 f 之极值点.

例 4.1.1　解答下列问题:

(1) 试求 $z(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$之极值.

(2) 试求 $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$ 之极值.

解　(1) 解偏导数形成的方程组

$$z'_x=xy^3(12-3x-2y)=0,\quad z'_y=x^2y^2(18-3x-4y)=0,$$

得解(稳定点):$\boldsymbol{X}_1=(2,3)$,$\boldsymbol{X}_2=(0,y)$,$\boldsymbol{X}_3=(x,0)$.

为检查充分条件，再求二阶偏导数：

$$z''_{xx}=12y^3-6xy^3-2y^4,\quad z''_{xy}=36xy^2-9x^2y^2-8xy^3,$$
$$z''_{yy}=36x^2y-6x^3y-12x^2y^2.$$

(i) 在 $\boldsymbol{X}_1$ 点处：因为 $z''_{xx}(\boldsymbol{X}_1)=-162$，$z''_{xy}(\boldsymbol{X}_1)=-108$，$z''_{yy}(\boldsymbol{X}_1)=-144$，所以 $AC-B^2=144\times162-(108)^2>0$．$\boldsymbol{X}_1$ 是极大值点，极大值为 $z(2,3)=108$．

(ii) 在点 $\boldsymbol{X}_2$ 与 $\boldsymbol{X}_3$ 处：由于此时有 $AC-B^2=0$，故判别法则失效．但由等式

$$\begin{aligned}\Delta z(0,y)&=z(\Delta x,y+\Delta y)-z(0,y)=(\Delta x)^2(y+\Delta y)^3(6-\Delta x-y-\Delta y)\\&=(\Delta x)^2(y+\Delta y)^2[(6-\Delta x)(y+\Delta y)-(y+\Delta y)^2]\end{aligned}$$

可知，在 Δx，Δy 充分小时，有

$$\Delta z(0,y)\begin{cases}\leqslant0, & -\infty<y<0\text{ 或 }6<y<+\infty,\\ \geqslant0, & 0<y<6.\end{cases}$$

从而我们可得结论：

在 $-\infty<y<0$ 与 $6<y<+\infty$ 时，$z(x,y)$ 在点 $\boldsymbol{X}_2$ 处达极大值；在 $0<y<6$ 时，$z(x,y)$ 在点 $\boldsymbol{X}_2$ 处达极小值；而在点 $(0,0)$ 与 $(0,6)$ 处，由于变量 y 通过 $y=0$ 与 $y=6$ 时 $\Delta z(0,y)$ 要改变符号，故 $z(x,y)$ 无极值．

再看点 $\boldsymbol{X}_3$ 处：由于 $z(x,0)=0$，故还需考察改变量

$$\Delta z(x,0)=z(x+\Delta x,\Delta y)-z(x,0)=(x+\Delta x)^2\Delta y^2\Delta y(6-x-\Delta x-\Delta y).$$

易知对充分小的 Δx，Δy，且 $x+\Delta x\neq0$，$6-x-\Delta x-\Delta y\neq0$ 时，注意到 $\Delta z(x,0)$ 作为 Δx，Δy 的函数在点 $(\Delta x,\Delta y)$ 与 $(\Delta x,-\Delta y)$ 处有不同的符号，故 $(x,0)$ 不是 $z(x,y)$ 的极值点．

(2) 求解偏导数方程组

$$f'_x=4x^3-4x+4y=0,\quad f'_y=4y^3+4x-4y=0,$$

得稳定点：$\boldsymbol{X}_1=(0,0)$，$\boldsymbol{X}_2=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$\boldsymbol{X}_3=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$．

再求二阶偏导数，可知

$$f''_{xx}=12x^2-4,\quad f''_{xy}=4,\quad f''_{yy}=12y^2-4.$$

由此导出 $AC-B^2|_{\boldsymbol{X}_1}=0$，从而在点 $\boldsymbol{X}_1$ 处判别法则失效．但若取 $y=x$ 并令 $(x,y)\to(0,0)$，有 $f(x,y)=2x^4>0$；又若沿 $y=0$ 并令 $(x,y)\to(0,0)$ 时，有 $f(x,y)=x^4-2x^2<0$．这说明 $\boldsymbol{X}_1$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点．

在 $\boldsymbol{X}_2$ 点．由 $AC-B^2|_{\boldsymbol{X}_2}=384>0$，$A|_{\boldsymbol{X}_2}=20>0$，可知 $f(x,y)$ 在 $\boldsymbol{X}_2$ 处达到极小值 8．点 $\boldsymbol{X}_3$ 同此理．

例 4.1.2 解答下列问题：

(1) 设 $a>0$，试求 $f(x,y,z)=xy^2z^3(a-x-2y-3z)$ 之极值．

(2) 设 $a^2+b^2+c^2\neq0$，试求 $f(x,y)=(ax+by+c)/\sqrt{x^2+y^2+1}$ 之极值．

解 (1) 立出一阶偏导数方程组

$$\begin{cases} f'_x = y^2z^3(a-2x-2y-3z)=0, \\ f'_y = 2xyz^3(a-x-3y-3z)=0, \\ f'_z = 3xy^2z^2(a-x-2y-4z)=0. \end{cases}$$

解之可得临界点 $\boldsymbol{X}_0=(a/7,a/7,a/7)$;直线 $x=0$,$2y+3z=a$ 上的点 $\boldsymbol{X}_1=(0,y,z)$;平面 $y=0$ 上的点 $\boldsymbol{X}_2=(x,0,z)$;平面 $z=0$ 上的点 $\boldsymbol{X}_3=(x,y,0)$.

再看二阶偏导数,我们有

$$f''_{xx}=-2y^2z^3,\quad f''_{xy}=2yz^3(a-2x-3y-3z),\quad f''_{xz}=3y^2z^2(a-2x-2y-4z).$$
$$f''_{yy}=2xz^3(a-x-6y-3z),\quad f''_{yz}=6xyz^2(a-x-3y-4z),$$
$$f''_{zz}=6xy^2z(a-x-2y-8z).$$

由此可知,在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处,其值为

$$f''_{xx}=-2a^5/7^5,\quad f''_{xy}=-2a^5/7^5,\quad f''_{xz}=-3a^5/7^5,\quad f''_{yy}=-6a^5/7^5,$$
$$f''_{yz}=-6a^5/7^5,\quad f''_{zz}=-24a^5/7^5.$$

从而得到(在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处)

$$f''_{xx}<0,\quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix}<0.$$

这说明 $f(x,y,z)$在 $\boldsymbol{X}_0$ 处达到极大值,其值为 $a^7/7^7$.

在点 $\boldsymbol{X}_1$ 处,在 $\mathrm{d}^2f=-2y^2z^3(\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\mathrm{d}x\mathrm{d}z)$,故可知 f 在 $\boldsymbol{X}_1$ 处附近可取相反的符号,这说明 $\boldsymbol{X}_1$ 不是极值点.

在 $\boldsymbol{X}_2$ 处,有 $\mathrm{d}^2f=2xz^3(a-x-3z)\mathrm{d}y^2$.故在 $a-x-3z\neq0$,$x\neq0$,$z\neq0$ 时它有确定的符号.这说明此时,f 在 $\boldsymbol{X}_2$ 处有极值为 0.

在 $\boldsymbol{X}_3$ 处,f 的二阶微分恒为 0,而 $\mathrm{d}^3f=6xy^2(a-x-2y)\mathrm{d}z^3\neq0$.这说明 $\boldsymbol{X}_3$ 非 f 之极值点.

(2) 偏导数方程组为

$$\begin{cases} f'_x=[a(x^2+y^2+1)-x(ax+by+c)]/(x^2+y^2+1)^{3/2}=0, \\ f'_y=[b(x^2+y^2+1)-y(ax+by+c)]/(x^2+y^2+1)^{3/2}=0, \end{cases} \qquad ①$$

用$-b(x^2+y^2+1)^{3/2}$乘第一式,用 $a(x^2+y^2+1)^{3/2}$乘第二式,相加得

$$(bx-ay)(ax+by+c)=0,$$

并导出 $bx=ay$,$ax+by+c=0$.注意到式①可求出临界点 $x=a/c$,$y=b/c$,$c\neq0$(若 $c=0$,则由 $a^2+b^2+c^2\neq0$ 推出 f 无临界点).

再求二阶偏导数,可知(记 $\alpha=x^2+y^2+1$,$\beta=ax+by+c$)

$$f''_{xx}=-\frac{by+c}{\alpha^{3/2}}-\frac{3x[a\alpha-x\beta]}{\alpha^{5/2}},\quad f''_{xy}=-\frac{ax+by}{\alpha^{3/2}}+\frac{3xy\beta}{\alpha^{5/2}}.$$

$$f''_{yy}=-\frac{ax+c}{\alpha^{3/2}}-\frac{3y(b\alpha-y\beta)}{\alpha^{5/2}};\quad f''_{xx}\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=-(b^2+c^2)\Big/c\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{3/2},$$

$f''_{yy}\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=-(a^2+c^2)\Big/c\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{3/2}$，$f''_{xy}\left(\frac{a}{c},\frac{b}{c}\right)=ab\Big/c\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^{3/2}$.

因此，$AC-B^2=\left(\frac{b^2+c^2}{c}\cdot\frac{a^2+c^2}{c}-\frac{a^2b^2}{c}\right)\Big/\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1\right)^3>0$.故 f 在该点有极值.

因为 $f''_{xx}(a/c,b/c)\begin{cases}<0, & c>0,\\ >0, & c<0,\end{cases}$所以当 $c>0$ 时 $f(x,y)$在$(a/c,b/c)$处取到最大值 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；当 $c<0$ 时在$(a/c,b/c)$处取到最小值$-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

例 4.1.3 解答下列问题：

(1) 试论 $z=z(x,y)=x+y+4\sin x\sin y$ 之极值.

(2) 试论 $z=z(x,y)=\tan x+\tan y-\tan(x+y)$之极值.

解 (1) 写出偏导数方程组

$$z'_x=1+4\cos x\sin y=0,\quad z'_y=1+4\sin x\cos y=0.$$

并改写为方程组

$$1-2\sin(x-y)+2\sin(x+y)=0,\quad 1+2\sin(x-y)+2\sin(x+y)=0,$$

由此得到 $\sin(x-y)=0$，$\sin(x+y)=-1/2$.从而解出

$$x+y=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+m\pi,\quad x-y=n\pi\quad(m,n\in\mathbf{Z}),\tag{①}$$

$$\begin{cases}x=(-1)^{m+1}\pi/12+(m+n)\pi/2,\\ y=(-1)^{m+1}\pi/12+(m-n)\pi/2\end{cases}\quad(m,n\in\mathbf{Z}).$$

再看二阶偏导数，易知

$$z''_{xx}=-4\sin x\sin y,\quad z''_{yy}=-4\sin x\sin y,\quad z''_{xy}=4\cos x\cos y.$$

由此得出

$$AC-B^2=16\sin^2x\cdot\sin^2y-16\cos^2x\cdot\cos^2y=-16\cos(x-y)\cdot\cos(x+y).$$

引用式①，可求出 $AC-B^2$ 在稳定点处的值为

$$-16\cos(n\pi)\cdot\cos[(-1)^{m+1}\pi/6+m\pi]=(-1)^{m+n+1}16\cos\frac{\pi}{6}\quad(m,n\in\mathbf{Z}).$$

从而我们有：当 $m+n+1$ 为偶数时，$AC-B^2>0$，此时 z 存在极值.即当 $m+n$ 为奇数时，$z(x,y)$在临界点达到极值.为了区分极大极小值，再改写它的二阶偏导数为 $z''_{xx}=2\cos(x+y)-2\cos(x-y)$，可知在临界点处的值为

$$2\left\{\cos\left[(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+m\pi\right]-\cos n\pi\right\}=(-1)^m\sqrt{3}-(-1)^n\cdot 2.$$

若 $m=2k$(偶数)且 $n=2j-1$(奇数)，则 z''_{xx} 在临界点处的值为$\sqrt{3}+2>0$，故此时 $z(x,y)$在这里取到极小值；

若 $m=2k-1$(奇数且 $n=2j$(偶数))，则 z''_{xx} 在临界点处的值为$-\sqrt{3}-2<0$，故此时 z 在这里取到极大值，且有

$$z(x,y)\text{的极小值}=2k\pi-2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\quad(k\in\mathbf{Z});$$

$$z(x,y)\text{的极大值}=(2k-1)\pi+2+\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}\quad(k\in\mathbf{Z}).$$

(2) 立出偏导数方程组

$$z'_x=\sec^2x-\sec^2(x+y)=0,\quad z'_y=\sec^2y-\sec^2(x+y)=0,$$

由此可得 $\cos^2x=\cos^2y=\cos^2(x+y)\quad(0\leqslant x,y\leqslant\pi)$:

$$\begin{cases}x=0,\\y=0;\end{cases}\begin{cases}x=\pi/3,\\y=\pi/3;\end{cases}\begin{cases}x=2\pi/3,\\y=2\pi/3;\end{cases}\begin{cases}x=\pi,\\y=\pi;\end{cases}\begin{cases}x=0,\\y=\pi;\end{cases}\begin{cases}x=\pi,\\y=0.\end{cases}$$

再求二阶偏导数,可知

$$\begin{aligned}z''_{xx}&=2[\sin x\cdot\sec^2x-\sin(x+y)\cdot\sec^3(x+y)],\\z''_{xy}&=-2\sin(x+y)\sec^3(x+y),\\z''_{yy}&=2[\sin y\cdot\sec^3y-\sin(x+y)\cdot\sec^3(x+y)].\end{aligned}$$

(i) 在 $x=y=\pi/3$ 处有 $A=16\sqrt{3}>0$, $AC-B^2=576>0$,故 $z(x,y)$在此处取到极小值,其值为 $3\sqrt{3}$.

(ii) 在 $x=y=2\pi/3$ 处,有 $A=-16\sqrt{3}<0$, $AC-B^2=576>0$,故 $z(x,y)$在此处取到极大值,其值为 $-3\sqrt{3}$.

注　由本题可解:半径为 a 的圆外切三角形面积 $S=a^2\tan\theta+a^2\tan\varphi-a^2\tan(\theta+\varphi)$之最小值.

例 4.1.4　解答下列问题:

(1) 试求 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 在区域

$$D=\{(x,y):-1\leqslant x\leqslant4,-1\leqslant y\leqslant1\}$$

上的最大值.

(2) 试确定 a 值,使得 $z=3axy-x^3-y^3$ 在(a,a)处达到极值.

解　(1) 解偏导数方程组

$$f'_x=3x^2-8x+2y=0,\quad f'_y=2x-2y=0,$$

可得稳定点 $\boldsymbol{X}_0=(0,0)$.又易知

$$A=f''_{xx}|_{X_0}=-8,\quad B=f''_{xy}|_{X_0}=2,\quad C=f''_{yy}|_{X_0}=-2,\quad AC-B^2>0.$$

由此知,$f(0,0)$是极大值.再看 f 在 D 的边界上的值:

对 $x=-1$,有 $f(-1,y)=-5-2y-y^2\leqslant-3$;

对 $y=-1$,有 $f(x,-1)=x^3-4x^2-2x-1=x^2(x-4)-2x-1\leqslant0+2-1\leqslant1$;

对 $y=1$,有 $f(x,1)=x^3-4x^2+2x-1\leqslant2x-1\leqslant7$;

对 $x=4$,有 $f(4,y)=8y-y^2$.而 $f(y)$是递增函数,故 $f(4,1)=7$ 是最大值.

(2) 易知(a,a)为 $z(x,y)$的临界点.根据

$$A=z''_{xx}|_{(a,a)}=-6a,\quad B=z''_{xy}|_{(a,a)}=3a,\quad C=z''_{xx}|_{(a,a)}=-6a,$$

可知 $AC-B^2|_{(a,a)}=27a^2$.从而有

(i) $a>0$ 时, $z(x,y)$在(a,a)处达极大值.

(ii) $a<0$ 时, $z(x,y)$在(a,a)处达极小值.

(iii) $a=0$ 时,有 $z=-x^3-y^3$,故(a,a)非 z 之极值点.

例 4.1.5　解答下列问题:

(1) 试求由方程 $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0$($a>0$,双纽线)确定的 $y=y(x)$的极值.

(2) 试求由下列方程所确定的 $z=z(x,y)$之极值:

(i) $2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$.

(ii) $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=3$.

解　(1) 由 $f'_x=4x(x^2+y^2)-2a^2x=0$ 可解出稳定点:

$$\boldsymbol{X}_0=(0,0),\quad \boldsymbol{X}_1=(\sqrt{3}a/2\sqrt{2},a/2\sqrt{2}),\quad \boldsymbol{X}_2=(\sqrt{3}a/2\sqrt{2},-a/2\sqrt{2}),$$
$$\boldsymbol{X}_3=(-\sqrt{3}a/2\sqrt{2},a/2\sqrt{2}),\quad \boldsymbol{X}_4=(-\sqrt{3}a/2\sqrt{2},-a/2\sqrt{2}).$$

此外,又有

$$f'_y=4y(x^2+y^2)+2a^2y,\quad f''_{xx}=4(x^2+y^2)+8x^2-2a^2.$$

令 $\Delta=-\dfrac{f''_{xx}}{f'_y}=-\dfrac{4(x^2+y^2)+8x^2-2a^2}{2y[2(x^2+y^2)+a^2]}$,从而可知

在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处,因为 $f'_x=f'_y=0$,所以不能保证隐函数存在.

在点 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4$ 处,由于 $x^2+y^2=a^2/2$, $8x^2=3a^2$,故 Δ 的符号依 y 的符号而定.我们有

由 $\Delta|_{X_1}<0$,可知 $y(x)$在$\sqrt{3}a/2\sqrt{2}$处达到极大值 $a/2\sqrt{2}$.

由 $\Delta|_{X_2}>0$,可知 $y(x)$在$\sqrt{3}a/2\sqrt{2}$处达到极小值$-a/2\sqrt{2}$.

由 $\Delta|_{X_3}<0$,可知 $y(x)$在$-\sqrt{3}a/2\sqrt{2}$处达到极大值 $a/2\sqrt{2}$.

由 $\Delta|_{X_4}>0$,可知 $y(x)$在$-\sqrt{3}a/2\sqrt{2}$处达到极小值$-a/2\sqrt{2}$.

(2) (i) 解偏导方程组

$$4x+2zz'_x+2y-2-4z'_x=0,\quad 2y+2zz'_y+2x-2-4z'_y=0,$$

并令 $z'_x=0=z'_y$可解得临界点 $\boldsymbol{X}_0=(0,1)$.代入原方程又知

$$z^2-4z+3=0,\quad z=1,3,$$

从而有解$(0,1,1)$,$(0,1,3)$.再求二阶偏导数,我们有

$$\begin{cases}4+2(z'_x)^2+2zz''_{xx}-4z''_{xx}=0,\\ 2z'_yz'_x+2zz''_{xy}+2-4z''_{xy}=0,\\ 2+2(z'_y)^2+2zz''_{yy}-4z''_{yy}=0.\end{cases}$$

因此,在点$(0,1,1)$处,有 $A=2$, $B=1$, $C=1$.依据 $A>0$, $AC-B^2=1>0$ 可知,

$z(x,y)$在这里达到极小值 1；而在$(0,1,3)$处，易知 $z(x,y)$达到极大值 3．

(ii) 在原式两端对 x,y 求导，得到

$$\begin{cases}2(x+y)+2(y+z)z'_x+2(z+x)(z'_x+1)=0,\\ 2(x+y)+2(y+z)(1+z'_y)+2(z+x)z'_y=0.\end{cases} \tag{①}$$

令 $z'_x=0=z'_y$，则从上述方程组可解出

$$x+y+z+x=0,\quad x+y+y+z=0.$$

由此知 $x+z=y+z=-(x+y)$，将其代入式①，得到 $3(x+y)^2=3$ 即 $x+y=\pm 1$．从而有

$$\begin{cases}z+x=\mp 1,\\ y+z=\mp 1;\end{cases}\quad \begin{cases}x=y=\pm 1/2,\\ z=\mp 3/2.\end{cases}$$

再看二阶偏导数的情形，即在式①对 x,y 求导(再由 $z'_x=0=z'_y$)，有

$$\begin{cases}1+(y+z)z''_{xx}+1+(z+x)z''_{xx}=0,\\ 1+(y+z)z''_{xy}+(z+x)z''_{xy}=0,\\ 1+(y+z)z''_{yy}+(z+x)z''_{yy}=0.\end{cases}$$

由此可解出

$$z''_{xx}=-\frac{2}{y+z+z+x}=\pm 1,\quad z''_{yy}=-\frac{2}{y+z+z+x}=\pm 1,$$

$$z''_{xy}=\frac{-1}{y+z+z+x}=\pm\frac{1}{2}.$$

(i) 在点 $x=y=1/2$ 处．因为 $z''_{xx}>0$，$z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2=3/4>0$，所以 $z(x,y)$在此达到极小值$-3/2$．

(ii) 在点 $x=y=-1/2$ 处．因为 $z''_{xx}<0$，$z''_{xx}z''_{yy}-(z''_{xy})^2=3/4>0$，所以 $z(x,y)$在此达到极大值 $3/2$．

例 4.1.6　解答下列问题：

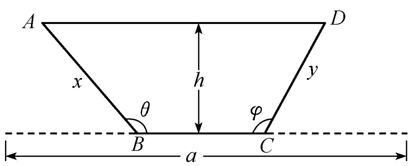


图 4.1

(1) 将长为 a 的纸条折成图 4.1 之形状，试求 θ,φ,x 与 y 的值，使四边形 $ABCD$ 之面积最大．

(2) 求圆的内接最大三角形的面积．

(3) 设一个四边形的各边长为 a,b,c,d，试求其组成的最大面积．

(4) 试求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之外切三角形面积之最大者．

(5) 设$\triangle ABC$的顶点为 $A=(a_1,b_1)$，$B=(a_2,b_2)$，$C=(a_3,b_3)$，求平面上一点 $P=(x,y)$，使得

(i) $(\overline{PA})^2+(\overline{PB})^2+(\overline{PC})^2$ 达到最小值．

(ii) $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$达到最小值.

(6) 求过点 $\boldsymbol{X}_0=(2,1,1/3)$的一个平面,使该平面与三个坐标平面所围的四面体之体积最小.

解 (1) 如图 4.1,$x\sin\theta=h=y\sin\varphi(0\leqslant\theta,\varphi\leqslant\pi)$.问题化为求$(0\leqslant x\leqslant a)$

$$S=\frac{h}{2}(AD+BC)=\frac{x\sin\theta}{2}(a-x-y-x\cos\theta-y\cos\varphi+a-x-y)$$

的极值.用 $y=x\sin\theta/\sin\varphi$代入,作函数

$$f(x,\theta,\varphi)=\left(2a-2x-2\frac{x\sin\theta}{\sin\varphi}-x\cos\theta-\frac{x\sin\theta}{\sin\varphi}\cos\varphi\right)x\sin\theta,$$

并建立偏导数方程组

$$f'_x=\sin\theta(2a-4x-4x\sin\theta/\sin\varphi-2x\cos\theta-2x\sin\theta\cot\theta)=0, \quad ①$$

$$f'_\theta=x(2a\cos\theta-2x\cos\theta-4x\sin\theta\cos\theta/\sin\varphi-x\cos^2\theta+x\sin^2\theta$$
$$-2x\sin\theta\cos\theta\cot\varphi)=0, \quad ②$$

$$f'_\varphi=x^2\sin^2\theta(2\cos\varphi+1)/\sin^2\varphi=0. \quad ③$$

由③知 $\cos\varphi=-1/2$,即 $\varphi=2\pi/3$.代入①,②可得

$$\begin{cases}2a-4x-2x\cos\theta-2\sqrt{3}x\sin\theta=0,\\ 2a\cos\theta-2x\cos\theta-x\cos^2\theta+x\sin^2\theta-2\sqrt{3}x\sin\theta\cos\theta=0,\end{cases}$$

从而我们有 $\cos\theta=-1/2$,即 $\theta=2\pi/3$,以及 $x=a/3$.此时,不难导出 $y=a/3$.

再考察在 $x=y=a/3$,$\theta=\varphi=2\pi/3$ 处的二阶偏导数行列式:

$$\begin{vmatrix}f''_{xx} & f''_{x\theta} & f''_{x\varphi}\\ f''_{\theta x} & f''_{\theta\theta} & f''_{\theta\varphi}\\ f''_{\varphi x} & f''_{\varphi\theta} & f''_{\varphi\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3\sqrt{3} & a & 0\\ a & -2a^2/3\sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{3}a^2/9\end{vmatrix},$$

得到 $\Delta_1<0$,$\Delta_2=a^2>0$,$\Delta_3=-\sqrt{3}a^4/9<0$.故在此处存在极大值:$\sqrt{3}a^2/12$.

再证当 x,y,θ,φ是边界值时的情形.易知此时 $S=0$,这说明最大面积在 $x=y=a/3$,$\theta=\varphi=2\pi/3$ 时达到.(这一结论相当一个正六边形的二等分.)

(2) 设$\triangle ABC$是圆内接三角形,且记$\angle BOC=\theta$,$\angle COA=\varphi$(O是圆心),则该三角形之面积为$(0\leqslant\theta,\varphi,\theta+\varphi\leqslant2\pi$,$a$是圆半径)

$$S=\frac{a^2}{2}[\sin\theta+\cos\varphi+\sin(2\pi-(\theta+\varphi))]=\frac{a^2}{2}[\sin\theta+\sin\varphi-\sin(\theta+\varphi)].$$

令 $f(\theta,\varphi)=\sin\theta+\sin\varphi-\sin(\theta+\varphi)$,并立得偏导数方程组

$$f'_\theta=\cos\theta-\cos(\theta+\varphi)=0,\quad f'_\varphi=\cos\varphi-\cos(\theta+\varphi)=0,$$

得解 $\cos\theta=\cos\varphi=\cos(\theta+\varphi)$,即 $\theta=\varphi=\pi-(\theta+\varphi)=2\pi/3$.再求二阶偏导数,易知 $f''_{\theta\theta}=-\sin\theta+\sin(\theta+\varphi)$,以及

$$f''_{\theta\varphi}=\sin(\theta+\varphi),\quad f''_{\varphi\varphi}=-\sin\varphi+\sin(\theta+\varphi).$$

从而我们有 $A=-\sqrt{3}<0$,$AC-B^2=9/4>0$.这说明 $f(\theta,\varphi)$在 $\theta=\varphi=2\pi/3$ 上取到

极大值，且其值为 $3\sqrt{3}/2$.

此外，在边界 $\theta=0$ 或 $\varphi=0$，或 $\theta+\varphi=2\pi$ 处，均有 $f(\theta,\varphi)=0$. 因此，该极大值为最大值.

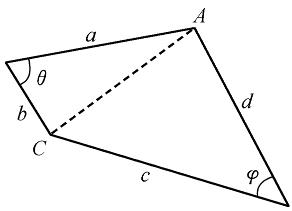


图 4.2

(3) 如图 4.2 所示，令边 a 与 b 之夹角为 θ，c 与 d 之夹角为 φ，则该四边形之面积 S 以及对角线 AC 的长 $\overline{AC}$ 各为

$$S=\frac{1}{2}(ab\sin\theta+cd\sin\varphi),$$

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta=\overline{AC}^2=c^2+d^2-2cd\cos\varphi.$$

求偏导数方程组(注意，φ 是 θ 的函数)

$$\frac{dS}{d\theta}=\frac{ab}{2}\cos\theta+\frac{cd}{2}\cos\varphi\cdot\frac{d\varphi}{d\theta}=0, \tag{④}$$

$$ab\sin\theta=cd\sin\varphi\frac{d\varphi}{d\theta}. \tag{⑤}$$

由此可解出 $\frac{d\varphi}{d\theta}=-ab\cos\theta/cd\cos\varphi=ab\sin\theta/cd\sin\varphi$. 或写成 $\tan\theta=-\tan\varphi$，$\theta+\varphi=\pi$. 对④，⑤再求导又知

$$\frac{d^2S}{d\theta^2}=-\frac{1}{2}ab\sin\theta-\frac{1}{2}cd\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2+\frac{cd}{2}\cos\varphi\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}.$$

$$ab\cos\theta=cd\cos\varphi\cdot\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2+cd\sin\varphi\cdot\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}.$$

注意到 $\theta+\varphi=\pi$，还有 $\frac{d\varphi}{d\theta}=ab\sin\theta/cd\sin(\pi-\theta)=ab/cd$. 再从上述各式中消去 $\frac{d\varphi}{d\theta}$，$\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}$，我们有

$$\begin{aligned}2\frac{d^2S}{d\theta^2}&=-ab\sin\theta-\frac{a^2b^2}{cd}\sin\theta-\cos\theta\left(ab\cos\theta+\frac{a^2b^2}{cd}\cos\theta\right)\Big/\sin\varphi\\&=-ab(ab+cd)/cd\sin\theta<0.\end{aligned}$$

这说明 $\theta+\varphi=\pi$，即四边形内接圆时面积取极大，其值为

$$S_{大}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c+d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

再考察 θ，φ 取边界值的情形：例如 $\varphi=\pi$，我们有

$$S_{\pi}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}.$$

显然 $S_{大}>S_{\pi}$. 对 $\varphi=0$，$\theta=0$，$\theta=\pi$，也有类似结论. 因此，$S_{大}$ 是最大面积值.

注　若周长 $l=a+b+c+d$ 是定值(a,b,c,d 可变)，则不论四个边长如何变化，其最大四边

形面积 S 总是在 $\varphi+\psi=\pi$ 时达到,且不仅与 a,b,c,d 之顺序无关,还与变换任何一对邻边无关.这说明 S 在 $a=c$ 且 $b=d$ 时最大.此时,$\varphi=\psi=90^\circ$,即正方形面积最大.

(4) 作变换 $x=au,y=bv$,则椭圆在新坐标系 uOv 中成为圆:$u^2+v^2=1$,且面积为原面积之 $1/ab$ 倍.已知单位圆之外切三角形面积之最小者为 $3\sqrt{3}$(正三角形),故该椭圆之最小外切三角形为正三角形,其面积为 $3\sqrt{3}ab$.

(5) (i) 令 $\overline{PA}=d_1$,$\overline{PB}=d_2$,$\overline{PC}=d_3$,且作函数

$$f(x,y)=d_1^2+d_2^2+d_3^2=\sum_{i=1}^{3}[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2].$$

易知其偏导数方程组为

$$f_x'=2[3x-(a_1+a_2+a_3)]=0,\quad f_y'=2[3y-(b_1+b_2+b_3)]=0,$$

由此解出(重心坐标)$x_0=(a_1+a_2+a_3)/3$,$y_0=(b_1+b_2+b_3)/3$.从而在(x_0,y_0)处的二阶偏导数值为

$$f_{xx}''=6=f_{yy}'',\quad f_{xy}''=0,\quad \Delta_2=36>0.$$

这说明 f 在点(x_0,y_0)处,或说在三角形重心处达到极小值,也是最小值.

(ii) 设 $f(x,y)=d_1+d_2+d_3$,以及

$$x-a_i=d_i\cos\alpha_i,\quad y-b_i=d_i\sin\alpha_i\quad(i=1,2,3),$$

其中 $\tan\alpha_1$ 是线段$\overline{PA}$相对于 x 轴的斜率,$\tan\alpha_2$ 与 $\tan\alpha_3$ 类似.现在来求偏导数:

$$f_x'=\frac{x-a_1}{d_1}+\frac{x-a_2}{d_2}+\frac{x-a_3}{d_3}=\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3,$$

$$f_y'=\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3,\quad f_{xx}''=\frac{\sin^2\alpha_1}{d_1}+\frac{\sin^2\alpha_2}{d_2}+\frac{\sin^2\alpha_3}{d_3},$$

$$f_{xy}''=-\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}{d_1}-\frac{\sin\alpha_2\cos\alpha_2}{d_2}-\frac{\sin\alpha_3\cos\alpha_3}{d_3},\quad f_{yy}''=\frac{\cos^2\alpha_1}{d_1}+\frac{\cos^2\alpha_2}{d_2}+\frac{\cos^2\alpha_3}{d_3}.$$

依据 $f_x'=0=f_y'$,可解出

$$\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3=0,\quad \sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3=0.$$

消去 α_3,可得 $\cos(\alpha_1-\alpha_2)=-1/2$,$\alpha_1-\alpha_2=\pm2\pi/3$;类似地还有 $\alpha_2-\alpha_3=\pm2\pi/3$,$\alpha_3-\alpha_1=\pm2\pi/3$,即取到极值的点 P 是直线段$\overline{PA}$,$\overline{PB}$,$\overline{PC}$之间应为夹角 120°.

此外,经计算我们有

$$\Delta_2=\frac{\sin^2(\alpha_2-\alpha_3)}{d_2d_3}+\frac{\sin^2(\alpha_3-\alpha_1)}{d_3d_1}+\frac{\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)}{d_1d_2}\geqslant0.$$

实际上,这里的等号不能成立,因为它将与结论 $\cos(\alpha_i-\alpha_j)=-1/2$ 相矛盾.因此,$\Delta_2>0$(当然 $\Delta_1>0$),这说明上述极值点是极小值点,也是最小值点.

(6) 记过该点的平面法向量为(A,B,C),则平面方程可写成

$$A(x-2)+B(y-1)+C(z-1/3)=0,$$

且它在三个坐标轴上的截距各为

$$x_0=2+\frac{B+C/3}{A},\quad y_0=1+\frac{2A+C/3}{B},\quad z_0=\frac{1}{3}+\frac{2A+B}{C}.$$

从而可知该四面体之体积为

$$V=\frac{1}{6}x_0y_0z_0=\frac{1}{6}\frac{(2A+B+C/3)^3}{ABC}\quad (x_0,y_0,z_0>0).$$

作函数 $F(A,B,C)=3\ln(2A+B+C/3)-\ln A-\ln B-\ln C$(它与 V 具有相同的最小值点),并解偏导方程组(记 $\lambda=2A+B+C/3$)

$$\frac{\partial F}{\partial A}=\frac{6}{\lambda}-\frac{1}{A}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial B}=\frac{3}{\lambda}-\frac{1}{B}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial C}=\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{C}=0,$$

得解 $A:B:C=1:2:6$.从而其相应的平面方程为 $x+2y+6z=6$.

显然,问题的最小值必存在,故此平面方程即为所求.

例 4.1.7　解答下列问题:

(1) 试求平面 $T:Ax+By+Cz+1=0$ 到椭球面 $S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的距离 d.

(2) 设 $\mathbf{R}^3$ 中的两个曲面:

$$S_1:2x^2+(y-1)^2+(z-10)^2=1,\quad S_2:z=1/(x^2+y^2+1),$$

试证明存在点 $P\in S_1,Q\in S_2$,使得直线 $\overline{PQ}$ 垂直于 S_1 与 S_2.

解　(1) (i) 若 T 与 S 相交,则 $d=0$;若 T 与 S 不相交,则 d 是 T 与 S 上最近的平行切平面之间的距离.

(ii) 易知 S 在点(x_0,y_0,z_0)处的切平面为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$,如果它与 T 平行,那么就存在常数 k,使得

$$x_0/a^2=kA,\quad y_0/b^2=kB,\quad z_0/c^2=kC.$$

注意到 $1=x_0^2/a^2+y_0^2/b^2+z_0^2/c^2=k^2(a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2)$,故可得 $|k|=1/m$($m=\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}$).还注意到从原点到 T 之距离为 $h=1/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$,而平行切平面又可写为 $k(Ax+By+Cz)=1$,因此从原点到平行切平面之距离为

$$1/|k|\sqrt{A^2+B^2+C^2}=hm.$$

从而,若 $m<1$,则给定的平面离原点之距离比切平面离原点之距离还远,且与椭球面不相交.此时,T 与 S 之距离为 $h(1-m)$;若 $m\geqslant 1$,则 T 与 S 相交,则距离为0.

(2) (i) 以 $d(P,Q)=\|P-Q\|$ 表示点 P 到 Q 之距离.不难得知,存在 $P_0\in S_1,Q_0\in S_2$,使得

$$d(P_0,Q_0)=d(S_1,S_2)=\inf\{d(P,Q):P\in S_1,Q\in S_2\},$$

这是因为 $d(P,S_2)$在有界闭集 S_1 上是 $P\in S_1$ 的连续函数,所以有 $P_0\in S_1$,使得 $d(P_0,S_2)=d(S_1,S_2)$.又因为作为 $Q\in S_2$ 上的函数 $d(P_0,Q)$满足

$$\inf_{Q\in S_2}\{d(P_0,Q)\}=\inf_{Q\in T}\{d(P_0,Q)\},$$

其中 $T=\{Q\in S_2: d(P_0,Q)\leqslant d(S_1,S_2)+1\}$，所以又存在 $Q_0\in T\subset S_2$，使得 $d(P_0,Q_0)=d(P_0,S_2)=d(S_1,S_2)$.

(ii) 若 $(x,y,z)\in S_1$，则 $z\geqslant 9$；若 $(x,y,z)\in S_2$，则 $z\leqslant 1$. 由此知 $P_0\neq Q_0$. 令

$$\begin{cases} g_1(x,y,z)=2x^2+(y-1)^2+(z-10)^2, \\ g_2(x,y,z)=z(x^2+y^2+1), \end{cases} \qquad \text{(水平集)}$$

且在 $\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3$ 上定义函数

$$F(x,y,z,u,v,w)=(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2,$$

$$f_1(x,y,z,u,v,w)=g_1(x,y,z),$$

$$f_2(x,y,z,u,v,w)=g_2(u,v,w),$$

则有

$$S_1\times S_2=\{(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3: f_1(\xi,\eta)=1, f_2(\xi,\eta)=1\}.$$

在(i)中已指出，存在 $(P_0,Q_0)\in S_1\times S_2$，使得 F 在其上达到最小值. 而对 $(\xi,\eta)\in S_1\times S_2$，向量

$$\nabla f_1(\xi,\eta)=(\nabla g_1(\xi),0) \quad 与 \quad \nabla f_2(\xi,\eta)=(0,\nabla g_2(\eta))$$

是线性无关的，故根据 Lagrange 乘子定理可知，存在 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}^1$，使得

$$\nabla F(P_0,Q_0)=\lambda\nabla f_1(P_0,Q_0)+\mu\nabla f_2(P_0,Q_0).$$

因为 $\nabla F(P_0,Q_0)=(2(P_0-Q_0),2(P_0-Q_0))$，以及

$$\begin{aligned}\lambda\nabla f_1(P_0,Q_0)+\mu\nabla f_2(P_0,Q_0)&=\lambda(\nabla g_1(P_0),0)+\mu(0,\nabla g_2(Q_0))\\&=(\lambda\nabla g_1(P_0),\mu\nabla g_2(Q_0)),\end{aligned}$$

所以得到

$$\lambda\nabla g_1(P_0)/2=P_0-Q_0=-\mu\nabla g_2(Q_0)/2.$$

注意到 P_0-Q_0，$\nabla g_1(P_0)$，$\nabla g_2(Q_0)$ 均不为 0，故向量 P_0-Q_0 平行于 $\nabla g_1(P_0)$ 与 $\nabla g_2(Q_0)$. 证毕.

例 4.1.8　试证明下列不等式：

(1) 设 $D=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<\infty\}$，则

$$f(x,y)=yx^y(1-x)<\mathrm{e}^{-1} \quad ((x,y)\in D).$$

(2) $\dfrac{x^2+y^2}{4}\leqslant\mathrm{e}^{x+y-2} \quad (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$.

(3) 设 $a>b>1$，则 $a^b>b^a$.

证明　(1) 对取定的 $x_0\in(0,1)$，由于 $\lim\limits_{y\to 0^+}f(x_0,y)=0$，$\lim\limits_{y\to+\infty}f(x_0,y)=0$，故知 $f(x_0,y)$ 作为 $y\in(0,\infty)$ 的函数必达到最大值，且其最大值点 (x_0,y_0) 满足方程

$$f'_y(x_0,y)=x_0^y(1-x_0)(1+y\cdot\ln x_0)=0, \quad y_0=-1/\ln x_0.$$

也就是说，$f(x_0,y)$ 在唯一的点 $(x_0,y_0=-1/\ln x_0)$ 上达到最大值，

$$f(x_0,y)\leqslant f(x_0,y_0)=-\mathrm{e}^{-1}(1-x_0)/\ln x_0.$$

再考察函数 $F(x)=-(1-x)/\ln x(0<x<1)$.注意到

$$\begin{aligned}-\ln x&=-\ln[1+(x-1)]\\&=(1-x)+(x-1)^2/2[1+\theta(x-1)]^2>1-x\quad(0<x<1),\end{aligned}$$

故 $F(x)<1$.从而结合前述结果,我们有

$$f(x,y)<\mathrm{e}^{-1}\quad(0<x<1,0<y<\infty).$$

注　由 $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=1$,故 $f(x,y)$在 D 上不能取到值 e^{-1}.

(2) 令 $f(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x-y}(x\geqslant0,y\geqslant0)$,由于有 $f(x,y)\geqslant0$ 以及 $\lim\limits_{x,y\to+\infty}f(x,y)=0$,故 $f(x,y)$可取到最大值.因为偏导方程组为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(2x-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-x-y},\quad\frac{\partial f}{\partial y}=(2y-x^2-y^2)\mathrm{e}^{-x-y},$$

所以可得 $f(x,y)$的临界点(x_0,y_0)满足

$$2x_0-x_0^2-y_0^2=0,\quad2y_0-x_0^2-y_0^2=0.$$

由此知 $x_0=y_0$,而且 $2x_0^2-2x_0=0$,故在第一象限内有唯一临界点$(x_0,y_0)=(1,1)$.

注意到在 Ox 轴上,有 $f(x,0)=x^2\mathrm{e}^{-x}$,$\dfrac{\mathrm{d}f(x,0)}{\mathrm{d}x}=(2x-x^2)\mathrm{e}^{-x}$,故又知 $f(x,0)$在点$(2,0)$处取到最大值.同理可知,点$(0,2)$也是 $f(0,y)$的最大值点.因为

$$f(1,1)=2\mathrm{e}^{-2},\quad f(2,0)=4\mathrm{e}^{-2}=f(0,2),$$

所以 $f(x,y)$在第一象限中的最大值是 $4\mathrm{e}^{-2}$.这说明

$$(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x-y}\leqslant4\mathrm{e}^{-2},\quad\frac{x^2+y^2}{4}\leqslant\mathrm{e}^{x+y-2}.$$

(3) 取对数,往证 $\ln\ln a+a\ln b>\ln\ln b+b\ln a$.令 $x=\ln a/\ln b>1$,$y=\ln b$,命题转为求证 $\ln x>y(x\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{xy})$.再令 $F(x,y)=x\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{xy}$,则由 $F_y'=x\mathrm{e}^y-x\mathrm{e}^{xy}<0$,可知 $F(x,y)<F(x,0)=x-1$.

若 $F(x,y)\leqslant0$,则 $\ln x>yF(x,y)$;

若 $F(x,y)>0$,则 $F(x,y)=\mathrm{e}^y(x-\mathrm{e}^{(x-1)y})>0$,$(x-1)y<\ln x$.

这说明 $\ln x>(x-1)y>yF(x,y)$.

例 4.1.9　试证明下列命题:

(1) 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为凸区域,$f\in C(\overline{D})$且在 D 内可微.若 $f(x,y)=C$(常数,$(x,y)\in\partial D$),则 $f(x,y)$在 D 内有临界点.

(2) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续三阶偏导数.若有

$$\frac{\partial^2f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f(x,y)}{\partial y^2}>0\quad((x,y)\in\mathbf{R}^2),$$

则 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 内没有极大值点.

(3) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续二阶偏导数.若 f 的 Hesse 矩阵 H 在一切点$(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 上均是正定的,则 f 至多有一个临界点.

(4) 设 $A>0$, $B^2<AC$, 且有
$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F,\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2,$$
则 $f(x,y)$ 存在极小值点 $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$, 且有
$$f(x_0,y_0)=Dx_0+Ey_0+F=\begin{vmatrix}A&B&D\\B&C&E\\D&E&F\end{vmatrix}\Big/(AC-B).$$

证明 (1) 若 $f(x,y)\equiv C((x,y)\in\overline{D})$, 则结论显然. 否则, 不妨假定存在 $(x_0,y_0)\in D$, 使得 $f(x_0,y_0)>C$. 因为 $f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上必有最大值, 所以不妨还假定
$$f(x_0,y_0)=\max\{f(x,y):(x,y)\in\overline{D}\}.$$
显然 (x_0,y_0) 是极大值点. 由 f 的可微性即知, 点 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的临界点.

(2) 由题设可知, f 的 Hesse 矩阵之迹在 $\mathbf{R}^2$ 上处处是正值. 然而, 要使 $f(x,y)$ 具有极大值点, 其 Hesse 矩阵必须具有负的特征值 ($f\in C^{(3)}(\mathbf{R}^2)$). 因此, 其迹必须是负值. 由此即得所证.

(3) 反证法. 假定 f 有两个临界点: $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\in\mathbf{R}^2$, 则由 $H|_{\boldsymbol{X}_1}$ 与 $H|_{\boldsymbol{X}_2}$ 是正定的, 故知 $\boldsymbol{X}_1$ 与 $\boldsymbol{X}_2$ 均是 f 的极小值点.

考察函数 $F(t)=f(t\boldsymbol{X}_1+(1-t)\boldsymbol{X}_2)$, 易知 $F(t)$ 在 $t=0,1$ 处达到极小值. 从而知存在 $t_0\in(0,1)$, 使得 $F(t)$ 在 t_0 处达到极大值. 因此有 $F''(t_0)\leqslant 0$. 注意到
$$F''(t_0)=f''(t\boldsymbol{X}_1+(1-t)\boldsymbol{X}_2)(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)^2=\langle\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2,H(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)\rangle,$$
而根据题设可推知上式取正值, 矛盾.

(4) 由偏导方程组
$$f'_y=2Ax+2By+2D=0,\quad f'_y=2Bx+2Cy+2E=0$$
可求出(唯一)临界点:
$$x_0=(BE-CD)/(AC-B^2),\quad y_0=(BD-AE)/(AC-B^2).$$
注意到 $f''_{xx}=2A>0$, $f''_{xy}=2B$, $f''_{yy}=2C$, 可知
$$\Delta=f''_{xx}\cdot f''_{yy}-(f''_{xy})^2=4(AC-B^2)>0.$$
从而知点 (x_0,y_0) 为 f 的极小值点, 其极小值为
$$\begin{aligned}f(x_0,y_0)&=x_0(Ax_0+By_0+D)+y_0(Cy_0+Bx_0+E)+Dx_0+Ey_0+F\\&=Dx_0+Ey_0+F.\end{aligned}$$

另一方面, 我们又有
$$\begin{aligned}\frac{1}{AC-B^2}\begin{vmatrix}A&B&D\\B&C&E\\D&E&F\end{vmatrix}&=\frac{1}{AC-B^2}\left(D\begin{vmatrix}B&C\\D&E\end{vmatrix}-E\begin{vmatrix}A&B\\D&E\end{vmatrix}+F\begin{vmatrix}A&B\\B&C\end{vmatrix}\right)\\&=D\frac{BE-DC}{AC-B^2}-E\frac{AE-BD}{AC-B^2}+F\frac{AC-B^2}{AC-B^2}=Dx_0+Ey_0+F.\end{aligned}$$
由此即得所证.

例 4.1.10　试证明下列命题：

(1) 设 $D=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1\}$，且令

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey.$$

若 $f(x,y)\leqslant 0\ ((x,y)\in\partial D)$，则 $f(x,y)\leqslant 0\ ((x,y)\in D)$.

(2) 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上连续，且在 $x^2+y^2<1$ 上有

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=f(x,y). \qquad ①$$

若 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2=1$ 上取正值，则

(i) $f(x,y)\geqslant 0\quad (x^2+y^2\leqslant 1)$.　　(ii) $f(x,y)>0\quad (x^2+y^2\leqslant 1)$.

(3) 设 $\boldsymbol{X}=(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，$f(x,y)$ 在邻域 $U(\boldsymbol{X}_0,\delta)$ 上有连续二阶偏导数. 若 f 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处达到极大值，则对任意的 $g=g(x,y)$，$h=h(x,y)$，必有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+g\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+h\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\leqslant 0\quad ((x,y)=(x_0,y_0)).$$

(4) 设 $D=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$，$f(x,y)$ 在 D 上可连续偏导. 若 $|f(x,y)|\leqslant 1\ ((x,y)\in\overline{D})$，则存在 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)\in D$，使得 $[f_x'(x_0,y_0)]^2+[f_y'(x_0,y_0)]^2\leqslant 16$.

证明　(1) 易知 $f(x,y)$ 在闭区域 $\overline{D}$ 上可取到最大值.

(i) 若最大值点位于 ∂D，则命题显然成立.

(ii) 若最大值点在 D 内，则此点必为临界点，记为 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)$. 我们有

$$\begin{cases} f_x'(x_0,y_0)=2ax_0+2by_0+d=0, \\ f_y'(x_0,y_0)=2bx_0+2cy_0+e=0. \end{cases}$$

由此又知

$$\begin{cases} 2ax_0^2+2bx_0y_0+dx_0+ey_0=ey_0, \\ 2cy_0^2+2bx_0y_0+dx_0+ey_0=dx_0. \end{cases}$$

将上两式相加，即可得出 $f(x_0,y_0)=(dx_0+ey_0)/2$. 从而只需指出 $d\leqslant 0$，$e\leqslant 0$. 根据题设可知，$f(x,0)=ax^2+dx\leqslant 0\ (0<x<1)$. 从而有 $d\leqslant -ax$. 令 $x\to 0^+$ 又得 $d\leqslant 0$. 类似地可推知 $e\leqslant 0$. 证毕.

(2) (i) 反证法. 假定 $f(\boldsymbol{X}_0)=f(x_0,y_0)<0$，则不妨又假定点 $\boldsymbol{X}_0$ 是 f 的最小值点(注意，$x_0^2+y_0^2<1$)，从而有 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$.

此外，由式①可知，必有

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0\quad\left(\text{或}\quad \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}<0\right).$$

记 $g(x)=f(x,y_0)$，则点 $x=x_0$ 为 $g(x)$ 的临界点. 而根据 $g''(x_0)<0$ 可知，点 $x=x_0$ 是 $g(x)$ 的极大值点. 注意到在 $x^2+y^2=1-\delta$ (存在 $0<\delta<1$) 上，必有 $\boldsymbol{X}_1=(x_1,y_1)$，使得 $f(\boldsymbol{X}_1)>0$. 因此，在 $\overline{\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{X}_1}$ 上有点 $\boldsymbol{X}_2=(x_2,y_2)$，使得 $f(x_2,y_2)=0$.

(ii) 考察函数 $F(x,y)=f(x,y)-\varepsilon(e^x+e^y)$. 因为有

$$F'_x=f'_x-\varepsilon e^x,\quad F''_{xx}=f''_{xx}-\varepsilon e^x,\quad F''_{yy}=f''_{yy}-\varepsilon e^y,$$

所以得到 $F''_{xx}+F''_{yy}=f''_{xx}+f''_{yy}-\varepsilon(e^x+e^y)=f-\varepsilon(e^x+e^y)=F$.

取 ε 充分小, 使得在圆周上 $F(x,y)>0$, 则依(i)知, $F(x,y)\geqslant 0\ (x^2+y^2\leqslant 1)$, 即

$$f(x,y)\geqslant\varepsilon(e^x+e^y)>0\quad(x^2+y^2\leqslant 1).$$

(3) 依题设知, $f(x_0,y)$在点 $y=y_0$ 处取到极大值, 故$\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\leqslant 0$. 同理可推$\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\leqslant 0$. 此外, 还有 $f'_x(x_0,y_0)=0=f'_y(x_0,y_0)$, 即得所证.

(4) 作 $F(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$, 则有

$$F(x,y)\geqslant 1\quad(x^2+y^2=1);\quad F(0,0)\leqslant 1.$$

从而可知除非 $F(x,y)\equiv 1$, 否则在 D 内可取到极小值. 即有$(x_0,y_0)\in D$, 使得

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}=0.$$

这说明 $f'_x(x_0,y_0)=-4x_0$, $f'_y(x_0,y_0)=-4y_0$, 即得所证.

* **例 4.1.11** 解答下列问题:

(1) 试求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 在条件 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=k$ 下的极值.

(2) 设 $D=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)\}$, 试求

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1+x_2/x_1+x_3/x_2+\cdots+x_n/x_{n-1}+2/x_n$$

在 D 上的极值.

(3) 设 $D=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)\}$, 试求

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2^2\cdots x_n^n(1-x_1-2x_2-\cdots-nx_n)$$

的极值.

(4) 试求半径为 a 之圆的内接 n 边形的最大面积.

(5) 试确定$[a,b]$内插入的 n 个点: $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 使得函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n/(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_n+b)$$

达到最大值.

解 (1) 用 $x_n=(k-a_1x_1-\cdots-a_{n-1}x_{n-1})/a_n$ 代入 f, 且令

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2+\left(\frac{k-a_1x_1-\cdots-a_{n-1}x_{n-1}}{a_n}\right)^2.$$

则从偏导方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=2x_i+2\left(\frac{k-a_1x_1-\cdots-a_{n-1}x_{n-1}}{a_n}\right)\frac{-a_i}{a_n}=0\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$$

可解出

$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\cdots=\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{k-a_1x_1-\cdots-a_{n-1}x_{n-1}}{a_n^2}=\frac{k}{a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2+a_n^2}.$$

注意到 $k-a_1x_1-\cdots-a_{n-1}x_{n-1}=a_nx_n$, 故得

$$\frac{x_1}{a_1}=\cdots=\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{x_n}{a_n}=\frac{k}{a_1^2+\cdots+a_n^2}. \qquad ①$$

为确定其是否是极值，再看二阶偏导数，且不难导出矩阵关系：

$$\begin{pmatrix} F''_{x_1x_1} & \cdots & F''_{x_1x_{n-1}} \\ \cdots & & \cdots \\ F''_{x_{n-1}x_1} & \cdots & F''_{x_{n-1}x_{n-1}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\left(1-\frac{a_1^2}{a_n^2}\right) & \frac{2a_1a_2}{a_n^2} & \cdots & \frac{2a_1a_{n-1}}{a_n^2} \\ \frac{2a_2a_1}{a_n^2} & 2\left(1+\frac{a_2^2}{a_n^2}\right) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{2a_{n-1}a_1}{a_n^2} & \cdots & \cdots & 2\left(1+\frac{a_{n-1}^2}{a_n^2}\right) \end{pmatrix}$$

由此可知 $\Delta_1>0$，$\Delta_2=2^2(1+(a_1^2+a_2^2)/a_n^2)>0$，以及

$$\Delta_3=2^3[1+(a_1^2+a_2^2+a_3^2)/a_n^2]>0,\cdots,$$

$$\Delta_{n-1}=2^{n-1}\begin{vmatrix} a_1^2/a_n^2+1 & a_1a_2/a_n^2+0 & \cdots & a_1a_{n-1}/a_n^2+0 \\ a_2a_1/a_n^2+0 & a_2^2/a_n^2+1 & \cdots & a_2a_{n-1}/a_n^2+0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n-1}a_1/a_n^2+0 & a_{n-1}a_2/a_n^2+0 & \cdots & a_{n-1}^2/a_n^2+1 \end{vmatrix}$$

$$=2^{n-1}[1+(a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2)/a_n^2]>0.$$

从而对式①中的值，F 在其上达到极小值 $k^2/(a_1^2+\cdots+a_n^2)$.

(2) 建立一阶偏导方程组

$$\begin{cases} f'_{x_1}=1-x_2/x_1^2=0, \\ f'_{x_k}=1/x_{k-1}-x_{k+1}/x_k^2=0 \quad (k=2,3,\cdots,n-1), \\ f'_{x_n}=1/x_{n-1}-2/x_n^2=0 \end{cases}$$

并解得临界点：$x_2=x_1^2$，$x_3=x_1^3$，$\cdots$，$x_n=x_1^n$，$x_1=2^{1/(n+1)}$.

为验证充分性，再求二阶偏导数(记 $a_{ij}=f''_{x_ix_j}$)：

$$a_{11}=2/x_1,\quad a_{12}=-1/x_1^2,\quad a_{1j}=0\quad (j=3,4,\cdots,n);$$
$$a_{k\,k-1}=-1/x_1^{2k-2},\quad a_{kk}=2/x_1^{2k-1},\quad a_{k\,k+1}=-1/x_1^{2k},$$
$$a_{kj}=0(j=1,2,\cdots,k-2,k+2,k+3,\cdots n;k=2,3,\cdots,n-1);$$
$$a_{n\,n-1}=-1/x_1^{2n-2},\quad a_{nn}=4/x_1^{3n}=2/x_1^{2n-1},\quad a_{nj}=0\quad (j=1,2,\cdots,n-2).$$

为考察二次型 $\mathrm{d}^2f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$，看其系数行列式

$$A_m=\begin{vmatrix} 2/x_1 & -1/x_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1/x_1^2 & 2/x_1^3 & -1/x_1^4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1/x_1^4 & 2/x_1^5 & -1/x_1^6 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1/x_1^{2m-2} & 2/x_1^{2m-1} \end{vmatrix},$$

再将其变换为

$$A_m=\begin{vmatrix} 2/x_1 & -1/x_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3/2x_1^3 & -1/x_1^4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4/3x_1^5 & -1/x_1^6 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (m+1)/mx_1^{2m-1} \end{vmatrix}.$$

不难得知 $A_m>0(m=1,2,\cdots,n)$.这说明 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}\,\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$ 是正定的,从而 f 有最小值 $(n+1)2^{1/(n+1)}$.

(3) 建立偏导方程组(记 $B=1-x_1-2x_2-\cdots-nx_n$)

$$\begin{cases} f'_{x_1}=x_2^2x_3^3\cdots x_n^n(B-x_1)=0, \\ f'_{x_2}=2x_1x_2x_3^3\cdots x_n^n(B-x_2)=0, \\ f'_{x_3}=3x_1x_2^2x_3^2\cdots x_n^n(B-x_3)=0, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f'_{x_n}=nx_1x_2^2x_3^3\cdots x_{n-1}^{n-1}x_n^{n-1}(B-x_n)=0, \end{cases}$$

且由题设知,其临界点应满足方程组

$$B-x_j=0\quad(j=1,2,\cdots,n).\tag{②}$$

在方程组②中,以第一个方程减第二个方程,又以第二个方程减第三个方程,…,最后可得方程组 $-x_j+x_{j+1}=0(j=1,2,\cdots,n-1)$.

由此可知 $x_1=x_2=\cdots=x_n$,再将②中第一个方程写为

$$1-x_1(1+2+\cdots+n)-x_1=0,$$

立即求得临界点为 $x_1=x_2=\cdots=x_n=2/(n^2+n+2)$.

现在求二阶偏导数,我们有 $f''_{x_1x_1}=-2x_2^2x_3^3\cdots x_n^n$,以及

$$\begin{aligned} f''_{x_kx_k}=&\ k(k-1)x_1x_2^2\cdots x_k^{k-2}\cdots x_n^n(B-x_k) \\ &-k(k+1)x_1x_2^2\cdots x_k^{k-1}\cdots x_n^n\qquad(k=2,3,\cdots,n); \\ f''_{x_kx_m}=&\ kmx_1x_2^2\cdots x_k^{k-1}\cdots x_m^{m-1}\cdots x_n^n(B-x_k) \\ &-kmx_1x_2^2\cdots x_k^{k-1}\cdots x_n^n\qquad(k,m=1,2,\cdots,n;k\neq n). \end{aligned}$$

用 $\bar{x}$ 记 $x_1=x_2=\cdots=x_n=2/(n^2+n+2)$,并用 a_{ij} 表示 $f''_{x_ix_j}$ 在临界点处的值,我们有($(B-x_k)=0,k=1,2,\cdots,n$)

$$a_{11}=-2\bar{x}^{-(n^2+n-2)/2},\quad a_{kk}=-k(k+1)\bar{x}^{-(n^2+n-2)/2},$$

$$a_{km}=-km\bar{x}^{-(n^2+n-2)/2}.\tag{③}$$

为考察二次型 $\mathrm{d}^2f=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$,计算行列式

$$A_m=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix},$$

依据式③,再从行列式第 k 行提出因子$(-1)kx^{-(n^2+n-2)/2}$,可得

$$A_m=(-1)^m m!x^{-\frac{n^2+n-2}{2}m}\begin{vmatrix}2 & 2 & 3 & 4 & \cdots & m\\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & m\\ 1 & 2 & 4 & 4 & \cdots & m\\ 1 & 2 & 3 & 5 & \cdots & m\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & m+1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^m m!x^{-\frac{n^2+n-2}{2}m}\left(1+\frac{m^2+m}{2}\right).$$

由此不难推出

$$A_1<0,\quad A_2>0,\quad A_3<0,\quad A_4>0,\quad \cdots,$$

即二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$ 是负定的.这说明 f 在此临界点处取到最大值,且其值为

$$[2/(n^2+n+2)]^{(n^2+n+2)/2}.$$

(4)令圆内接 n 边形各边所对的圆心角为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$,则此 n 边形之面积为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{a^2}{2}(\sin\theta_1+\cdots+\sin\theta_n)\\&=\frac{a^2}{2}[\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_{n-1}-\sin(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1})].\end{aligned}$$

作函数 $f(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1})=\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots-\sin(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1})$,其中 $0\leqslant\theta_i\leqslant2\pi(i=1,2,\cdots,n-1)$,$0\leqslant\theta_1+\cdots+\theta_{n-1}\leqslant2\pi$,并建立偏导方程组

$$\begin{cases}f'_{\theta_1}=\cos\theta_1-\cos(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1})=0,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f'_{\theta_{n-1}}=\cos\theta_{n-1}-\cos(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1})=0,\end{cases}$$

从中可解出 $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_{n-1}=\theta_n=2\pi/n$.记 $\boldsymbol{X}_0=(2\pi/n,\cdots,2\pi/n)$.

现在,求二阶偏导数,我们有

$$\begin{cases}f''_{\theta_1\theta_1}=-\sin\theta_1+\sin(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1}),\\ f''_{\theta_1\theta_2}=f''_{\theta_1\theta_3}=\cdots=f''_{\theta_1\theta_{n-1}}=\sin(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1}).\end{cases}$$

因此,$\Delta=f''_{\theta_1\theta_1}|_{X_0}=-\sin(2\pi/n)+\sin[(n-1)2\pi/n]=-2\sin(2\pi/n)<0$.

(记 $\sin(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1})|_{X_0}=\sin[(n-1)2\pi/n]=-\sin(2\pi/n)=A$)

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}f''_{\theta_1\theta_1} & f''_{\theta_1\theta_2}\\ f''_{\theta_2\theta_1} & f''_{\theta_2\theta_2}\end{vmatrix}_{X_0}=\begin{vmatrix}-\sin\dfrac{2\pi}{n}+A & A\\ A & -\sin\dfrac{2\pi}{n}+A\end{vmatrix}=3\sin^2\frac{2\pi}{n}>0.$$

对 $k>2$,我们有

$$\Delta_k=\begin{vmatrix}-\sin(2\pi/n)+A & A & \cdots & A\\ A & -\sin(2\pi/n)+A & \cdots & A\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ A & A & \cdots & -\sin(2\pi/n)+A\end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} 2A & A & \cdots & A \\ A & 2A & \cdots & A \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A & A & \cdots & 2A \end{vmatrix} = A^k \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}
$$

(将第 2,3,…,k 列加到第 1 列上,提出($k+1$);以“-1”乘第一行,加到其它行上)

$$
=(k+1)A^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix} = (k+1)A^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
=(k+1)A^k = (-1)^k(k+1)\sin^k(2\pi/n) \quad (k=1,2,\cdots).
$$

由此可得 $\Delta_1<0$,$\Delta_2>0$,$\Delta_3<0$,$\Delta_4>0$,….这说明 $f(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-1})$在 $\boldsymbol{X}_0$ 处取到极大值,即在正 n 边形时其面积最大,其值为 $a^2 n\sin(2\pi/n)/2$.

注 对于一个圆的外切 n 边形面积之最小者的求法,可用作一个与其相对应的内接 n 边形来解决.因为后者面积之最大者就是前者之最小者.由此即得圆外切 n 边形面积之最小值为 $a^2 n\tan(\pi/n)$.

(5) 令 $g=\ln f$,我们有

$$
\begin{aligned}
g(x_1,x_2,\cdots,x_n) =\ & \ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n \\
& -\ln(a+x_1)-\ln(x_1+x_2)-\cdots-\ln(x_{n-1}+x_n)-\ln(x_n+b).
\end{aligned}
$$

显然,f 与 g 的极值点是相同的,故转而考察 g.立出偏导方程组

$$
\begin{cases}
g'_{x_1}=\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{a+x_1}-\dfrac{1}{x_1+x_2}=0, \\
g'_{x_2}=\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1+x_2}-\dfrac{1}{x_2+x_3}=0, \\
\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\
g'_{x_n}=\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n-1}+x_n}-\dfrac{1}{x_n+b}=0.
\end{cases}
$$

从第一个方程可解出 $x_2=x_1^2/a$,第二个方程可解出 $x_3=x_2^2/x_1=x_1^3/a^2$,…,又从最后一个方程可解出 $b=x_n^2/x_{n-1}=x_1^{n+1}/a^n$.由此又算得 $x_1=a(b/a)^{1/(n+1)}$.这就是说,临界点(记为 $\boldsymbol{X}_0$)可用几何级数列写出:

$$
x_1=aq, \quad x_2=aq^2,\cdots, \quad x_n=aq^n \quad (q=(b/a)^{1/(n+1)}).
$$

再求二阶偏导数,我们有

$$
g''_{x_1x_1}=-\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{(a+x_1)^2}+\frac{1}{(x_1+x_2)^2},
$$

$$
g''_{x_1x_2}=\frac{1}{(x_1+x_2)^2}, \quad g''_{x_1x_j}=0 \quad (j=3,4,\cdots,n),
$$

$$
g''_{x_kx_{k-1}}=\frac{1}{(x_{k-1}+x_k)^2}, \quad g''_{x_kx_k}=-\frac{1}{x_k^2}+\frac{1}{(x_{k-1}+x_k)^2}+\frac{1}{(x_k+x_{k+1})^2},
$$

$$
g''_{x_kx_{k+1}}=\frac{1}{(x_k+x_{k+1})^2}, \quad g''_{x_kx_j}=0(j=1,2,k-1,k+2,\cdots,n;k=2,3,\cdots,n-1),
$$

$$g''_{x_n x_{n-1}}=\frac{1}{(x_{n-1}+x_n)^2},\quad g''_{x_n x_n}=-\frac{1}{x_n^2}+\frac{1}{(x_{n-1}+x_n)^2}+\frac{1}{(x_n+b)^2},$$
$$g''_{x_n x_j}=0\quad (j=1,2,\cdots,n-2).$$

从而可知它们在临界点处的值为($a_{ij}=g''_{x_i x_j}$)

$$a_{11}=\frac{-2}{a^2q(1+q)^2},\quad a_{12}=\frac{1}{a^2q^2(1+q)^2},\quad a_{1j}=0(j=3,\cdots,n);$$
$$a_{k\,k-1}=\frac{1}{a^2q^{2k-2}(1+q)^2},\quad a_{kk}=\frac{-2}{a^2q^{2k-1}(1+q)^2},\quad a_{k\,k+1}=\frac{1}{a^2q^{2k}(1+q)^2};$$
$$a_{kj}=0(j=1,2,\cdots,k-1,k+2,\cdots,n;k=2,3,\cdots,n-1);$$
$$a_{n\,n-1}=\frac{1}{a^2q^{2n-2}(1+q)^2},\quad a_{nn}=\frac{-2}{a^2q^{2n-1}(1+q)^2};\quad a_{nj}=0(j=1,2,\cdots,n-2).$$

现在来考察二次型 $\mathrm{d}^2g(\boldsymbol{X}_0)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$. 注意到上述之各 a_{ij} 中均含有因子 $1/a^2(1+q^2)$,故可得(上例记法)

$$A_m=\frac{1}{[a(1+q)]^{2m}}\begin{vmatrix}\frac{-2}{q} & \frac{1}{q^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \frac{1}{q^3} & \frac{-2}{q^3} & \frac{1}{q^4} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{q^4} & \frac{-2}{q^5} & \frac{1}{q^6} & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{q^{2m-2}} & \frac{-2}{q^{2m-1}}\end{vmatrix}.$$

将其变为三角阵

$$A_m=\frac{1}{[a(1+q)]^{2m}}\begin{vmatrix}\frac{-2}{q} & \frac{1}{q^2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{-3}{2q^3} & \frac{1}{q^4} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -\frac{4}{3q^5} & \frac{1}{q^6} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{m+1}{mq^{2m-1}}\end{vmatrix},$$

由此可得 $A_m=(-1)^m(m+1)/[a(1+q)]^{2m}q^{m^2}$,且不难推知 $A_1<0,A_2>0,A_3<0,\cdots$.这说明上述二次型是负定的,也就是说函数 g,随之 f 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处达到最大值.

4.2　条件极值问题

定理 4.2.1　设函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在约束条件

$$\begin{cases}\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\ \varphi_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\\ \cdots\cdots\\ \varphi_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0\end{cases}\quad (m<n)$$

下有极值点 $\boldsymbol{X}_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$，函数 f 与约束函数 $\varphi_i(i=1,2,\cdots,m)$在 $\boldsymbol{X}_0$ 邻域内属于 $C^{(1)}$ 类，且 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{X}_0}$$

的秩为 m，则存在常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使点 $\boldsymbol{X}_0$ 满足条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X}_0)}{\partial x_i}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1(\boldsymbol{X}_0)}{\partial x_i}+\cdots+\lambda_m\dfrac{\partial\varphi_m(\boldsymbol{X}_0)}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n), \\ \varphi_j(\boldsymbol{X}_0)=0 \quad (j=1,2,\cdots,m). \end{cases} \qquad ①$$

为了便于记忆，我们引进 $n+m$ 个变量的函数(Lagrange 乘子法)

$$F=f+\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2+\cdots+\lambda_m\varphi_m,$$

则条件极值的必要条件①，形式上化为函数 F 一般极值的必要条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(\boldsymbol{X}_0)}{\partial x_i}=0 \quad (i=1,2,\cdots,n), \\ \dfrac{\partial F(\boldsymbol{X}_0)}{\partial \lambda_j}=0 \quad (j=1,2,\cdots,m). \end{cases}$$

在一般极值充分条件讨论中，若 $\boldsymbol{X}_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$是 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的非退化临界点，根据 Hesse 矩阵 $H_f(\boldsymbol{X}_0)$是正定、负定和不定，可得出 $\boldsymbol{X}_0$ 是函数的极小点、极大点和鞍点．求函数的 Hesse 矩阵可以通过求函数在 $\boldsymbol{X}_0$ 点的二阶微分得到：

$$\mathrm{d}^2 f(\boldsymbol{X}_0)=\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_ix_j}(\boldsymbol{X}_0)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j=(\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n)H_f(\boldsymbol{X}_0)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \cdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix}.$$

求条件极值的充分条件，归结为求通常极值的充分条件．设在定理 4.2.1 的约束方程中能把变量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 解成 $x_{m+1},\cdots,x_n$ 的函数，把它们代入目标函数 f，求 f 的二阶微分，得

$$\mathrm{d}^2 f=\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_ix_j}(\boldsymbol{X}_0)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j+f'_{x_1}(\boldsymbol{X}_0)\mathrm{d}^2x_1+\cdots+f'_{x_m}(\boldsymbol{X}_0)\mathrm{d}^2x_m.$$

然后通过约束条件，求出二阶微分 $\mathrm{d}^2x_1,\cdots,\mathrm{d}^2x_m$，代入上式得关于自由变量 $x_{m+1},\cdots,x_n$ 的二阶微分，根据这个二阶微分是正定、负定、不定，得出 $\boldsymbol{X}_0$ 是极小点、极大点和非极值点．这样做需要求二阶微分 $\mathrm{d}^2x_1,\cdots,\mathrm{d}^2x_m$．下面介绍不必求二阶微分的方法．

注意到 $F=f+\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_m\varphi_m$ 中用隐函数 $x_1,\cdots,x_m$ 代入时，相当于 f 用隐函数代入，以及 $\boldsymbol{X}_0$ 是 F 的临界点，即得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 f=\mathrm{d}^2F&=\sum_{i,j=1}^{n} F''_{x_ix_j}(\boldsymbol{X}_0)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j+F'_{x_1}(\boldsymbol{X}_0)\mathrm{d}^2x_1+\cdots+F'_{x_m}(\boldsymbol{X}_0)\mathrm{d}^2x_m\\ &=\sum_{i,j=1}^{n} F''_{x_ix_j}(\boldsymbol{X}_0)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j.\end{aligned}$$

这样，只要求出一阶微分 $\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_m$ 代入上式，就得到 f 关于自由变量 $x_{m+1},\cdots,x_n$ 的二

阶微分. 根据该二阶微分是正定、负定和不定, 即可得 $\boldsymbol{X}_0$ 是条件极值的极小点、极大点和鞍点.

注　若 $f(x,y)$ 是齐次函数, 则其极值点必为最值点.

例 4.2.1　解答下列问题:

(1) 试求 $f(x,y,z)=x^m y^n z^k\ (m>0,n>0,k>0)$ 在条件 $x+y+z=a$ 下的极值, 其中 $x>0,y>0,z>0,a>0$.

(2) 试求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1\ (a>0,b>0,c>0)$ 下的极值.

(3) 试求 $f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$ 在约束 $x^2+y^2+z^2=1$ 下的最大值.

解　(1) 易知 $f(x,y,z)$ 与 $g(x,y,z)=\ln f(x,y,z)$ 的极值点相同, 故只需考察在条件 $x+y+z=a$ 下函数 $g(x,y,z)=m\ln x+n\ln y+k\ln z$ 的极值.

采用 Lagrange 乘子法, 作辅助函数

$$F(x,y,z)=m\ln x+n\ln y+k\ln z+\lambda(x+y+z-a),$$

并求解偏导方程组

$$\begin{cases} F'_x=m/x+\lambda=0, \\ F'_y=n/y+\lambda=0, \quad x+y+z=a, \\ F'_z=k/z+\lambda=0; \end{cases}$$

则可得可能的极值点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 为

$$x_0=mt_0,\ y_0=nt_0,\ z_0=kt_0\quad (t_0=a/(m+n+k)).$$

再看二阶微分 $\mathrm{d}^2F=-\dfrac{m}{x^2}\mathrm{d}x^2-\dfrac{n}{y^2}\mathrm{d}y^2-\dfrac{k}{z^2}\mathrm{d}z^2$ 在 $\boldsymbol{X}_0$ 点处的值, 即得

$$\mathrm{d}^2F(\boldsymbol{X}_0)=-\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{mt_0^2}+\frac{\mathrm{d}y^2}{nt_0^2}+\frac{dz^2}{kt_0^2}\right)<0.$$

由此知, g 随之 f 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处达到最大值: $m^m n^n k^k a^{m+n+k}/(m+n+k)^{m+n+k}$.

(2) 作辅助函数

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2-1).$$

又立方程组

$$\begin{cases} F'_x=2x-2\lambda x/a^2=0, \\ F'_y=2y-2\lambda y/b^2=0, \quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \\ F'_z=2z-2\lambda z/c^2=0, \end{cases}$$

易知有解

$$\lambda_1=-c^2,\boldsymbol{X}_1=(0,0,c);\quad \lambda_2=-c^2,\boldsymbol{X}_2=(0,0,-c);$$
$$\lambda_3=-a^2,\boldsymbol{X}_3=(a,0,0);\quad \lambda_4=-a^2,\boldsymbol{X}_4=(-a,0,0);$$
$$\lambda_5=-b^2,\boldsymbol{X}_5=(0,b,0);\quad \lambda_6=-b^2,\boldsymbol{X}_6=(0,-b,0).$$

因为 $\mathrm{d}^2F=2(1+\lambda/a^2)\mathrm{d}x^2+2(1+\lambda/b^2)\mathrm{d}y^2+2(1+\lambda/c^2)\mathrm{d}z^2$, 所以有

$$d^2F(\boldsymbol{X}_i,\lambda_i)=2(1-c^2/a^2)dx^2+2(1-c^2/b^2)dy^2>0\quad(i=1,2);$$
$$d^2F(\boldsymbol{X}_i,\lambda_i)=2(1-a^2/b^2)dy^2+2(1-a^2/c^2)dz^2<0\quad(i=3,4),$$
函数 f 在点 $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2$ 处取极小值 c^2;在 $\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4$ 处取极大值 a^2;在点 $\boldsymbol{X}_5,\boldsymbol{X}_6$ 处,由于
$$d^2F(\boldsymbol{X}_i,\lambda_i)=2(1-b^2/c^2)dz^2<0\quad(dx=0,dz\neq0;i=5,6);$$
$$d^2F(\boldsymbol{X}_i,\lambda_i)=2(1-b^2/a^2)dx^2>0\quad(dx\neq0,dz=0;i=5,6),$$
故点 $\boldsymbol{X}_5,\boldsymbol{X}_6$ 不是 f 的极值点.

(3) 根据题设,可令 $x=\sin\varphi\cos\theta$, $y=\sin\varphi\sin\theta$, $z=\cos\varphi$,作辅助函数 $G(x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$,并解方程组

$$\begin{cases}G'_x=f'_x-2x\lambda=2(Ax+Fy+Ez-\lambda x)=0,\\ G'_y=f'_y-2y\lambda=2(Fx+By+Dz-\lambda y)=0,\quad x^2+y^2+z^2-1=0,\\ G'_z=f'_z-2z\lambda=2(Ex+Dy+Cz-\lambda z)=0,\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}(A-\lambda)x+Fy+Ez=0,\\ Fx+(B-\lambda)y+Dz=0,\quad x^2+y^2+z^2-1=0.\\ Ex+Dy+(C-\lambda)z=0,\end{cases}\qquad ①$$

注意到命题的最大值必存在,故定有非零解(x_0,y_0,z_0).因此,我们知道该方程组的行列式必为0.即

$$\begin{vmatrix}A-\lambda & F & E\\ F & B-\lambda & D\\ E & D & C-\lambda\end{vmatrix}=0\quad \text{或}\quad \lambda\text{是}\begin{pmatrix}A & F & E\\ F & B & D\\ E & D & C\end{pmatrix}\text{的特征值}.$$

用 x_0,y_0,z_0 代入式①,并依次以 x_0,y_0,z_0 乘各式,再相加可得
$$Ax_0^2+By_0^2+Cz_0^2+2Dy_0z_0+2Ez_0x_0+2Fx_0y_0-\lambda(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=0.$$
由 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$ 可知 $\lambda=f(x_0,y_0,z_0)$,这是 $f(x,y,z)$在单位球面上的最大值.

例 4.2.2 解答下列问题:

(1) 试求 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z=0$ 下的极值.

(2) 试求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件
$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2,\quad lx+my+nz=0$$
下的极值.

(3) 试求 $f(x,y,z)=x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2$ 在条件
$$x^2+y^2+z^2=1,\quad x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$$
下的极值,其中 $a>b>c>0$, $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

(4) 试求 $f(x,y,z)=x^2/a^4+y^2/b^4+z^2/c^4$ 在条件
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad lx+my+nz=0$$

下的极值.

解　(1) 作辅助函数

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x+y+z),$$

并解方程组

$$\begin{cases} F'_x=yz+2\lambda x+\mu=0, \\ F'_y=xz+2\lambda y+\mu=0, \\ F'_z=xy+2\lambda z+\mu=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0, \end{cases}$$

得到可能的极值点六个:

$$\lambda=\frac{1}{2\sqrt{6}}: \boldsymbol{X}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right), \boldsymbol{X}_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\boldsymbol{X}_3=\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \lambda=\frac{-1}{2\sqrt{6}}: \boldsymbol{X}_4=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\boldsymbol{X}_5=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right), \boldsymbol{X}_6=\left(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}}\right).$$

再看二阶微分(注意条件)

$$\mathrm{d}^2F=2\lambda(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)+2(z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z),$$

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=0, \quad \mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0.$$

从而知:对 $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_4$, 有 $x=y=2\lambda$, $z=-4\lambda$, 故知

$$\mathrm{d}^2F=2\lambda[(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)^2+\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2].$$

因此,在 $\lambda<0$(即在点 $\boldsymbol{X}_4$ 处)时,有 $\mathrm{d}^2F<0$,函数 f 在 $\boldsymbol{X}_4$ 处达到极大值 $1/3\sqrt{6}$;在 $\lambda>0$(即在 $\boldsymbol{X}_1$ 处)时,有 $\mathrm{d}^2F>0$,函数 f 在 $\boldsymbol{X}_1$ 处达到极小值 $-1/3\sqrt{6}$.

类似地可推知,在点 $\boldsymbol{X}_5$, $\boldsymbol{X}_6$ 处,函数 f 达到极大值 $1/3\sqrt{6}$;在点 $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$ 处, f 达到极小值 $-1/3\sqrt{6}$.

(2) 作辅助函数

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\{(x^2+y^2+z^2)^2-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\} + \mu(lx+my+nz),$$

并建立方程组

$$\begin{cases} F'_x=2x+4\lambda x(x^2+y^2+z^2)-2a^2\lambda x+\mu l=0, & ① \\ F'_y=2y+4\lambda y(x^2+y^2+z^2)-2b^2\lambda y+\mu m=0, & ② \\ F'_z=2z+4\lambda z(x^2+y^2+z^2)-2c^2\lambda z+\mu n=0, & ③ \end{cases}$$

以 x 乘式①, y 乘式②, z 乘式③,再相加可得($r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$)

$$2r^2+4\lambda r^4-2\lambda(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)+\mu(lx+my+nz)=0.$$

以题设条件代入上式,可知

$$2r^2+2\lambda r^4=0, \quad \lambda=-1/r^2 \quad (r\neq 0).$$

将此式又代入式①,②,③,即解出

$$x=\frac{-\mu l r^2}{2(a^2-r^2)},\quad y=\frac{-\mu m r^2}{2(b^2-r^2)},\quad z=\frac{\mu n r^2}{2(c^2-r^2)}.$$

现在,将上述等式代入 $lx+mx+ny=0$,我们有

$$\frac{l^2}{a^2-r^2}+\frac{m^2}{b^2-r^2}+\frac{n^2}{c^2-r^2}=0.$$

由此解出关于 r^2 的两个根,就可得到极大、极小值.

(3) 令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)+\mu(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$,并立出偏导方程组

$$\begin{cases} F'_x=\dfrac{2x}{a^2}-2\lambda x+\mu\cos\alpha=0, \\ F'_y=\dfrac{2y}{b^2}-2\lambda y+\mu\cos\beta=0, \\ F'_z=\dfrac{2z}{c^2}-2\lambda z+\mu\cos\gamma=0. \end{cases} \tag{④}$$

从 x 乘上述第一个方程,y 乘第二个方程,z 乘第三个方程,再相加,可得等式

$$2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-2\lambda(x^2+y^2+z^2)+\mu(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)=0.$$

注意到约束条件,又得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda=0,\quad \lambda=\mu.$$

由此即知,函数 f 的最大值就是 λ 的最大值,f 的最小值就是 λ 的最小值.

在式(4)中解 x,y,z,再在所得等式两端各乘以 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,不难推出(注意 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$)

$$\cos^2\alpha\Big/\left(\frac{1}{a^2}-\lambda\right)+\cos^2\beta\Big/\left(\frac{1}{b^2}-\lambda\right)+\cos^2\gamma\Big/\left(\frac{1}{c^2}-\lambda\right)=0,$$

$$\lambda^2-\lambda\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\beta}{b^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right)+\frac{\cos^2\alpha}{c^2b^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}=0.$$

若记 λ_1,λ_2 是上述方程之解,且 $\lambda_1<\lambda_2$,那么 f 之最大值为 λ_2,最小值为 λ_1.

(4) 令 $F(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\mu(lx+my+nz)$,并解偏导方程组

$$\begin{cases} F'_x=2x/a^4+2\lambda x/a^2+\mu l=0, & ⑤\\ F'_y=2y/b^4+2\lambda y/b^2+\mu m=0, & ⑥\\ F'_z=2z/c^4+2\lambda z/c^2+\mu n=0, & ⑦\end{cases}$$

以 x 乘式⑤, y 乘⑥, z 乘式⑦,再相加,可得

$$2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)+2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+\mu(lx+my+nz)=0.$$

由此即知 $2f(x,y,z)+2\lambda=0$,即在极值点上 $f(x,y,z)=-\lambda$.

从式⑤,⑥,⑦中求出 x,y,z,代入 $lx+my+nz=0$,有

$$\frac{a^4l^2}{1+a^2\lambda}+\frac{b^4m^2}{1+b^2\lambda}+\frac{c^4n^2}{1+c^2\lambda}=0. \qquad ⑧$$

因为我们的目标是,在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 与平面 $lx+my+nz=0$ 的交线上求 $f(x,y,z)$ 的极值,所以极值必存在.从而解式⑧可得.

例 4.2.3　解答下列问题:

(1) 试求 $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ 在 $\overline{D}: x^2+y^2\leqslant 25$ 上的最值.

(2) 试求 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 在 $\overline{D}: x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 上的最值.

解　(1) 易知 $f(x,y)$ 必取到最大、最小值.由于方程组

$$f'_x=2x-12=0,\quad f'_y=2y+16=0$$

在 $D: x^2+y^2<25$ 上无解,故 $f(x,y)$ 的极值在 $\partial\overline{D}: x^2+y^2=25$ 上取.作辅助函数

$$F(x,y)=x^2+y^2-12x+16y+\lambda(25-x^2-y^2),$$

并从方程组

$$F'_x=2x-12-2\lambda x=0,\quad F'_y=2y+16-2\lambda y=0$$

解出两个可能的极值点: $\boldsymbol{X}_1=(3,-4)$, $\boldsymbol{X}_2=(-3,4)$.由 $f(3,-4)=-75$, $f(-3,4)=125$ 可知 $f(x,y)$ 的最大值是 125,最小值是 -75.

(2) 首先,求出 f 在 $x^2+y^2+z^2=k$ 上的极值,为此作辅助函数

$$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz-\lambda(x^2+y^2+z^2-k).$$

并求解偏导方程组 $(x^2+y^2+z^2=k)$

$$\begin{cases} F'_x=3x^2-3yz-2\lambda x=0, & ①\\ F'_y=3y^2-3xz-2\lambda y=0, & ②\\ F'_z=3z^2-3xy-2\lambda z=0, & ③\end{cases}$$

易知由此可导出 $3f(x,y,z)-2\lambda k=0$,即在极值点上 $f=2\lambda k/3$.

以 y 乘式① $-x$ 乘式②,得 $(x-y)(xy+yz+zx)=0$,

以 z 乘式② $-y$ 乘式③,得 $(y-z)(xy+yz+zx)=0$.

(i) 在 $x=y=z=\pm\sqrt{k/3}$ 时,有 $\lambda=0$,故 $f=0$.

(ii) 在 $x=y$,且 $yz+zx+xy=0$;或 $y=z$, $yz+zx+xy=0$ 时,有 $f=\pm k^{3/2}$.

(iii) 在 x,y,z 之值均不相同,且 $yz+zx+xy=0$ 时,由 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2=k$ 可知

$$f=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=\pm k^{3/2}.$$

由此即知，f 之最大值为 $k^{3/2}$，最小值为 $-k^{3/2}$．

其次，再考察 f 在条件 $0\leqslant k\leqslant 1$ 时的最值．由上述推理得知，此时 f 的最大值是 1，最小值是 -1．故对 $0<k\leqslant 1$，f 的最值在区域 $0<x^2+y^2\leqslant 1$ 的边界上达到．

例 4.2.4　解答下列问题(用一般极值求法解条件极值)：

(1) 试论 $z=f(x,y)$在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，其中 $f(x,y)$，$\varphi(x,y)$有连续二阶偏导数．

(2) 试求 $f(x,y,z)=(x+1)(y+1)(z+1)$在条件 $a^x b^y c^z=k$ 下的极值，其中 $a>0$，$b>0$，$c>0$．

解　(1) 由$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\varphi'_x/\varphi'_y$可知

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=-[\varphi''_{xx}(\varphi'_y)^2-2\varphi''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y+\varphi''_{yy}(\varphi'_x)^2]/(\varphi'_y)^3 .$$

现将极值点满足的条件 $z'_x=f'_x+f'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 写为

$$f'_x(x,y)\varphi'_y(x,y)-f'_y(x,y)\varphi'_x(x,y)=0,$$

并使它与 $\varphi(x,y)=0$ 联立解出点(x_0,y_0)．

为判定其极值情形，将上述结果代入式

$$z''_{xx}=f''_{xx}+2f''_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+f''_{yy}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+f'_y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},$$

可得

$$z''_{xx}=\frac{1}{(\varphi'_y)^3}\{f''_{xx}(\varphi'_y)^2-2f''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y+f''_{yy}(\varphi'_x)^2-\varphi''_{xx}f'_y\varphi'_y+2\varphi''_{xy}f'_y\varphi'_x-\varphi''_{yy}\varphi'_xf'_y\}$$

$$\triangleq D/(\varphi'_y)^3 .$$

从而知，当 $D|_{(x_0,y_0)}>0$ 时，z 取到极小值；当 $D|_{(x_0,y_0)}<0$ 时，z 取到极大值．

(2) 对条件方程取对数：$x\ln a+y\ln b+z\ln c=\ln k$，且记 $\ln a=A$，$\ln b=B$，$\ln c=C$，则命题化为：求 $f(x,y,z)$在条件 $Ax+By+Cz=K(K=\ln k)$下的极值．

采用代入法，化条件极值为一般极值，即从条件中解出 z 代入 f，则 f 写为

$$f(x,y)=(x+1)(y+1)\left(\frac{K-Ax-By}{C}+1\right).$$

求解偏导方程组

$$\begin{cases} f'_x=(y+1)(K+C-A-2Ax-By)/C=0, \\ f'_y=(x+1)(K+C-B-Ax-2By)/C=0, \end{cases}$$

可得解：

$$\boldsymbol{X}_1:\begin{cases} x_1=(K-2A+B+C)/3A, \\ y_1=(K+A-2B+C)/3B; \end{cases}\quad \boldsymbol{X}_2:\begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=-1; \end{cases}$$

$$\boldsymbol{X}_3:\begin{cases} x_3=-1,\\ y_3=(K+A+C)/B;\end{cases}\quad \boldsymbol{X}_4:\begin{cases} x_4=(K+B+C)/A,\\ y_4=-1.\end{cases}$$

再求二阶偏导，易知

$$f''_{xx}=-\frac{2A}{C}(y+1),f''_{yy}=-\frac{2B}{C}(x+1),f''_{xy}=\frac{K-A-B+C-2(Ax+By)}{C}.$$

从而我们有

(i) 在点 $\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4$ 处，由 $\Delta<0$ 可知，f 无极值.

(ii) 在点 $\boldsymbol{X}_1$ 处，由 $\Delta=(K+A+B+C)^2/3C^2>0$，以及

$$f''_{xx}=\frac{-2A(K+A+B+C)}{3BC}=\frac{-2\ln a\cdot\ln(abck)}{3\ln b\cdot\ln c},$$

再记 $S=\ln a\cdot\ln b\cdot\ln c\cdot\ln(abck)$，则当 $S<0$ 时 f 达到极小值，当 $S>0$ 时达到极大值，其值为 $\pm[\ln(abck)]^3/(\ln a)^3(\ln b)^3(\ln c)^3$.

例 4.2.5　解答下列问题：

(1) 设有边长为 a 的等边三角形 $\triangle ABC$，从其内部一点 P 向三个边引垂线，且分别交于点 D,E,F. 试求点 P 的位置，使得三角形 $\triangle DEF$ 的面积最大.

(2) 试求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的内接最大长方体的体积.

(3) 对边长为 a,b,c 的 $\triangle ABC$，试在其上作高为 h 的锥体，使其侧面积最小.

解　(1) 记从点 P 到各边的距离为 x,y,z，注意到 $\angle DPE=\angle DPF=\angle EPF=2\pi/3$，故知 $\triangle DEF$ 之面积为

$$S=\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\cdot(xz+xy+yz)=\frac{\sqrt{3}}{4}(xz+xy+yz).$$

又注意到 $\triangle ABC$ 的面积可用三个小三角形表示，故又知

$$\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}az=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad 或\quad x+y+z=\sqrt{3}a/2.$$

问题化为函数 $f(x,y,z)=\sqrt{3}(xy+xz+yz)/4$ 在条件 $x+y+z=\sqrt{3}a/2$ 下的极值.

(i) 令 $F(x,y,z)=\sqrt{3}(xy+yz+xz)/4+\lambda(x+y+z-\sqrt{3}a/2)$，并立方程组

$$\begin{cases} F'_x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(y+z)+\lambda=0,\\ F'_y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x+z)+\lambda=0,\quad x+y+z=\dfrac{\sqrt{3}a}{2},\\ F'_z=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x+y)+\lambda=0,\end{cases}$$

易知有唯一解 $x_0=y_0=z_0=\sqrt{3}a/b$.

(ii) 显然,不存在最小面积,因此$\triangle DEF$之最大面积在(x_0,y_0,z_0)处达到.

(2) 易知,此内接长方体的六个面必分别平行于坐标平面.假定此内接长方体在第一象限中的顶点坐标为(x,y,z),那么由对称性可得该长方体之体积为$8xyz$.从而问题归结为求函数 $f(x,y,z)=8xyz$ 在条件 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 下的最大值问题.

作 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2-1)$,其中 $x>0,y>0,z>0$,并立方程组

$$\begin{cases} F'_x=yz+2\lambda\dfrac{x}{a^2}=0 \\ F'_y=xz+2\lambda\dfrac{y}{b^2}=0, \quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1. \\ F'_z=xy+2\lambda\dfrac{z}{c^2}=0, \end{cases}$$

从中可得出唯一解 $x_0=a/\sqrt{3},y_0=b/\sqrt{3},z_0=c/\sqrt{3}$.根据几何性质不难推知,该椭球面之内接长方体在第一象限的顶点为$(a/\sqrt{3},b/\sqrt{3},c/\sqrt{3})$时达到最大体积

$$V=8\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\frac{b}{\sqrt{3}}\frac{c}{\sqrt{3}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}abc.$$

(3) 记锥顶为 H,它在平面上投影点为 O,且记从点 O 向边 a,b,c 各作垂线之长度为 x,y,z,则知该锥体之侧面积为

$$S=\frac{1}{2}a\sqrt{h^2+x^2}+\frac{1}{2}b\sqrt{h^2+y^2}+\frac{1}{2}c\sqrt{h^2+z^2}.$$

(其中,当 O 与$\triangle ABC$之内心在 BC 同一侧时,有 $x>0$,否则 $x<0$.y 与 z 也类同.)由$\triangle ABC$之面积 $S_\triangle=(ax+by+cz)/2$,再令 $ax+by+cz=2S_\triangle\triangleq G$,可得

$$G=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\qquad p=(a+b+c)/2.$$

作函数 $F(x,y,z)=a\sqrt{h^2+x^2}+b\sqrt{h^2+y^2}+c\sqrt{h^2+z^2}-\lambda(ax+by+cz-G)$,则由 $F'_x=F'_y=F'_z=0$ 可解出

$$\lambda=\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{y}{\sqrt{h^2+y^2}}=\frac{z}{\sqrt{h^2+z^2}}.$$

易知该问题必有最小值而无最大值,因此其最小值在 $x=y=z$(即点 O 为$\triangle ABC$之重心)时达到.此时有

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{h^2+r^2}(a+b+c).$$

其中 r(内接圆半径)$=2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}/(a+b+c)$.

例 4.2.6　解答下列问题:

(1) 试求椭球面 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 在第一象限中的切平面,使得

(i) 它与各坐标轴的截距之和最小.

(ii) 它与各坐标平面所围成的四面体体积最小.

(2) 试求 z 在椭圆抛物面 $x^2+y^2=2az$ 与椭圆柱面 $x^2+xy+y^2=a^2$ ($a>0$)的交线上的极值.

(3) 试求有心二次曲线 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$($AC-B^2\neq 0$)的半轴,其中 $AC-B^2>0$, $A+C>0$.

(4) 试求椭球面 $x^2/3+y^2+z^2/2=1$ 与平面 $2x+y+z=0$ 相交椭圆之面积.

(5) 求圆锥面 $az=b\sqrt{x^2+y^2}$ ($a>0$, $b>0$)与平面 $z=b$ 所围成的锥体内最大长方体的体积(该长方体的底面平行 xOy 平面).

解　(1) (i) 易知椭球面上点 $P=(x,y,z)$处的切平面为$\dfrac{Xx}{a^2}+\dfrac{Yy}{b^2}+\dfrac{Zz}{c^2}=1$,故得截距各为 $A=a^2/x$, $B=b^2/y$, $C=c^2/z$.因此作函数

$$F(x,y,z)=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right).$$

从方程组 $F'_x=0$, $F'_y=0$, $F'_z=0$ 可解出

$$x=(a^4/2\lambda)^{1/3},\quad y=(b^4/2\lambda)^{1/3},\quad z=(c^4/2\lambda)^{1/3}.$$

代入椭球面方程,得到

$$a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3}=(2\lambda)^{2/3},\quad 2\lambda=(a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3})^{3/2}.$$

从而我们有

$$x=(a^4/2\lambda)^{1/3}=a^{4/3}/\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3}},$$

$$y=b^{4/3}\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3}},\quad z=c^{4/3}\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3}}.$$

(ii) 易知四面体之最小体积为 $V=\dfrac{1}{6}ABC=\dfrac{1}{6}\dfrac{a^2b^2c^2}{xyz}$.从而问题化为求 $V=xyz$ 在条件 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 下的最大值.下略.

(2) 视 $f=z$,且易知极值是存在的,作函数

$$F(x,y,z)=z+\lambda(x^2+y^2-2az)+\mu(x^2+xy+y^2-a^2),$$

并列出方程组

$$\begin{cases} F'_x=2\lambda x+2\mu x+\mu y=0, & ①\\ F'_y=2\lambda y+\mu x+2\mu y=0, & ②\\ F'_z=1-2a\lambda=0, & ③\end{cases}$$

以 x, y, $2z$ 各乘式①,②,③,再相加,得到

$$z+\lambda(x^2+y^2-2az)+\mu(x^2+xy+y^2)=0.$$

由此以及原曲面方程关系,我们有 $z+\mu a^2=0$,即 $z=-\mu a^2$.从式③可知 $2\lambda=1/a$,而从式①,②中消去 x, y 又可知

$$4(\lambda+\mu)^2-\mu^2=0,\quad 即\quad (2\lambda+3\mu)(2\lambda+\mu)=0.$$

由此又得 $\mu=-2\lambda$ 或 $\mu=-2\lambda/3$.将这些结果都代到 $z=-\mu a^2$ 中,导出结论:z 的极大值是 a,极小值 $a/3$.

(3) 易知该曲线有中心(0,0),设点(x,y)在曲线上,则问题化为求 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $Ax^2+2Bxy+Cy^2-1=0$ 下的极值.作函数

$$F(x,y)=x^2+y^2+\lambda(Ax^2+2Bxy+Cy^2-1),$$

并解方程组

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}F'_x=(\lambda A-1)x+\lambda By=0,\\ -\dfrac{1}{2}F'_y=\lambda Bx+(\lambda C-1)y=0,\end{cases} \tag{④}$$

注意到问题必有非零解,故知 $\begin{vmatrix}\lambda A-1 & \lambda B\\ \lambda B & \lambda C-1\end{vmatrix}=0$.设其两个根为 λ_1,λ_2,且代入④,并记对应于 λ_1 的解为(x_1,y_1);对应于 λ_2 的解记为(x_2,y_2),则得(注意 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$)

$$\begin{aligned}f(x_1,y_1)&=x_1^2+y_1^2=x_1[\lambda_1(Ax_1+By_1)]+y_1[\lambda_1(Bx_1+Cy_1)]\\&=\lambda_1(Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2)=\lambda_1.\end{aligned}$$

类似地有 $f(x_2,y_2)=x_2^2+y_2^2=\lambda_2$.实际上,由行列式等于0可解出

$$\lambda_i=\frac{(A+C)\pm\sqrt{(A+C)^2-4(AC-B^2)}}{2(AC-B^2)}\quad(i=1,2).$$

故 $\lambda_1\geqslant\lambda_2>0$.易知 f 的最大、最小值为 λ_1,λ_2,其所对应的曲线为椭圆,其长、短轴的平方各为 λ_1,λ_2.

(4) 只需求出相交椭圆之长短轴即可.即求在交线点(x,y,z)处 $x^2+y^2+z^2$ 的最值,也就是求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=r^2$ 在条件

$$x^2/3+y^2+z^2/2=1,\quad 2x+y+z=0$$

下的极值.作函数

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda\left(\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}-1\right)+\mu(2x+y+z),$$

并立方程组 $F'_x=0,F'_y=0,F'_z=0$,解出 $\lambda=-r^2$,再代入 $F'_x=0$ 可知$(r^2-3)x=3\mu$.

若 $r^2=3$,则 $\mu=0$.代入 $F'_y=0,F'_z=0$,可得 $y=z=0$.这不可能,因此 $r^2-3\neq0$,由此解出 $x=3\mu/(r^2-3)$.再依据 $F'_y=0=F'_z$,导出 $y=\mu/2(r^2-1)$,$z=\mu/(r^2-2)$.又代入平面有

$$\frac{6\mu}{r^2-3}+\frac{\mu}{2(r^2-1)}+\frac{\mu}{r^2-2}=0.$$

消去 μ,可知 $15(r^2)^2-49r^2+36=0$.解出根 r_1,r_2(长短轴)

$$r_1^2 r_2^2 = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}, \quad \text{椭圆面积} = \pi ab = \pi r_1 r_2 = 2\pi\sqrt{3/5}.$$

(5) 注意到对称性,在记此内接长方体位于第一象限之顶点为 (x,y,z),则其体积为 $V=4xy(b-z)$.从而问题归结为:求函数 $f(x,y,z)=4xy(b-z)$ 在条件 $a^2z^2=b^2(x^2+y^2)$ 下的极值.

作函数 $F(x,y,z)=4xy(b-z)+\lambda[b^2(x^2+y^2)-a^2z^2]$,并解方程组

$$\begin{cases} F'_x = 4y(b-z)+2\lambda b^2 x = 0, \\ F'_y = 4x(b-z)+2\lambda b^2 y = 0, \quad a^2z^2 = b^2(x^2+y^2). \\ F'_z = -4xy-2\lambda a^2 z, \end{cases}$$

易知有唯一解:$x=y=\sqrt{2}a/3$, $z=2b/3$.根据问题的几何意义,其最大体积的长方体将在它的位于第一象限的顶点 $(\sqrt{2}a/3,\sqrt{2}a/3,2b/3)$ 处达到,其值为 $8a^2b/27$.

例 4.2.7　解答下列问题:

(1) 试求椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上一点,使得此点到直线 $2x+3y=6$ 的距离最短.

(2) 试求点 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 T:$Ax+By+Cz+D=0$ 的距离.

(3) 试求原点到曲面 $xyz=1$ 上距离的最近的点.

(4) 试求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 之间的距离.

解　(1) 注意到点 (x,y) 到该直线的距离公式为 $d=|2x+3y-6|/\sqrt{13}$,故问题归结为在约束条件 $x^2+4y^2=4$ 下求函数

$$f(x,y)=(2x+3y-6)^2/13$$

下的最小值.从而令

$$F(x,y)=(2x+3y-6)^2/13+\lambda(x^2+4y^2-4),$$

并立方程组

$$\begin{cases} F'_x = \dfrac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x = 0, \\ F'_y = \dfrac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y = 0, \end{cases} \quad x^2+4y^2-4=0,$$

得解 $\boldsymbol{X}_1=(8/5,3/5)$, $\boldsymbol{X}_2=(-8/5,-3/5)$.从而知 $d|_{X_1}=1/\sqrt{13}$, $d|_{X_2}=11/\sqrt{13}$,显然 $(8/5,3/5)$ 就是所要求的点.

(2) 从点 $\boldsymbol{X}_0$ 到 T 上动点 $\boldsymbol{X}=(x,y,z)$ 的距离是

$$d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

从而问题转化为求 d^2 在条件 $Ax+By+Cz+D=0$ 下的极值.作函数

$$F(x,y,z)=d^2+\lambda(Ax+By+Cz+D).$$

则由 $F'_x=0=F'_y=F'_z$ 可解出

$$x=x_0-\lambda A/2, \quad y=y_0-\lambda B/2, \quad z=z_0-\lambda C/2.$$

代入平面 T 的方程,可得 $\lambda=2(Ax_0+By_0+Cz_0+D)/(A^2+B^2+C^2)$,因此

$$d=|Ax_0+By_0+Cz_0+D|/\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

(3) 问题归结为求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $xyz-1=0$ 下的最小值.从而作函数

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda(xyz-1),$$

并立方程组

$$\begin{cases}F'_x=2x+\lambda yz=0,\\ F'_y=2y+\lambda zx=0,\quad xyz-1=0,\\ F'_z=2z+\lambda xy=0,\end{cases}$$

易得 $\lambda=-2x/yz=-2y/xz=-2z/xy$,以及

$$\frac{x}{yz}=\frac{y}{xz},\quad \frac{y}{zx}=\frac{z}{xy},\quad xyz=1,$$

从而解出 $\boldsymbol{X}_1=(1,1,1)$,$\boldsymbol{X}_2=(-1,-1,1)$,$\boldsymbol{X}_3=(1,-1,-1)$,$\boldsymbol{X}_4=(-1,1,-1)$.

我们有 $\mathrm{d}^2F|_{X_1}>0$,故点 $\boldsymbol{X}_1$ 是曲面上到原点距离最近的一点.其它点亦然.

(4) 设 (x,y) 是抛物线上一点(即 $y-x^2=0$),(ξ,η) 是直线上一点(即 $\xi-\eta-2=0$),则此两点间的距离为 $d=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$.从而作函数

$$F(x,y,\xi,\eta)=d^2+\lambda(y-x^2)+\mu(\xi-\eta-2),$$

并解平衡点方程,可知有解:$x=1/2$,$y=1/4$,$\xi=11/8$,$\eta=-5/8$.故知 $d=7\sqrt{2}/8$.

例 4.2.8 试证明下列命题:

(1) 设三角形的顶点 $A=(x_1,y_1)$,$B=(x_2,y_2)$,$C=(x_3,y_3)$ 位于可微曲线

$$f(x,y)=0,\quad \varphi(x,y)=0,\quad \psi(x,y)=0$$

上.(i)若此三角形的面积达到极值,则这些曲线在顶点处的法线通过此三角形的垂心.(ii)若三角形周长达到极值,则这些曲线在顶点处的法线过此三角形的内心.

(2) 设 $f(x,y,z)$,$\varphi(x,y,z)$ 有二阶偏导数.若 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下具有极值 u_0,则两曲面 $u_0=f(x,y,z)$ 与 $\varphi(x,y,z)=0$ 相切.

证明 (1) 易知 $f(x_1,y_1)=0$,$\varphi(x_2,y_2)=0$,$\psi(x_3,y_3)=0$.

(i) 令此三角形之面积为 S,作函数

$$F=S-\lambda f-\mu\varphi-\gamma\psi=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}-\lambda f(x_1,y_1)-\mu\varphi(x_2,y_2)-\gamma\psi(x_3,y_3),$$

由 $F'_{x_1}=\frac{1}{2}(y_2-y_3)-\lambda f'_x(x_1,y_1)=0$,$F'_{y_1}=\frac{1}{2}(x_3-x_2)-\lambda f_y(x_1,y_1)=0$ 求出解

$$\lambda=\frac{y_2-y_3}{2f'_x(x_1,y_1)}=\frac{x_3-x_2}{2f'_y(x_1,y_1)},\quad \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\cdot\frac{f'_y(x_1,y_1)}{f'_x(x_1,y_1)}=-1.$$

注意到 $f_y'(x_1,y_1)/f_x'(x_1,y_1)$是曲线 $f(x,y)=0$ 在点(x_1,y_1)处法线的斜率,故由此知直线$\overline{BC}$与 $f(x,y)=0$ 在点(x_1,y_1)处的法线垂直.其它类似.

(ii) 记 $d_1=\overline{BC}=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$,以及

$$d_2=\overline{CA}=\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2},\quad d_3=\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

又记向量$\overline{BC}$,$\overline{CA}$,$\overline{AB}$之方向余弦为(l_1,m_1),(l_2,m_2),(l_3,m_3),即

$$\begin{cases} l_1=\dfrac{x_3-x_2}{d_1}, \\ m_1=\dfrac{y_3-y_2}{d_1}; \end{cases} \begin{cases} l_2=\dfrac{x_1-x_3}{d_2}, \\ m_2=\dfrac{y_1-y_3}{d_2}; \end{cases} \begin{cases} l_3=\dfrac{x_2-x_1}{d_3}, \\ m_3=\dfrac{y_2-y_1}{d_3}. \end{cases}$$

作辅助函数 $F=d_1+d_2+d_3-\lambda f(x_1,y_1)-\mu f(x_2,y_2)-\nu f(x_3,y_3)$,以及偏导方程组

$$F_x'=\frac{x_1-x_3}{d_2}-\frac{x_2-x_1}{d_3}-\lambda f_x'=0,\quad F_y'=\frac{y_1-y_3}{d_2}-\frac{y_2-y_1}{d_3}-\lambda f_y'=0.$$

将其写成 $l_2-l_3=\lambda f_x'(x_1,y_1)$,$m_2-m_3=\lambda f_y'(x_1,y_1)$,可得

$$(l_2-l_3)f_y'(x_1,y_1)=(m_2-m_3)f_x'(x_1,y_1),$$

$$\frac{l_2f_y'-m_2f_x'}{\sqrt{(f_x')^2+(f_y')^2}}=\frac{l_3f_y'-m_3f_x'}{\sqrt{(f_x')^2+(f_y')^2}}.$$

易知在点(x_1,y_1)处曲线的切线之方向余弦为

$$f_y'/\sqrt{(f_x')^2+(f_y')^2},\ -f_x'/\sqrt{(f_x')^2+(f_y')^2}.$$

这说明切线与$\overline{CA}$,$\overline{AB}$构成等角,因此切线平分$\angle A$ 之外角,即法线平分内角(法线过内心).其它顶点也类似.(注:满足 $f_x'(x_1,y_1)=f_y'(x_1,y_1)=0$ 的点除外.)

(2) 依题设知,从 $\varphi(x,y,z)=0$ 导出 z 是 x,y 的隐函数.假定 $u=f(x,y,z)$在点(x_0,y_0,z_0)处达到极值,则根据

$$u_x'=f_x'+f_z'\cdot z_x'=0,\quad u_y'=f_y'+f_z'z_y'=0,$$
$$\varphi_x'+\varphi_z'\cdot z_x'=0,\quad \varphi_y'+\varphi_z'\cdot z_y'=0,$$

可知在点(x_0,y_0,z_0)处有关系

$$f_x'/\varphi_x'=f_y'/\varphi_y'=f_z'/\varphi_z',$$

即两曲面 $f(x,y,z)=u_0$ 与 $\varphi(x,y,z)=0$ 在(x_0,y_0,z_0)处的切平面

$$f_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$
$$\varphi_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\varphi_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\varphi_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

平行.注意到它们有相同切点,故得所证.

例 4.2.9 试证明下列不等式:

(1) $(x^n+y^n)/2\geqslant[(x+y)/2]^n \quad (x\geqslant0,y\geqslant0,n\in\mathbf{N})$.

(2) $abc^3\leqslant27[(a+b+c)/5]^5 \quad (a>0,b>0,c>0)$.

(3) $ab^2c^3 < 108[(a+b+c)/6]^6 \quad (a>0, b>0, c>0)$.

证明 (1) 考察函数 $f(x,y)=(x^n+y^n)/2$ 在条件 $x+y=s$ 下的极值,作函数

$$F(x,y)=(x^n+y^n)/2+\lambda(s-x-y),$$

并解方程组

$$\begin{cases} F'_x = nx^{n-1}/2-\lambda=0, \\ F'_y = ny^{n-1}/2-\lambda=0, \end{cases} \quad x+y=s,$$

易知可得 $\lambda=\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{s}{2}\right)^{n-1}$, $x=y=\dfrac{s}{2}$.因为二阶微分

$$\mathrm{d}^2F=\frac{n(n-1)}{2}(x^{n-2}\mathrm{d}x^2+y^{n-2}\mathrm{d}y^2)$$

在点 $x=y=s/2$ 处满足

$$\mathrm{d}^2F\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)=\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{s}{2}\right)^{n-2}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)>0,$$

所以 f 在点 $(s/2,s/2)$ 处达到极小值.即

$$f(x,y)\geqslant(s/2)^n=f_{\min}, \quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^n\leqslant\frac{x^n+y^n}{2}.$$

(2) 考察函数 $f(x,y,z)=xyz^3$ 在约束条件(球面)$x^2+y^2+z^2=5r^2\ (r>0)$下的最大值,作函数

$$F(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5r^2),$$

并解方程组

$$\begin{cases} F'_x = 1/x+2\lambda x=0, \\ F'_y = 1/y+2\lambda y=0, \\ F'_z = 3/z+2\lambda z=0, \end{cases} \quad x^2+y^2+z^2=5r^2,$$

可得(唯一)解 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)=(r,r,\sqrt{3}r)$.易知 f 在点 $\boldsymbol{X}_0$ 处取到极大值,也是最大值 $3^{3/2}r^5$.

上述结论也可写为 $xyz^3\leqslant3\sqrt{3}r^5$,其中 $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)/5}$.再将其改写为

$$x^2y^2z^6\leqslant27[(x^2+y^2+z^2)/5]^5$$

且用 a 代 x^2, b 代 y^2, c 代 z^2,即得所证.

(3) 类似于上题,考察函数

$$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z \quad (x>0, y>0, z>0),$$

在约束条件 $x^2+y^2+z^2=6r^2\ (r>0)$下的最大值.作函数

$$F(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2),$$

并解方程组

$$\begin{cases} F'_x = 1/x+2\lambda x=0, \\ F'_y = 2/y+2\lambda y=0, \\ F'_z = 3/z+2\lambda z=0, \end{cases} \quad x^2+y^2+z^2=6r^2,$$

可得(唯一)解 $x_0=r,y_0=\sqrt{2}r,z_0=\sqrt{3}r$.根据函数在第一象限中的性态,易知$(x_0,y_0,z_0)$是 f 的最大值点,其值为 $f(x_0,y_0,z_0)=\ln(6\sqrt{3}r^6)$.从而知

$$f(x,y,z)=\ln xy^2z^3\leqslant\ln\left[6\sqrt{3}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3\right],$$

即 $xy^2z^3\leqslant6\sqrt{3}[(x^2+y^2+z^2)/6]^3$.以 $a=x^2,b=y^2,c=z^2$ 代入即可得证.

* **例 4.2.10**　解答下列问题:

(1) 试求函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$ 在约束条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=c$下的最小值,其中 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.

(2) 试求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ 在约束条件

$$x_1/a_1+x_2/a_2+\cdots+x_n/a_n=1\quad(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$$

下的极值.

(3) 试求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}(x_i>0,\alpha_i>1;i=1,2,\cdots,n)$在约束条件 $x_1+x_2+\cdots+x_n=a(a>0)$下的极值.

(4) 设 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$是实数.试求函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 在条件 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$下的极值.

解　(1) 作 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-c\right)$,并立方程组

$$\begin{cases}F'_{x_1}=2a_1x_1+\lambda=0,\\ F'_{x_2}=2a_2x_2+\lambda=0,\quad x_1+x_2+\cdots+x_n=c,\\ \quad\cdots\cdots\\ F'_{x_n}=2a_nx_n+\lambda=0,\end{cases}$$

将前 n个方程相加,可得

$$2\sum_{i=1}^{n}x_i+\lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}=0,\quad\lambda=2c\Big/\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}.$$

由此可解出 $\boldsymbol{X}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$(记 $A=\sum_{i=1}^{n}1/a_i$):

$$x_1^0=\frac{1}{A}\frac{c}{a_1},\quad x_2^0=\frac{1}{A}\frac{c}{a_2},\cdots,x_n^0=\frac{1}{A}\frac{c}{a_n}.$$

注意到二次型 $\mathrm{d}^2F|_{X_0}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n\right)^2F=\sum_{i=1}^{n}2a_i\mathrm{d}x_i^2>0$,故知 $\boldsymbol{X}_0$ 是 f的极小值点,且其极小值为

$$f(\boldsymbol{X}_0)=\left(\frac{1}{A}\right)^2\left(\frac{c^2}{a_1}+\frac{c^2}{a_2}+\cdots+\frac{c^2}{a_n}\right)=\frac{c^2}{A}.$$

(2) 作函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\lambda\left(\frac{x_1}{a_1}+\frac{x_2}{a_2}+\cdots+\frac{x_n}{a}-1\right)$,并从方程组

$$F'_{x_j}=2x_j+\lambda/a_j=0\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

中可解出 $x_j=-\lambda/a_j(j=1,2,\cdots,n)$.注意到再约束条件,我们有

$$\lambda = -2\Big/\sum_{j=1}^{n}(1/a_j^2),\quad x_j = 1/a_j\sum_{j=1}^{n}1/a_j^2\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

因为 $d^2F = 2\sum_{j=1}^{n}dx_j^2 > 0$,所以 f 在上述点处达到最小值,其值为 $1\Big/\sum_{j=1}^{n}(1/a_j^2)$.

(3) 易知 f 与 $g=\ln f$ 有相同的临界点,故只需考察 g 的极值.作函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln x_i + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i - a\right),$$

并解方程组

$$F'_{x_i} = \alpha_i/x_i + \lambda = 0\,(i=1,2,\cdots,n),\quad \sum_{i=1}^{n}x_i = a,$$

可得解 $\boldsymbol{X}_0 = (x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$:

$$x_i^0 = \alpha_i a\Big/\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,(i=1,2,\cdots,n),\quad \lambda = -\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.$$

将其代入 $d^2F = -\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i/x_i^2)dx_i^2$,又得

$$d^2F(\boldsymbol{X}_0) = -\frac{1}{a^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^2\sum_{i=1}^{n}\frac{dx_i^2}{\alpha_i} < 0.$$

由此知 f 在 $\boldsymbol{X}_0$ 处达到最大值,其值为 $\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\cdots\alpha_n^{\alpha_n}\left(a\Big/\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}$.

(4) 作 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j + \lambda\left(1-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$,并立出方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{2}F'_{x_1} = (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0,\\ \frac{1}{2}F'_{x_2} = a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{1}{2}F'_{x_n} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0,\end{cases}\qquad ①$$

易知该方程组有非平凡解当且仅当 λ 是方程

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix} = 0\qquad ②$$

的根.

(i) 不难指出 λ 是实数.为此,记以 $\{a_{ij}\}$ 为其元的对称矩阵为 A,从而可写出

$$A\boldsymbol{X} = \lambda\boldsymbol{X}\quad(\boldsymbol{X} = (x_1,x_2,\cdots,x_n)).\qquad ③$$

假定 λ 是复数:$\lambda = \alpha + i\beta$,而 a_{ij} 都是实数,故 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$.因此,由式③导出

$$A\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u} - \beta\boldsymbol{v},\quad A\boldsymbol{v} = \beta\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}.$$

以 $\boldsymbol{v}$ 乘上述第一式,$\boldsymbol{u}$ 乘第二式,可得

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - (A\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = -\beta[(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})].$$

注意到 $(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v})$ (A^{T} 是 A 的转置矩阵),故有 $\beta[(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})] = 0$.又因

$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})+(v,v)\neq 0$,故只能 $\beta=0$.这说明 λ是实数.

(ii) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是式②的根,则对每个 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,根据式①以及约束条件,可解出临界点

$$(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

此外,以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 各乘式①中的对应等式,再相加,可得出

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0.$$

应用约束条件,我们有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lambda$,且在临界点上之值为

$$f(x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_n^{(i)})=\lambda_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

从而我们有

$$f\,|_{\text{最大值}}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\},\quad f\,|_{\text{最小值}}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\lambda_i\}.$$

* **例 4.2.11**　解答下列问题:

(1) 试分解正数 a 为 n 个正因子之乘积,使其倒数和最小.

(2) 设 $a_i\geqslant 0,x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$;$p>1,1/p+1/q=1$.试证明

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{1/q}.\qquad\text{(Hölder 不等式)}$$

(3) (Hadamard)设有行列式

$$A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\quad(a_{ij}\in\mathbf{R}^1).$$

若 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=1(i=1,2,\cdots,n)$,则 $|A|\leqslant 1$.

解　(1) 令 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}1/x_i$,则问题就是研究 f 在约束条件 $x_1x_2\cdots x_n-a=0$ 下的最小值.作

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}1/x_i+\lambda(x_1x_2\cdots x_n-a),$$

并立出方程组

$$F'_{x_i}=-1/x_i^2+\lambda\prod_{j\neq i}x_j=0\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

易知可解出 $1/x_i=\lambda a(i=1,2,\cdots,n)$,且有

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}=\lambda^na^n,\quad\lambda=a^{-1-1/n};$$

$$\frac{1}{x_i}=a^{-1-1/n}\cdot a=a^{-1/n},\quad x_i=a^{1/n}(i=1,2,\cdots,n).$$

即得临界点 $\boldsymbol{X}_0=(a^{1/n},a^{1/n},\cdots,a^{1/n})$,以及 $f(\boldsymbol{X}_0)=n/a^{1/n}$.

注意到 $f(\boldsymbol{X}_0)>1/x_i\to+\infty(x_i\to 0^+)$,以及

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant f(a^{1/n},a^{1/n},\cdots,a^{1/n})=n/\sqrt[n]{a}\quad(0<x_i\leqslant\delta),$$

且知在有界闭集 $D_\delta=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\prod_{i=1}^{n}x_i=a,x_i\leqslant\delta\}$上 f 可取到最小值.

(2) 考察函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{1/q}$ 在约束条件$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=l$(常数)下的极值.作函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{1/q}+\lambda\left(l-\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right),$$

并立方程组

$$F'_{x_j}=x_j^{q-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{1/q-1}-\lambda a_j=0\quad(j=1,\cdots,n).\qquad ①$$

不失一般性,可认定 $x_i>0$,$a_i>0$($i=1,2,\cdots,n$),并在式①中用第 m 式去除第 j 式,可得$(x_j/x_m)^{q-1}=a_j/a_m$($1\leqslant j,m\leqslant n$).取定 m,解出 $x_j=x_m(a_j/a_m)^{1/(q-1)}$($j=1,\cdots,n;j\neq m$).

将此代入约束条件,易知

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq m}}^{n}a_ix_m(a_i/a_m)^{1/(q-1)}+a_mx_m=l,$$

$$x_m\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^{q/(q-1)}/a_m^{1/(q-1)}=l.$$

应用等式 $q/(q-1)=p$,$1/(q-1)=p/q$,则由上推出临界点

$$x_m=la_m^{p/q}\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i^p\quad(m=1,2,\cdots,n).$$

为检验其充分性,还要看二阶微分,我们有

$$\mathrm{d}F=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{1/q}\sum_{i=1}^{n}x_i^{q-1}\mathrm{d}x_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i\mathrm{d}x_i,$$

$$\mathrm{d}^2F=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{1/p}\left[(q-1)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{1/q-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^{q-2}\mathrm{d}x_i^2\right.$$

$$\left.+(1-q)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^q\right)^{1/q-2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{q-1}\mathrm{d}x_i\right)^2\right].$$

注意到 $\sum_{i=1}^{n}a_i\mathrm{d}x_i=0$,故在临界点处有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{q-1}\mathrm{d}x_i\right)^2=\left(A\Big/\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{2(q-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i\mathrm{d}x_i=0,$$

即 $\mathrm{d}^2F>0$.这说明函数 f 在临界点处达到最小值 l:$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant l$,证毕.

(3) 只需指出 A 在条件 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2-1$($i=1,2,\cdots,n$)下的最大、最小值为 1,-1 即可.作函数 $F=A+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\lambda(a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2-1)$,并从方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ik}}=\frac{\partial A}{\partial a_{ik}}+\lambda a_{ik}\quad(i,k=1,2,\cdots,n)$$

解出 $A_{ik}+\lambda a_{ik}=0$,其中 A_{ik} 为 A 中元素 a_{ik} 的余子式.在等式两端乘以 a_{ik},并对 k 求和,可知 $A+\lambda=0$,$\lambda=-A$($i=1,2,\cdots,n$);由此可得

$$A_{ik}=a_{ik}A\quad(i,k=1,2,\cdots,n).$$

从而我们有

$$\begin{vmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1n}\\\cdots&&\cdots\\A_{n1}&\cdots&A_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}Aa_{11}&\cdots&Aa_{1n}\\\cdots&&\cdots\\Aa_{n1}&\cdots&Aa_{nn}\end{vmatrix},\quad A^{n-1}=A^{n+1}.$$

这说明 A 的最大值为 1,最小值为 -1.

例 4.2.12　解答下列问题:

(1) 设 $f(a,b)=C$ 是函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=C'$ 下的一个极值,试证明 $\varphi(a,b)=C'$ 是函数 $\varphi(x,y)$ 在约束条件 $f(x,y)=C$ 下的极值.

(2) 对一个实矩阵 $X=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}$,我们记 $\|X\|=x^2+y^2+z^2+t^2$,并定义两个矩阵 X,Y 之间的距离为 $d(X,Y)=\|X-Y\|$.又作矩阵集合

$$E=\{X:\det(X)=0\},\quad 令\ A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},$$

试求 A 到 E 的最小距离 d_0,且证明存在 $X_0\in E$,使得 $d(A,X_0)=d_0$.

(3) 设 $\mathscr{F}$ 是一切次数 $\leqslant 2$ 的多项式形成的集合,$E=\{P(x):P\in\mathscr{F},P(1)=1\}$,且记 $J(P)=\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x$.试求 $Q\in E$,使 $J(Q)$ 达最小值.

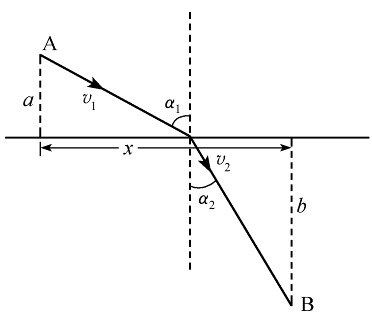


图 4.3

(4) 按物理上的定律,光线从点 A 出发射到点 B 上,走的是费时最少的途径.现在 A 与 B 位于不同的介质中,且各以速度 v_1 与 v_2 运动如图所示,则有

$$\sin\alpha_1/v_1=\sin\alpha_2/v_2.$$

解　(1) 用 S 表示曲线 $f(x,y)=C$,S' 表示曲线 $\varphi(x,y)=C'$.依题设知 S 与 S' 有接触点.

一般来说,在某个邻域上,$f(x,y)-C$ 在 S 的一侧是正的,在另一侧是负的.而 $\varphi(x,y)-C'$ 在 S' 的两侧也类似.如果 $f(a,b)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值(极大值 C),那么 $f(x,y)-C\leqslant 0$.也就是说 S' 位于 S 的一侧,当然,S 也就位于 S' 的一侧.这说明 $\varphi(x,y)-C'$ 在 S 上(局部)不变号,从而在点 (a,b) 处为 0,即此处为极值点.

(2) 作函数 $f(x,y,z,t)=(x-1)^2+y^2+z^2+(t-2)^2$,则问题归结为求 f 在约束条件(曲面上)下的最小值.为此,令

$$F(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)-2\lambda(xt-yz),$$

并立出方程组

$$\begin{cases} F'_x = 2(x-1) - 2\lambda t = 0, & ① \\ F'_y = 2y + 2\lambda z = 0, & ② \\ F'_z = 2z + 2\lambda y = 0, & ③ \\ F'_t = 2(t-2) - 2\lambda x = 0, & ④ \end{cases}$$

由式②,③可知:若 $y \neq 0$,则 $\lambda = \pm 1$.将其代入式①,④,导致矛盾,故只有 $y=0$,从而 $z=0$.因此,由解式①及④得到

$$x = (2\lambda+1)/(1-\lambda^2), \quad t = (\lambda+2)/(1-\lambda^2).$$

根据条件 $\det(X)=0$,我们有

$$xt = [(2\lambda+1)/(1-\lambda^2)]\cdot[(\lambda+2)/(1-\lambda^2)] = 0,$$

即 $\lambda = -1/2$ 或 -2.由此导出两个矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

不难推知,其最小距离为 1,且在 $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 处达到.

(3) 次数≤2 的多项式可写为 $P(x) = ax^2 + bx + c$,从而 $J(P)$又可表达为

$$J(a,b,c) = \int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{2ac}{3} + \frac{b^2}{3} + bc + c^2,$$

且 $P(1) = a+b+c = 1$.问题转化为求 $J(a,b,c)$在约束条件下的最小值.作函数

$$F(a,b,c) = \frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{2ac}{3} + \frac{b^2}{3} + bc + c^2 - \lambda(a+b+c-1),$$

并立方程组

$$\begin{cases} F'_a = \dfrac{2a}{5} + \dfrac{b}{2} + \dfrac{2c}{3} - \lambda = 0, \\ F'_b = \dfrac{a}{2} + \dfrac{2b}{3} + c - \lambda = 0, \qquad a+b+c = 1, \\ F'_c = \dfrac{2a}{3} + b + 2c - \lambda = 0, \end{cases}$$

或写成形式

$$\begin{pmatrix} 2/5 & 1/2 & 2/3 & -1 \\ 1/2 & 2/3 & 1 & -1 \\ 2/3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

易知有解 $\lambda = 2/9$,$(a,b,c) = (10/3, -8/3, 1/3)$.这说明 J 必须在点$(10/3, -8/3, 1/3)$处达到最小值.为阐明这一结论,我们将 E 在 $\mathbf{R}^3$ 中用代数式来表示,并引入线性项而考察二次曲面

$$z = J(x, y, 1-x-y), \quad (x,y,z) \in \mathbf{R}^3.$$

此曲面是 $J:\mathscr{F}\to\mathbf{R}^1$ 的图形.将其绕 z 轴旋转,可消去方程中的 xy 项而化为标准方程:椭圆抛物面或双曲抛物面.注意到 J 总是非负的,故该曲面必是椭圆抛物面,即有最小值.

(4) 记光在第一,二介质内运动所费时间各为 t_1,t_2,则

$$t_1 = a/v_1\cos\alpha_1,\quad t_2 = b/v_2\cos\alpha_2.$$

现在,考察函数

$$T(\alpha_1,\alpha_2) = a/v_1\cos\alpha_1 + b/v_2\cos\alpha_2$$

在约束条件 $a\tan\alpha_1 + b\tan\alpha_2 = l$ 下的极值.为此,令

$$F(\alpha_1,\alpha_2) = a/v_1\cos\alpha_1 + b/v_2\cos\alpha_2 + \lambda(l - a\tan\alpha_1 - b\tan\alpha_2).$$

并立方程组

$$\begin{cases} F'_{\alpha_1} = \dfrac{a\sin\alpha_1}{v_1\cos^2\alpha_1} - \dfrac{\lambda a}{\cos^2\alpha_1} = 0, \\ F'_{\alpha_2} = \dfrac{b\sin\alpha_2}{v_2\cos^2\alpha_2} - \dfrac{\lambda b}{\cos^2\alpha_2} = 0, \end{cases}\quad l = a\tan\alpha_1 + b\tan\alpha_2.$$

易知可解出临界点满足 $\lambda = \sin\alpha_1/v_1 = \sin\alpha_2/v_2$.由此就可求出 $\lambda,\alpha_1,\alpha_2$.不过,我们不必具体求出它们(从目的看问题).

为验证极值的充分性.看二阶微分

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2F = &\left[\frac{a}{v_1\cos\alpha_1} + 2a\frac{\sin\alpha_1}{\cos^2\alpha_1}\left(\frac{\sin\alpha_1}{v_1} - \lambda\right)\right]\mathrm{d}\alpha_1^2 \\ &+ \left[\frac{b}{v_2\cos\alpha_2} + 2b\frac{\sin\alpha_2}{\cos^2\alpha_2}\left(\frac{\sin\alpha_2}{v_2} - \lambda\right)\right]\mathrm{d}\alpha_2^2. \end{aligned}$$

易知在可解的极值点处有

$$\mathrm{d}^2F = \frac{a}{v_1\cos\alpha_1}\mathrm{d}\alpha_1^2 + \frac{b}{v_2\cos\alpha_2}\mathrm{d}\alpha_2^2 > 0.$$

这说明:如果等式 $\sin\alpha_1/v_1 = \sin\alpha_2/v_2$ 成立,那么 T 就达到最小值.

第5章　含参变量的积分

5.1　含参变量的定积分

设函数 $f(x,y)$在矩形 $D:a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d$上连续，变量 x 固定为$[a,b]$上的一点 x_0 时，函数 $f(x_0,y)$就成为一个变量 y 的函数，因此就有一个数值$\int_c^d f(x_0,y)\mathrm{d}y$与 x_0 对应，从而确定了一个区间$[a,b]$上的函数 $I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$，称它为含参变量的积分，称 x 为参变量.

引理　设 $f\in C(D)$，令 $F(x,z)=\int_c^z f(x,y)\mathrm{d}y(c\leqslant z\leqslant d)$，则 $F\in C(D)$.

定理 5.1.1　设 $f\in C(D)$，则 $I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$在$[a,b]$上连续.这结论也可写成：

$$\lim_{x\to x_0}\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \lim_{x\to x_0} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

它表明取极限与求积分的运算顺序可以交换.

定理 5.1.2　设 $f\in C(D)$，$\varphi\in C[a,b]$，$\psi\in C[a,b]$，且有 $c\leqslant\varphi(x)\leqslant d$，$c\leqslant\psi(x)\leqslant d$.则 $J(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$在$[a,b]$上连续.

定理 5.1.3　设 $f(x,y)$，$f_x(x,y)$在 D 上连续，则 $I(x)$在$[a,b]$上连续可微，且有

$$I'(x)=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y,$$

即求导与求积分运算顺序可以交换.

定理 5.1.4　设 $f(x,y)$，$f_x(x,y)$在 D 上连续，$\psi(x)$，$\varphi(x)$在$[a,b]$上可微，且有

$$c\leqslant \psi(x)\leqslant d,\quad c\leqslant \varphi(x)\leqslant d.$$

则 $J(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$在$[a,b]$上可微，且有

$$J'(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y+f(x,\psi(x))\psi'(x)-f(x,\varphi(x))\varphi'(x).$$

定理 5.1.5　设 $f\in C(D)$，则对任意 $z\in[a,b]$，有

$$\int_a^z\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_c^d\left[\int_a^z f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

取 $z=b$，即得

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

这说明两个求积分的顺序可以交换.

例 5.1.1　解答下列问题：

(1) 求极限 $I=\lim\limits_{y\to 0^+}\int_0^1 \dfrac{dx}{1+(1+xy)^{1/y}}$.

(2) 求极限 $I=\lim\limits_{a\to 0}\int_a^{1+a} \dfrac{dx}{1+a^2+x^2}$.

(3) 设 $f\in C([a,b]\times[c,d])$, $\int_a^b |\varphi(x)|dx<+\infty$, 令

$$F(y)=\int_a^b \varphi(x)f(x,y)dx,$$

试证明 $F\in C([c,d])$.

(4) 设 $f\in C([a,b])$, $K(x,y)$在 $D=\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant x\}$上连续,则对任意的 $\lambda\in\mathbf{R}^1$,方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy$$

有连续解且唯一.

(5) 设 $f(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上单变量连续的函数,试证明存在 $\mathbf{R}^2$ 上连续函数列 $\{g_n(x,y)\}$,使得$\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x,y)=f(x,y)$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

解 (1) 作函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}1/[1+(1+xy)]^{1/y}, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0<y\leqslant 1,\\ 1/(1+e^x), & 0\leqslant x\leqslant 1, y=0,\end{cases}$$

易知 $f(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上连续,从而可得

$$I=\int_0^1 \lim_{y\to 0^+} f(x,y)dx=\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}=-\int_0^1 \frac{de^{-x}}{1+e^{-x}}=\ln\frac{2e}{1+e}.$$

(2) 令 $F(u,v,a)=\int_v^u \dfrac{dx}{1+a^2+x^2}$,则有

$$F(1+a,a,a)=\int_a^{1+a}\frac{dx}{1+a^2+x^2}\triangleq f(a).$$

因为 F是 a 的连续函数,所以得到

$$\lim_{a\to 0}F(1+a,a,a)=F(1,0,0)=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

(3) 设 $M=\int_a^b|\varphi(x)|dx$,令 $y_0\in[c,d]$,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $|y-y_0|<\delta$时有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon/M,\quad (x,y)\in[a,b]\times[c,d].$$

从而可得:当 $|y-y_0|<\delta$时有

$$\begin{aligned}|F(y)-F(y_0)|&=\left|\int_a^b\varphi(x)[f(x,y)-f(x,y_0)]dx\right|\\&\leqslant\int_a^b|\varphi(x)||f(x,y)-f(x,y_0)|dx\end{aligned}$$

$$\leqslant\int_a^b|\varphi(x)|\mathrm{d}x\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.$$

(4) 依题设知,可设 $|K(x,y)|\leqslant M,(x,y)\in D,|f(x)|\leqslant M(a\leqslant x\leqslant b)$,并令 $\varphi_1(x)=f(x)$,以及作

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)\mathrm{d}y\quad(n=2,3,\cdots),$$

易知 $\varphi_n\in C([a,b])$.此外有

$$\begin{aligned}|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|&=\left|\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi_1(y)\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant|\lambda|\int_a^x|K(x,y)||f(y)|\mathrm{d}y\leqslant|\lambda|M^2(x-a),\\|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)|&=\left|\lambda\int_a^x K(x,y)[\varphi_2(y)-\varphi_1(y)]\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant|\lambda|^2M^3\int_a^x(y-a)\mathrm{d}y=|\lambda|^2M^3(x-a)^2/2!.\end{aligned}$$

依据归纳法,不难导出

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|\leqslant\frac{M}{n!}|\lambda|^nM^n(x-a)^n.$$

从而可知$\{\varphi_n(x)\}$在$[a,b]$上当 $n\to\infty$时是一致收敛列,若记其极限为 $\varphi(x)$,则 $\varphi\in C([a,b])$,且有

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

为证 φ的唯一性,我们假设 $\psi(x)$是方程的另一连续解,则令 $g(x)=\varphi(x)-\psi(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,易知 $g(a)=0$,以及 $g(x)=\lambda\int_a^x K(x,y)g(y)\mathrm{d}y$.不妨设 $|g(y)|\leqslant N(a\leqslant y\leqslant b)$,我们有

$$|g(x)|\leqslant NM|\lambda|(x-a),\quad|g(x)|\leqslant\frac{N}{2!}M^2|\lambda|^2(x-a)^2,\quad\cdots$$

$$|g(x)|\leqslant\frac{N}{n!}M^n|\lambda|^n(x-a)^n\leqslant\frac{N}{n!}M^n|\lambda|^n(b-a)^n.$$

由此得到(令 $n\to\infty$) $|g(x)|\equiv0$.证毕.

(5) (i) 不妨假定 $|f(x,y)|\leqslant M((x,y)\in\mathbf{R}^2)$.否则可用 $\arctan f(x,y)$代替.此时,若有 $g_n(x,y)\to\arctan f(x,y)(n\to\infty)$,则因 $\arctan f(x,y)<\pi/2$,故当 n充分大时 $g_n(x,y)<\frac{\pi}{2}$.从而得到

$$\lim_{n\to\infty}\tan g_n(x,y)=\tan(\arctan f(x,y))=f(x,y).$$

(ii) 作函数 $g(x,y)=\int_0^y f(x,t)\mathrm{d}t$,且设定

$$|x|+|y|<N,\quad |y+h|,|x+h|<N.$$

$$|g(x+h,y+h)-g(x,y)|=\left|\int_0^{y+h}f(x+h,t)\mathrm{d}t-\int_0^y f(x,t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\int_0^{y+h}|f(x+h,t)-f(x,t)|\mathrm{d}t+\left|\int_0^{y+h}f(x,t)\mathrm{d}t-\int_0^y f(x,t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\int_0^N|f(x+h,t)-f(x,t)|\mathrm{d}t+\int_y^{y+h}|f(x,t)|\mathrm{d}t\triangleq I_1+I_2.$$

注意到 $|f|\leqslant M$,用有界收敛定理可知 $I_1\to0(h\to0)$;又有 $|I_2|\leqslant M|h|\to0(h\to0)$.

易知 $g(x,y+h)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续,我们有

$$\lim_{h\to0}\frac{g(x,y+h)-g(x,y)}{h}=\frac{\mathrm{d}g(x,y)}{\mathrm{d}y}=f(x,y).$$

由此即可得证.

例 5.1.2　解答下列问题:

(1) 设 $F(x)=\int_0^x\sin(xy)\mathrm{d}y\,(x\in\mathbf{R}^1)$,求 $F'(x)$.

(2) 试求 a,b 之值,使积分$\int_1^3(a+bx-x^2)^2\mathrm{d}x$ 达到最小值.

(3) 已知$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\mathrm{d}\theta=1(0<r<1)$,试求

$$I(r)=\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\mathrm{d}\theta\quad(r>0,r\neq1).$$

(4) 试求 $I(a)=\int_0^{\pi/a}\frac{\arctan(a\cdot\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$.

解　(1) 易知 $F'(x)=\int_0^x y\cos(xy)\mathrm{d}y+\sin x^2$.

(2) 记 $F(a,b)=\int_1^3(a+bx-x^2)\mathrm{d}x$,在积分号下求导,并从偏导方程组

$$\begin{cases}F'_a(a,b)=2\int_1^3(a+bx-x^2)\mathrm{d}x=0,\\[2mm] F'_b(a,b)=2\int_1^3(a+bx-x^2)x\mathrm{d}x=0.\end{cases}$$

解出临界点 $a=-11/3$,$b=4$.注意到

$$\mathrm{d}^2F(a,b)=4\mathrm{d}a^2+16\mathrm{d}a\mathrm{d}b+\frac{52}{3}\mathrm{d}b^2$$

$$=4(\mathrm{d}a+2\mathrm{d}b)^2+\frac{4}{3}\mathrm{d}b^2>0,$$

故知最小值在 $a=-11/3$,$b=4$ 时达到.

(3) 对任意的 r_0:$0<r_0<1$,函数 $\ln(1-2r\cos\theta+r^2)$及其对 r 的导(函)数在 $r\in[0,r_0]$上连续,故知

$$I'(r)=\int_0^{2\pi}\frac{2(r-\cos\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\right)\mathrm{d}\theta=0.$$

由此可得 $I(r)=C$(常数,$0<r<r_0$),随之因连续性和 r_0 的任意性,就有 $I(r)=C(0\leqslant r<1)$.而由 $I(0)=0$,又知 $C=0$,即 $I(r)=0(0\leqslant r<1)$.

对 $r>1$,根据公式

$$I\left(\frac{1}{r}\right)=\int_0^{2\pi}\ln\left(1-\frac{2\cos\theta}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\ln\frac{1-2r\cos\theta+r^2}{r^2}\mathrm{d}\theta,$$

我们有 $I(r)=\int_0^{2\pi}\ln r^2\,\mathrm{d}\theta+I(1/r)=4\pi\ln r$.

(4) 设 $a\geqslant\varepsilon_0$,且作函数

$$f(x,a)=\begin{cases}\arctan(a\tan x), & x\neq 0,x\neq\pi/2,\\ a, & x=0,\\ 0, & x=\pi/2.\end{cases}$$

易知其导数为

$$f_a'(x,a)=\begin{cases}1/(1+a^2\tan^2x), & x\neq\pi/2,\\ 0, & x=\pi/2.\end{cases}$$

从而可得,$f(x,a)$,$f_a'(x,a)$在区域 D:$0\leqslant x\leqslant\pi/2$,$a\geqslant\varepsilon_0>0$ 上连续.因此,我们有(计算积分可用替换 $t=\tan x$)

$$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\tan^2x}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}=\frac{\pi}{2(1+a)}.$$

$$I(a)=\pi\ln(1+a)/2+C\quad(a>0).$$

由此还知 $C=\lim\limits_{a\to0^+}I(a)=I(0)=0$(注意 $I(a)$在 $a=0$ 处连续).这样,最后就得到 $I(a)=\pi\ln(1+a)/2(a\geqslant0)$.此外,由于 $I(a)=I(|a|)\mathrm{sgn}\,a$,故又可得

$$I(a)=\pi\,\mathrm{sgn}\,a\cdot\ln(1+|a|)/2\quad(a\in\mathbf{R}^1).$$

例 5.1.3 解答下列问题:

(1) 试求 $I(k)=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin^2\theta+k^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta(k\neq0)$.

(2) 试求 $I(a)=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}(|a|<1)$.

解 (1) 注意到 $\ln(\sin^2\theta+k^2\cos^2\theta)$与 $2k\cos^2\theta/(\sin^2\theta+k^2\cos^2\theta)$均在$[0,\pi/2]$上连续,故可得

$$I'(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{2k\cos^2\theta}{\sin^2\theta+k^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=2k\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{k^2+\tan^2\theta}.$$

令 $\tan\theta=x$,则 $\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}x/(1+x^2)$.因此又知

$$I'(k)=2k\int_0^{+\infty}\frac{1}{k^2+x^2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{2k}{k^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{k^2+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2k}{k^2-1}\left[\arctan x-\frac{1}{k}\arctan\left(\frac{x}{k}\right)\right]_0^{+\infty}.$$

若 $k>0$，则 $I'(k)=\pi/(k+1)$；若 $k<0$，则 $I'(k)=\pi/(k-1)$，

$$I(k)=\begin{cases}\pi\ln(k+1)+C, & k>0,\\ \pi\ln|k-1|+C, & k<0.\end{cases}$$

而由题设知 $I(1)=I(-1)=0$，从而可得 $C=-\pi\ln 2$．最后我们有

$$I(k)=\begin{cases}\pi\ln(k+1)-\pi\ln 2=\pi\ln[(k+1)/2], & k>0,\\ \pi\ln|k-1|-\pi\ln 2=\pi\ln(|k-1|/2), & k<0.\end{cases}$$

(2) (i) 令 $f(x,a)=\ln[(1+a\cos x)/(1-a\cos x)]/\cos x$，易知 $f(x,a)\to 2a(x\to\pi/2)$，从而令 $f(\pi/2,a)=2a$，则 $f(x,a)$在 $0\leqslant x\leqslant\pi/2$，$-1<a<1$ 上连续．

(ii) 由 $f_a'(x,a)=2/(1-a^2\cos^2 x)$，以及 $\lim\limits_{x\to\pi/2}f_a'(x,a)=2$，令 $f_a'(\pi/2,a)=2$，可知 $f_a'(x,a)$在$[0,\pi/2]\times(-1,1)$上连续．从而我们有

$$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{2\mathrm{d}x}{1-a^2\cos^2 x}\xlongequal{x=\arctan t}\int_0^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}t}{(1-a^2)+t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{1-a^2}}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

由此又得 $I(a)=\pi\arcsin a+C$．因为 $I(0)=0$，所以 $C=0$，即 $I(a)=\pi\arcsin a$．

例 5.1.4 解答下列问题：

(1) 求 $I(a)=\int_0^{\pi/2}\ln(a^2-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta(a>1)$．

(2) 设 $I(y)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x(0\leqslant y\leqslant 1)$，求 $I_+'(0)$．

解 (1) 易知满足可积分号下求导的条件，故知

$$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{2a\mathrm{d}\theta}{a^2-\sin^2\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

从而得到 $I(a)=\pi\ln(a+\sqrt{a^2-1})+C$．因为

$$I(a)=\pi\ln a+\int_0^{\pi/2}\ln(1-\sin^2\theta/a^2)\mathrm{d}\theta,$$

所以我们有

$$C=\int_0^{\pi/2}\ln(1-\sin^2\theta/a^2)\mathrm{d}\theta-\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a}.$$

令 $a\to+\infty$，且注意到 $|\ln(1-\sin^2\theta/a^2)|\leqslant|\ln(1-1/a^2)|$，则不难推出 $C=-\pi\ln 2$．即 $I(a)=\pi\ln[(a+\sqrt{a^2-1})/2]$．

(2) 注意到被积函数及其对 y 的导(函)数并不在$(0,0)$处连续，故不能直接在

积分号下求导,下面采用定义求导.

首先,有 $I(0)=\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x=-1$.

其次,对 $y>0$,我们有

$$\varphi(y)=\ln\sqrt{1+y^2}-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\ln\sqrt{1+y^2}-1+y\arctan\left(\frac{1}{y}\right).$$

因此,计算其差商可得

$$\frac{I(y)-I(0)}{y}=\frac{1}{y}\ln\sqrt{1+y^2}+\arctan\left(\frac{1}{y}\right).$$

由此即知 $I'_+(0)=\pi/2$.

注 若上题设定 $y:-1\leqslant y\leqslant 1$,则类似地可得 $I'_-(0)=-\pi/2$,即 $I(y)$在$y=0$ 处不可导.

例 5.1.5 设 $I(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{t^2+xt}\mathrm{d}t$,求 $I'(0)$.

解 令 $F(u,v,x)=\int_v^u\mathrm{e}^{t^2+xt}\mathrm{d}t$,则 $I(x)=F(\cos x,\sin x,x)$.从而可得

$$\begin{aligned}I'(x)&=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\\&=\mathrm{e}^{u^2+xu}(-\sin x)-\mathrm{e}^{(v^2+xv)}\cos x+\int_v^u t\mathrm{e}^{t^2+xt}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由此即知 $I'(0)=-1+\int_0^1 t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-3)$.

例 5.1.6 解答下列问题:

(1) 设 $f\in C(\mathbf{R}^2)$,$F(x)=\int_0^x\left(\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$,求 $F'(x)$.

(2) 设 $f\in C([0,1]^2)$,$F(t)=\int_0^t\left(\int_0^t f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\,(0\leqslant t\leqslant 1)$,求 $F'(t)$.

解 (1) $F'(x)=\int_0^x 2xf(t,x^2)\mathrm{d}t+\int_{x^2}^{x^2}f(t,s)\mathrm{d}s=2x\int_0^x f(t,x^2)\mathrm{d}t$.

(2) $F'(t)=\int_0^t f(x,t)\mathrm{d}x+\int_0^t f(t,y)\mathrm{d}y$.

例 5.1.7 试证明下列命题:

(1) 设 $M=\int_a^b|g(x)|\mathrm{d}x<+\infty$,$f(x,y)$以及 $f'_y(x,y)$在 $D:[a,b]\times[c,d]$ 上连续,则 $F(y)=\int_a^b g(x)f(x,y)\mathrm{d}x$ 在$[c,d]$上连续可微.

(2) 设 $f\in C([0,1])$,$K(x,y)=\begin{cases}y(1-x), & y<x,\\ x(1-y), & y\geqslant x,\end{cases}$则

$$F(x)=\int_0^1 K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

满足微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 F(x)}{\mathrm{d}x^2}=-f(x)$，$F(0)=0$，$F(1)=1$.

(3) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的正值连续函数，则 $\lim\limits_{p\to0^+}\left(\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}$.

(4) 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上一阶偏导数存在. 若 f_y'，f_{xy}'' 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续，则 $f_{xy}(x,y)=f_{yx}''(x,y)$，$(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

证明　(1) 对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $(x_i,y_i)\in D(i=1,2)$ 时有

$$|f_y'(x_1,y_1)-f_y'(x_2,y_2)|<\frac{\varepsilon}{M},\quad |x_2-x_1|+|y_2-y_1|<\delta.$$

现在对 y_0，$y\in[c,d]$ 且 $|y-y_0|<\delta$，我们有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0}-\int_a^b g(x)f_y'(x,y_0)\mathrm{d}x\right|\\
=&\left|\int_a^b g(x)\frac{f(x,y)}{y-y_0}\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\frac{f(x,y_0)}{y-y_0}\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)f_y'(x,y_0)\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\int_a^b|g(x)|\left|\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}-f_y'(x,y_0)\right|\mathrm{d}x\\
=&\int_a^b|g(x)||f_y'(x,\xi)-f_y'(x,y_0)|\mathrm{d}x\quad(|\xi-y_0|<|y-y_0|)\\
<&\int_a^b|g(x)|\cdot\frac{\varepsilon}{M}\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

由此即可导出 $F'(y_0)=\int_a^b g(x)f_y'(x,y_0)\mathrm{d}x$. 显然，$F'(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续.

(2) 注意到 $F(x)=\int_0^x y(1-x)f(y)\mathrm{d}y+\int_x^1 x(1-y)f(y)\mathrm{d}y$，故有 $F(0)=0=F(1)$，而且

$$\begin{aligned}
F'(x)=&\int_0^x -yf(y)\mathrm{d}y+x(1-x)f(x)\\
&+\int_x^1(1-y)f(y)\mathrm{d}y-x(1-x)f(x)\\
=&-\int_0^x yf(y)\mathrm{d}y-\int_x^1 yf(y)\mathrm{d}y+\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\\
=&-\int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y+\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

由此还易得 $F''(x)=-f(x)$. 证毕.

注　$K(x,y)$ 称为算子 $-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ (在 $F(0)=F(1)=0$ 时) 的 Green 函数.

(3) 取对数且用 L′Hospital 法则(用积分号下求导与积分号下求极限)，

$$\lim_{p\to0^+}\ln\left(\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}=\lim_{p\to0^+}\frac{\ln\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x}{p}$$

$$=\lim_{p\to 0^+}\left(\int_0^1 f^p(x)\cdot\ln f(x)\mathrm{d}x\Big/\int_0^1 f^p(x)\mathrm{d}x\right)=\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x.$$

由此即得所证.

(4) 令 $F(x,y)=f_y'(x,y)$,则有

$$f(x,y)-f(x,c)=\int_c^y F(x,t)\mathrm{d}t\quad(a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d).$$

注意到 $F_x'(x,y)=f_{xy}''(x,y)$是二元连续函数,故进行积分号下求导,可知

$$f_x'(x,y)-f_x'(x,c)=\int_c^y F_x'(x,t)\mathrm{d}t.$$

从而得到 $f_{yx}''(x,y)=F_x'(x,y)=f_{xy}''(x,y)$.

例 5.1.8 解答下列问题:

(1) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$,求 $F''(x)$,其中

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h\left(\int_0^h f(x+s+t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\quad(h>0).$$

(2) 设 $f(u,v)$具有连续偏导数,求 $F'(t)$,其中

$$F(t)=\int_0^t f(x+t,x-t)\mathrm{d}x.$$

(3) 设 $f(u,v)$具有连续偏导数,试证明 $z(F_{xx}''+F_{yy}''-F_{zz}'')=F_z'$,其中

$$F(x,y,z)=\int_0^{2\pi}f(x+z\cos\theta,y+z\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

解 (1) 改写原式为 $F(x)=\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_0^h\left(\int_{x+u}^{h+x+u}f(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$,则(满足求导条件)

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{1}{h^2}\int_0^h[f(h+x+u)-f(x+u)]\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{h^2}\left(\int_{x+h}^{x+2h}f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{x+h}f(u)\mathrm{d}u\right),\\F''(x)&=\frac{1}{h^2}[f(2h+x)-2f(h+x)+f(x)].\end{aligned}$$

(2) 易知满足积分号下求导条件,我们有

$$F'(t)=f(2t,0)+2\int_0^t[f_u'(x+t,x-t)-f_v'(x+t,x-t)]\mathrm{d}x.$$

注意到$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=f_u'(x+t,x-t)+f_v'(x+t,x-t)$,故可得

$$\begin{aligned}&\int_0^t[f_u'(x+t,x-t)-f_v'(x+t,x-t)]\mathrm{d}x\\&=2\int_0^t f_u'(x+t,x-t)\mathrm{d}x-\int_0^t[f_u'(x+t,x-t)+f_v'(x+t,x-t)]\mathrm{d}x\\&=2\int_0^t f_u'(x+t,x-t)\mathrm{d}x-f(x+t,x-t)\Big|_0^t\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^t f_u'(x+t,x-t)\mathrm{d}x - f(2t,0) + f(t,-t).$$

从而我们有 $F'(t) = f(t,-t) + 2\int_0^t f_u'(x+t,x-t)\mathrm{d}x$.

(3) 注意到命题满足积分号下求导的条件,故可得

$$F_{xx}'' = \int_0^{2\pi} f_{11}''(x+z\cos\theta, y+z\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$F_{yy}'' = \int_0^{2\pi} f_{22}''(x+z\cos\theta, y+z\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$F_z' = \int_0^{2\pi} [f_1'(x+z\cos\theta, y+z\sin\theta)\cos\theta + f_2'(x+z\cos\theta, y+z\sin\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta,$$

$$F_{zz}'' = \int_0^{2\pi} [(f_{11}''\cos\theta + f_{12}''\sin\theta)\cos\theta + (f_{21}''\cos\theta + f_{22}''\sin\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta,$$

$$\begin{aligned} F_{xx}'' + F_{yy}'' - F_{zz}'' &= \int_0^{2\pi} [f_{11}''\sin^2\theta - 2f_{12}''\sin\theta\cdot\cos\theta + f_{22}''\cdot\cos^2\theta]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f_1'\sin\theta - f_2'\cos\theta) + \frac{1}{z}(f_1'\cos\theta + f_2'\sin\theta) \right] \mathrm{d}\theta \\ &= 0 + F_z'/z. \end{aligned}$$

例 5.1.9　解答下列问题:

(1) 试求积分 $f(x) = \int_0^x y^n(x-y)^m \mathrm{d}y \quad (n, m \in \mathbf{N})$.

(2) $f(x)$在$(-\infty,\infty)$上任意次可导,试证明

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1} \quad (n\in\mathbf{N}, x_0\in\mathbf{R}^1).$$

(3) 设 $f \in C(\mathbf{R}^2)$, $F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t$,试求 $F^{(n)}(x)$.

(4) 设求积分$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$.

解　(1) 在积分号下求导,我们有

$$f'(x) = \int_0^x my^n(x-y)^{m-1}\mathrm{d}y, \quad f^{(m)}(x) = \frac{m!}{n+1}x^{n+1}.$$

由此易得 $f(x) = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}x^{m+n+1}$.

(2) 作 f 在 x_0 处的积分余项的 Taylor 公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\mathrm{d}t.$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1}+\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{R_{n+1}(x)}{x-x_0}\right)$$
$$=\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{n+1}+\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k R_{n+1}^{(k)}(x)\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{(x-x_0)^{n-k+1}}.$$

故只需指出$\lim\limits_{x\to x_0}R_{n+1}^{(k)}(x)/(x-x_0)^{n+1}=0(k=0,1,2,\cdots,n)$.为此,用积分号下求导公式,我们有

$$R_{n+1}^{(k)}(x)=\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}R'_{n+1}(x)=\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}}\left[\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+2)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t\right]$$
$$=\cdots=\frac{1}{(n+1-k)!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1-k}\mathrm{d}t.$$

由此即可得证.

(3) $f(t)(x-t)^{n-1}$在$\mathbf{R}^2$上对x连续可导任意次,故能在积分号下求导:

$$F'(x)=\int_0^x f(t)(n-1)(x-t)^{n-2}\mathrm{d}t,$$

$$\cdots\cdots$$

$$F^{n-1}(x)=(n-1)(n-2)\cdots1\cdot\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$F^{(n)}(x)=n!f(x)\quad(x\in\mathbf{R}^2).$$

(4) 在积分号下求导,得$F'(x)=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{x\cos\theta}\cos(\theta+x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$.由归纳法,可知

$$F^{(n)}(x)=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{x\cos\theta}\cdot\cos(n\theta+x\sin\theta)\mathrm{d}\theta. \qquad ①$$

从而导出$F^{(n)}(0)=0(n=1,2,\cdots)$.因此根据 Taylor 公式,我们有

$$F(x)-F(0)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{F^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\frac{F^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\quad(0<\theta<1).$$

注意到由式①可得$|F^{(n)}(\theta,x)|\leqslant\mathrm{e}^x\cdot2\pi$,故知

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{F^{(n)}(\theta,x)}{n!}x^n\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi\mathrm{e}^x}{n!}x^n=0,\quad F(x)\equiv F(0)=2\pi.$$

例 5.1.10 试证明下列命题:

(1) 设有椭圆积分$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi(0<k<1)$,则

$$E''(k)+E'(k)/k+E(k)/(1-k^2)=0.$$

(2) 设(Bessel 函数)$I_n(x)=\dfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi(n\in\mathbf{Z})$,则

$$x^2I''_n(x)+xI'_n(x)+(x^2-n^2)I_n(x)=0. \qquad \text{(Bessel 方程)}$$

证明 (1) 首先,设$0<k_1\leqslant k\leqslant k_2<1$.且记

$$F(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\quad(0<k<1),$$

易知 $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$与 $k\sin^2\varphi/\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$在闭区域 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$,$k_1\leqslant k\leqslant k_2$ 上连续,从而可在积分号下求导,我们有

$$E'(k)=-\int_0^{\pi/2}\frac{k\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad E'(k)=\frac{E(k)-F(k)}{k}.$$

应用分部积分公式,可知

$$E'(k)=k\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\varphi\mathrm{d}\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=-\int_0^{\pi/2}\frac{k\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$
$$=-k\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}}+k\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}}.$$

注意到 $F'(k)=k\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$,$[kF(k)]'=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$,故得

$$E'(k)-F'(k)=-k[kF(k)]'.$$

由此又可得

$$F'(k)=E(k)/k(1-k^2)-F(k)/k. \quad ①$$

引用 $E'(k)=[E(k)-F(k)]/k$,我们有

$$F(k)=E(k)-kE'(k),\quad F'(k)=-kE''(k).$$

代入式①,即得

$$E''(k)+E'(k)/k+E(k)/(1-k^2)=0\quad(k_1\leqslant k\leqslant k_2).$$

其次,因为 k_1 与 k_2 可充分接近于 0 与 1,所以命题得证.

(2)易知可进行积分号下求导运算,再用分部积分法,可得

$$\begin{aligned}I_n'(x)&=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(n\varphi-x\sin\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\varphi\cdot\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\sin^2\varphi)\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\varphi\cdot\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi-xI_n(x)-xI_n''(x).\end{aligned}\quad ②$$

注意到$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)(n-x\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi=0$,故有

$$\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=nI_n(x).$$

现在,以 x 乘式②两端,并注意上式即可得证.

例 5.1.11 解答下列问题:

(1)求 $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,其中 $f(x)=(x^b-x^a)/\ln x(0<x<1)$,$f(0)=0$,$f(1)=b-a(b>a>0)$.

(2)设 $f\in C^{(n)}(\mathbf{R}^1)(n\geqslant1)$,令

$$g(x)=\begin{cases}[f(x)-f(a)]/(x-a), & x\neq a,\\ f'(a), & x=a,\end{cases}$$

试证明 $g\in C^{(n-1)}(\mathbf{R}^1)$,并求 $g^{(n-1)}(a)$,

解　(1)注意到 $\dfrac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\mathrm{d}y$,故知 $I=\int_0^1\left[\int_a^b x^y\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$.因为 x^y 在矩形$[0,1]\times[a,b]$上连续,所以可交换积分次序.从而有

$$I=\int_a^b\left[\int_0^1 x^y\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\frac{x^{1+y}}{1+y}\bigg|_0^1\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+y}=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

(2)因为我们有

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=(x-a)\int_0^1 f'[a+y(x-a)]\mathrm{d}y,$$

所以可得

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\int_0^1 f'[a+y(x-a)]\mathrm{d}y\quad(x\neq a).$$

注意到 $x=a$时,上式右端为 $f'(a)$,故知 $g(x)=\int_0^1 f'[a+y(x-a)]\mathrm{d}y$.

由此易得 $g\in C^{(n-1)}(\mathbf{R}^1)$,实际上,还有

$$g^{(n-1)}(x)=\int_0^1 y^{n-1}f^{(n)}[a+y(x-a)]\mathrm{d}y,$$

$$g^{(n-1)}(a)=f^{(n)}(a)\int_0^1 y^{n-1}\mathrm{d}y=f^{(n)}(a)/n.$$

5.2　含参变量的反常积分

设函数 $f(x,y)$在无界矩形 $a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y<+\infty$上定义,若对每一个 $x\in[a,b]$,无穷积分

$$I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\qquad①$$

都收敛,则积分值可以看成是定义在$[a,b]$上的函数.

定义 5.2.1　若任给 $\varepsilon>0$,存在 $A_0=A_0(\varepsilon)>c$,当 $A>A_0$ 时,对一切 $x\in[a,b]$,成立 $\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$.则称$\int_c^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$关于 x 在$[a,b]$上一致收敛.

这里 x 取值区间$[a,b]$可以代之以(a,b)、$(a,+\infty)$,甚至一般的点集 E,就有无穷积分关于 x 在 E 上一致收敛概念.类似可定义含参变量瑕积分的一致收敛性.若函数 $f(x,y)$在 $y=c,x\in[a,b]$邻域内无界,则称$\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$为含参变量 x 的瑕积分.对瑕积分$\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$关于 x 在$[a,b]$上一致收敛定义为:任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,当 $c<c'<c+\delta$时,对一切的 $x\in[a,b]$,成立$\left|\int_c^{c'}f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$.

下面我们只陈述无穷积分情形,这里的每一个定理,相应地就有一个关于瑕积分的定理.

定理 5.2.1(一致收敛原理) 无穷积分①在 E 上一致收敛的充要条件是:任给 $\varepsilon>0$,存在 $A_0>c$,当 $A,A'>A_0$ 时,对一切的 $x\in E$,均有 $\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$.

定理 5.2.2(Weierstrass 判别法) 设有连续函数 $F(y)$,使得

$$|f(x,y)|\leqslant F(y)\quad (x\in E,c\leqslant y<+\infty),\qquad \int_c^{+\infty} F(y)\mathrm{d}y<+\infty,$$

则无穷积分$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在集合 E 上一致收敛.

注 能用 Weierstrass 判别法判别一致收敛的参变积分,事实上一定是绝对一致收敛的.对非绝对一致收敛的参变积分,需用下面判别法.

定理 5.2.3(Dirichlet 判别法) 设(i)存在正常数 M,对任意的 $x\in E$,当 $A\geqslant c$ 时,有 $\left|\int_c^{A} f(x,y)\mathrm{d}y\right|\leqslant M$;(ii)对任意固定的 $x\in E$,$g(x,y)$是 y 的单调函数,当 $y\to+\infty$时,$g(x,y)$关于 $x\in E$ 一致趋于零(任给 $\varepsilon>0$,存在 $A_0>c$,当 $y>A_0$ 时,对任意的 $x\in E$,均有 $|g(x,y)|<\varepsilon$),则积分

$$\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y \tag{②}$$

关于 x 在 E 上一致收敛.

定理 5.2.4(Abel 判别法) 设(i)积分$\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在 E 上一致收敛;(ii)函数 $g(x,y)$ 对任意固定的 $x\in E$ 是 y 的单调函数,且存在 $M>0$,对任意的 $y\geqslant c$ 和 $x\in E$,有

$$|g(x,y)|\leqslant M.$$

则积分②关于 x 在 E 上一致收敛.

定理 5.2.5 设 $f(x,y)$在 $a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y<+\infty$上连续,且积分 $I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$关于 x 在$[a,b]$上一致收敛,则 $I(x)$在$[a,b]$上连续,且有

$$\int_a^b\left[\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}\left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

定理 5.2.6 设 $f(x,y),f_x(x,y)$在 $a\leqslant x\leqslant b,y\geqslant c$上连续,积分$\int_c^{+\infty} f(x_0,y)\mathrm{d}y(x_0\in[a,b])$收敛,积分 $\varphi(x)=\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在$[a,b]$上一致收敛到 $\varphi(x)$,则

$$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

关于 x 在$[a,b]$上一致收敛到 $I(x)$,且有

$$I'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y.$$

定理 5.2.7 设 $f(x,y)$在 $a\leqslant x\leqslant b,y\geqslant c$ 上连续且非负,对任意的 $x\in[a,b]$,积分 $I(x)=\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 收敛,且 $I(x)\in C[a,b]$.则上述积分关于 x 在$[a,b]$上一致收敛.

定理 5.2.8 设(i)$f(x,y)$在 $x\geqslant a,y\geqslant c$ 上连续;

(ii) 积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上的任一有界闭区间 $[a,B]$ 上一致收敛(称关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上内闭一致收敛);

(iii) 积分 $\int_A^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,+\infty)$ 上内闭一致收敛;

(iv) 积分 $\int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$ 与 $\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$ 有一个存在,则有

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

定理 5.2.9 设 $f(x,y)$ 在 $x\geqslant a,y\geqslant c$ 上连续、非负,积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 是 $y\geqslant c$ 上的连续函数,积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 是 $x\geqslant a$ 上的连续函数,又积分

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \quad 与 \quad \int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

有一个存在,则

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

例 5.2.1 设 $f(x,y)$在$[a,\infty)\times[\alpha,\beta]$上连续.若积分 $I=\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 对 $y\in(\alpha,\beta)$ 上一致收敛,试证明 I 对 $y\in[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

证明 依题设知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 X_0:$X_0\geqslant a$,使得

$$\left|\int_{X'}^{X''} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \quad (X',X''\geqslant X_0,\alpha<y<\beta).$$

注意到 f 的连续性,我们令 $y\to\alpha$ 与 $y\to\beta$,可得

$$\left|\int_{X'}^{X''} f(x,\alpha)\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon,\quad \left|\int_{X'}^{X''} f(x,\beta)\mathrm{d}x\right|\leqslant\varepsilon.$$

由此即可得证.

例 5.2.2 试证明下列命题:

(1) $I(y)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$ 对 $y\in(0,\infty)$ 不一致收敛.

(2) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$ 对 $\alpha\in(0,1)$ 不一致收敛.

(3) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha^2 x}\sin x\mathrm{d}x$ 对 $\alpha\in(0,1)$ 不一致收敛.

(4) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x$ 对 $\alpha\in(0,\infty)$ 不一致收敛.

(5) $I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x$ 对 $y\in(0,\infty)$ 不一致收敛.

(6) $I(y)=\int_0^{+\infty}\dfrac{x\sin xy}{y(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 对 $y\in(0,\infty)$ 不一致收敛.

证明　(1) 注意到$\int_A^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x=\int_{yA}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,故有

$$\lim_{y\to 0}\int_{yA}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

这说明不一致收敛.

(2) 注意 $I(0)=\int_0^{+\infty}1\mathrm{d}x$ 发散,故得所证.

(3) 注意 $I(0)=\int_0^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ 发散,故得所证.

(4) 注意到 $J(A)=\int_A^{2A}\sqrt{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{\alpha}A}^{2\sqrt{\alpha}A}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\geqslant\sqrt{\alpha}A\,\mathrm{e}^{-2\cdot\alpha A^2}$,则取 $\alpha=(1/A)^2$,则 $J(A)\geqslant\mathrm{e}^{-2}$.证毕.

(5) 注意到 $J(A)=\int_A^{2A}\mathrm{e}^{-(x-y)^2}\mathrm{d}x=\int_{A-y}^{2A-y}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,并让 y 取 A 值,则得 $J(A)=\int_0^A\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\to\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t(A\to+\infty)$.即 $J(A)$ 在 $A\to+\infty$ 时不趋于 0.证毕.

(6) 注意$\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{x\sin xy}{y(1+x^2)}=\frac{x^2}{1+x^2}$,以及$\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^2}=+\infty$.

例 5.2.3　试证明下列命题(用定义):

(1) $I(t)=\int_0^{+\infty}\sin t\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in(0,\infty)$ 一致收敛.

(2) $I(t)=\int_1^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t/2x^2}/x^3\mathrm{d}x$ 关于 $t\in(0,\infty)$ 不一致收敛.

(3) $I(y)=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}\left(x-\frac{1}{y}\right)^2}\mathrm{d}x$ 关于 $y\in(0,1)$ 一致收敛.

证明　(1) 对积分用变量替换$\sqrt{t}x\sim x$,可知

$$I_A(t)=\int_A^{+\infty}\sin t\cdot\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x=\frac{\sin t}{t}\int_A^{+\infty}t\cdot\mathrm{e}^{-tx^2}\mathrm{d}x=\frac{\sin t}{t}\cdot\sqrt{t}\int_{A\sqrt{t}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

对任给 $\varepsilon>0$,易知存在 $\delta>0$,可得$\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\triangleq M\right)$

$$|I_A(t)|\leqslant\left|\frac{\sin t}{t}\sqrt{\delta}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant M\sqrt{\delta}<\varepsilon\quad(\sigma<t\leqslant\delta).$$

对于 $t>\delta$,又有

$$|I_A(t)|\leqslant\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\int_{A\sqrt{t}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{\delta}}\int_{A\sqrt{\delta}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

注意到上式右端积分的收敛性,即知 $|I_A(t)|\to 0(A\to+\infty)$.由此即得所证.

(2) 直接计算积分,可得($A>1$)

$$I_A(t)=\int_A^{+\infty}\frac{t}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}\Big|_A^{+\infty}=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2A^2}}.$$

由此可知 $\lim\limits_{A\to+\infty} I_A(t)=1$，即得所证．

(3) 注意到 $A=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<+\infty$，故对任给 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，使得 $\int_X^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<\varepsilon$．取 B：$B>2A/\varepsilon+X$，并对积分 $I_B(y)=\int_B^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-1/y)^2/y^2}\mathrm{d}x$ 作变量替换 $t=\left(x-\dfrac{1}{y}\right)\Big/y$，可得 $I_B(y)=y\int_{(B-1/y)/y}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$．

(i) 对 $0<y\leqslant\varepsilon/2A$，有 $I_B(y)\leqslant y\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=2Ay<\varepsilon$；

(ii) 对 $\varepsilon/2A<y<1$，有

$$I_B(y)\leqslant\int_{(B-1/y)/y}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<\int_{B-2A/\varepsilon}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<\int_X^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

由此即得所证．

例 5.2.4 试证明下列命题(用 Weierstrass 判别法)：

(1) $I=\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 关于 $\alpha\in[\alpha_0,\infty)$ 一致收敛，其中 $\alpha_0>1$．

(2) $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\cos(\alpha x)\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in(-\infty,\infty)$ 一致收敛．

(3) $I=\int_1^{+\infty}\dfrac{(\ln x)^p}{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 关于 $p\in[0,10]$ 一致收敛．

(4) $I=\int_1^{+\infty}\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[0,\infty)$ 一致收敛．

(5) $I=\int_1^{+\infty}\cos(xy)\cdot\dfrac{\ln(1+x^2/y)}{\sqrt{1+yx^4}}\mathrm{d}y$ 关于 $x\in[0,\infty)$ 一致收敛．

证明 (1) 注意 $1/x^\alpha\leqslant 1/x^{\alpha_0}$，$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha_0}}$ 收敛．

(2) 注意 $|\mathrm{e}^{-3x}\cos(\alpha x)|\leqslant\mathrm{e}^{-3x}$，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x$ 收敛．

(3) 注意 $\dfrac{\ln^p x}{x\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{\ln^{10}x}{\sqrt[4]{x}}\cdot\dfrac{1}{x\cdot\sqrt[4]{x}}\leqslant M\cdot\dfrac{1}{x^{5/4}}$，$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^{5/4}}$ 收敛．

(4) 注意 $\left|\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2}\right|=\dfrac{1}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{1}{x^2}$，$\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛．

(5) 记 $g(x,y)=x^2/\sqrt{1+yx^4}$，则被积函数 $f(x,y)$ 有估计

$$|f(x,y)|=\left|\cos(xy)\cdot\frac{\ln(1+x^2/y)}{\sqrt{1+yx^4}}\right|\leqslant\frac{1}{y}\,\frac{x^2}{\sqrt{1+yx^4}}=\frac{1}{y}g(x,y).$$

由 $g_x'(x,y)=2x/(1+yx^4)^{3/2}>0\ (x>0)$ 可知，$g(x,y)$ 是 x 的递增函数，且有

$$\lim_{x\to+\infty}g(x,y)=\lim_{x\to+\infty}x^2/\sqrt{1+yx^4}=1/\sqrt{y}\quad(y\geqslant1).$$

这说明我们可得估计

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{y}g(x,y)\leqslant\frac{1}{y\sqrt{y}},\quad\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{y}}<+\infty.$$

由此即得所证.

例 5.2.5 试证明下列命题:

(1) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\sin x^{\alpha}\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\geqslant\alpha_0>1$ 一致收敛.

(2) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[a,b]$ 一致收敛,其中 $0\,\overline{\in}\,[a,b]$.

(3) $I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{x\sin(\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 一致收敛.

(4) 设对任意的 $B>0$,$f\in R([0,B])$.若有

$$\sup\left\{\left|\int_0^B\mathrm{e}^{-\alpha_0x}f(x)\mathrm{d}x\right|:0\leqslant B<\infty\right\}<+\infty,$$

则 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}f(x)\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[\alpha_1,\infty)$ 一致收敛,其中 $\alpha_1>\alpha_0>0$.

(5) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin\alpha x/x\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[\alpha_0,\infty)(\alpha_0>0)$ 一致收敛.

证明 (1) 令 $f(x,\alpha)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}\cdot\sin x^{\alpha}$,$g(x,\alpha)=1/\alpha x^{\alpha-1}$,有

$$\left|\int_1^A f(x,\alpha)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_1^A\sin x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\alpha}\right|\leqslant 2,\quad g(x,\alpha)\leqslant\frac{1}{\alpha_0x^{\alpha_0-1}}.$$

易知对 $\alpha\geqslant\alpha_0$,$g(x,\alpha)$随 $x\to+\infty$递减趋于 0,且关于 α一致.从而由 Dirichlet 判则即得所证.(注意,$\sin x^{\alpha}=f(x,\alpha)\cdot g(x,\alpha)$.)

(2) 易知 $1/x$ 当 $x\to+\infty$时关于 α是一致单调趋于 0 的,而不定积分 $\left|\int_0^x\sin\alpha t\mathrm{d}t\right|=|(1-\cos\alpha x)/\alpha|\leqslant 2/\min(|a|,|b|)$.由 Dirichlet 判别法即可得证.

(3) 由于当 $x\to+\infty$ 时,函数$\frac{x}{1+x^2}$是关于 α一致单调趋于 0 的,又有 $\int_1^A\sin\alpha x\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{\alpha_0}$,故根据 Dirichlet 判则,即得所证.

(4) 将原式写为 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha-\alpha_0)x}\cdot\mathrm{e}^{-\alpha_0x}f(x)\mathrm{d}x$,注意到 $\mathrm{e}^{-(\alpha-\alpha_0)x}$当 $x\to+\infty$时关于 $\alpha\geqslant\alpha_1>\alpha_0$ 一致单调趋于 0,以及题设,则依 Dirichlet 判别法即可得证.

(5) 因为$\left|\int_0^A\sin\alpha x\mathrm{d}x\right|=|(1-\cos\alpha A)/\alpha|\leqslant 2/\alpha_0$,以及函数 e^{-x}/x 在 $x\to+\infty$时单调一致趋于 0,所以根据 Dirichlet 判别法即得所证.

例 5.2.6 试证明下列命题:

(1) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x\,\mathrm{d}x}{x(1+\alpha x^2)}$关于 $\alpha\in[0,\infty)$一致收敛.

(2) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin 2x}{x+\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$关于 $\alpha\in(0,1)$一致收敛.

(3) 设 $0<p<2$,则 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$关于 $\alpha\in[0,\infty)$一致收敛.

证明　(1) 因为$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$关于 α 一致收敛,又函数 $1/(1+\alpha x^2)$对 x 单调且一致界于 1,所以,根据 Abel 判别法即得所证.

(2) (i) 注意到 $\sin 2x$ 的原函数有界,以及 $1/(x+\alpha)$递减一致趋于 $0(x\to+\infty$, $|1/(x+\alpha)|\leqslant 1/x)$.故根据 Dirichlet 判则,知积分$\int_0^{+\infty}\sin 2x/(x+\alpha)\mathrm{d}x$关于 $\alpha\in(0,1)$一致收敛.

(ii) 易知 $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 随 x 单调,且 $|\mathrm{e}^{-\alpha x}|\leqslant 1$.

综合以上所述依 Abel 判则即得所证.

(3) 易知$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$收敛,$\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 对 x 单调一致有界,由 Abel 判别法即得所证.

例 5.2.7　解答下列问题:

(1) 试证明 $\lim\limits_{y\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^y}\mathrm{d}x=1$.

(2) 试证明$\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$.

(3) 已知积分$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[M,\infty)$ 一致收敛$(M>0)$,且积分$\int_a^{+\infty}\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 收敛.试问是否成立等式

$$\lim_{y\to+\infty}\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

解　(1) 对 x 的不同取值,可得极限

$$\lim_{y\to+\infty}\mathrm{e}^{-x^y}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 1/\mathrm{e}, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

由此可知在整个区域内上述收敛是不一致的.

现在,分三个区段来求极限,易知其极限和积分可交换次序.我们有

$$\lim_{y\to+\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{-x^y}\mathrm{d}x=\int_0^1 1\mathrm{d}x=1,$$

$$\lim_{y\to+\infty}\int_1^2\mathrm{e}^{-x^y}\mathrm{d}x=\int_1^2 0\mathrm{d}x=0,$$

$$\lim_{y\to\infty}\int_2^{+\infty} e^{-x^y}\,dx=\int_2^{+\infty}0\,dx=0.$$

从而得证.

(2)(i)已知$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}$,以及

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)x=\frac{1-\cos 2nx}{2\sin x}=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}\quad(x\neq 0,\pm\pi,\cdots),$$

由此可得$\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}$.

(ii)用替换 $y=nx$,由上述积分可知$\int_0^{n\pi/2}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\left[\frac{y/n}{\sin(y/n)}\right]^2dy=\frac{\pi}{2}$. 令

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{x/n}{\sin(x/n)}\right)^2, & 0<x\leqslant n\pi/2,\\ 0, & x>n\pi/2,\end{cases}$$

则$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ (\sin x/x)^2, & x>0,\end{cases}$且关于 $x\in[0,a]$一致收敛.注意到 $\sin x/x>2/\pi(0<x<\pi/2)$,又有 $f_n(x)<\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{\pi^2}{4}(x>0)$.

因为$\int_0^{+\infty}(\sin x/x)^2dx<+\infty$,所以$\int_0^{+\infty}f_n(x)dx$一致收敛.这说明

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\left(\frac{y/n}{\sin(y/n)}\right)^2dy\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(y)dy=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}f_n(y)dy=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2dy.\end{aligned}$$

(3)不一定成立!例如 $I=\int_0^{+\infty}\sqrt{y}e^{-yx^2}dx$,易知 I关于 $y\in[1,\infty)$一致收敛,且有$\sqrt{y}e^{-yx^2}\to 0(y\to+\infty)$,但是

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{y}e^{-yx^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\neq 0=\int_0^{+\infty}\lim_{y\to\infty}\sqrt{y}e^{-yx^2}dx.$$

例 5.2.8　试证明下列命题:

(1)设 $f\in C([0,\infty))$且 $|f(x)|\leqslant M(0\leqslant x<\infty)$,则

$$I=\lim_{y\to 0^\pm}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)dx}{x^2+y^2}=\pm f(0).$$

(2)设 $f(x)$是$(0,\infty)$上的非负连续函数,且$\int_0^{+\infty}f(x)dx$收敛,则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}n\cdot\ln\left(1+\frac{f(x)}{n}\right)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

(3) 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上可积,则

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)dx=\int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

(4) 设 $f(x)$是$[0,A]$上的单调函数,则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin\lambda x}{x}f(x)dx=\frac{\pi}{2}f(0^+).$$

证明 (1) 作变量替换 $x=ty(t>0,y>0)$,则有

$$I=\lim_{y\to 0^+}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(ty)}{t^2+1}dt.$$

注意到 $|f(ty)|/(t^2+1)\leqslant M/(1+t^2)$,$\int_0^{+\infty}1/(t^2+1)dt=\pi/2$ 以及 f 连续,故当 $y\to 0^+$ 时,$f(ty)/(1+t^2)$在每个区间(a,b)上一致收敛于 $f(0)/(1+t^2)$.故

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{f(ty)}{1+t^2}dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\lim_{y\to 0^+}\frac{f(ty)}{1+t^2}dt=f(0).$$

此外,注意到积分关于 y 的奇性,立即导出

$$\lim_{y\to 0^-}\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx=-f(0).$$

(2) 考察带参变量 t 的积分

$$F(t)=\int_0^{+\infty} t\ln\left[1+\frac{f(x)}{t}\right]dx\quad(t\geqslant 1).$$

因为当 $t\to+\infty$时,$t\ln[1+f(x)/t]$递增趋于 $f(x)$,所以根据 Weierstrass 判别法,可知积分 $F(t)$关于 $t\in[1,\infty)$一致收敛,从而由 $f(x)$的连续性,即知极限

$$\lim_{t\to+\infty}t\ln[1+f(x)/t]=f(x)$$

是关于 $x\in[\delta,A](0<\delta<A<\infty)$一致的.证毕.

(3) 估计两个积分之差,我们有$(X>0)$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}f(x)dx-\int_0^{+\infty} f(x)dx&=\int_0^{+\infty}(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx\\&=\int_0^X(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx+\int_X^{+\infty}(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx.\end{aligned}$$

(i) 注意 $e^{-\alpha x}-1$ 对 $x\geqslant 0$ 是单调的且一致有界于1,而积分$\int_0^{+\infty}f(x)dx$是关于 α一致收敛,故对任给 $\varepsilon>0$,存在充分大的 X,使得

$$\left|\int_X^{+\infty}(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\alpha\geqslant 0).$$

(ii) 对取定的 Z,令 $M=\sup\{|f(x)|:0\leqslant x\leqslant X\}\neq 0$,可取 $\alpha:0\leqslant\alpha\leqslant\ln[2MX/(2MX-\varepsilon)]/X,0<\varepsilon<2MX$,使得

$$\left|\int_0^X(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx\right|\leqslant(1-e^{-\alpha X})MX<\frac{\varepsilon}{2}.$$

综合上述结果,即可得证.

(4) 不妨假定 $f(x)$递增,则 $\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0^+)$,故对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得 $0\leqslant f(\delta)-f(0^+)<\varepsilon$. 注意,$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$,并考察两个积分之差,可得(应用第二积分中值公式)

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^A[f(x)-f(0^+)]\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\left(\int_0^\delta+\int_\delta^A\right)[f(x)-f(0^+)]\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant[f(\delta)-f(0^+)]\left|\int_{\xi_1}^\delta\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x\right|+[f(A)-f(0^+)]\left|\int_{\xi_2}^A\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\varepsilon\left|\int_{\lambda\xi_1}^{\lambda\delta}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|+[f(A)-f(0^+)]\left|\int_{\lambda\xi_2}^{\lambda A}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|,\quad 0<\xi_1<\delta<\xi_2<A.\end{aligned}$$

现在令 $g(s)=\int_0^s\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,并假定 $|g(s)|\leqslant M$,又取 N,使得

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon\quad(A''>A'\geqslant N).$$

从而我们有($\lambda\geqslant N/\delta$)

$$\left|\int_0^A[f(x)-f(0^+)]\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant2M\varepsilon+[f(A)-f(0^+)]\varepsilon.$$

由此即可得证.

例 5.2.9　解答下列问题:

(1) 设 $f(x)$是$[0,1]$上的正值连续函数,试求极限 $I=\lim_{p\to-\infty}\left(\int_0^1f^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}$.

(2) 设定义在 $D:a\leqslant x<\infty,y_0-\delta\leqslant y\leqslant y_0+\delta(\delta>0)$上的 $f(x,y)$满足

(i) 对任意的区间$[a,b]$,当 $y\to y_0$ 时 $f(x,y)$关于 $x\in[a,b]$一致收敛于 $f(x,y_0)$.

(ii) 对 $y\in[y_0-\delta,y_0+\delta]$,积分$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$存在,且有 $|f(x,y)|\leqslant F(x)((x,y)\in D)$,$\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x<+\infty$,则

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim_{y\to y_0}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x.$$

(3) 设对任意的 $A>0$,有 $f\in R([0,A])$,且有 $f(x)=o(1/x)(x\to+\infty)$.若 $F(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}f(x)\mathrm{d}x$ 对 $t>0$ 收敛,且存在$\lim_{t\to0^+}F(t)=L$,则$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=L$.

解　(1) (i) 若对某个 $g\in C([0,1])$且正值,令 $\max\{g(x):0\leqslant x\leqslant1\}=g(x_0)(x_0\in[0,1])$,则一方面有

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1 g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant g(x_0);$$

另一方面,对任给 $\varepsilon>0$,存在包含 x_0 的区间 I_δ:$I_\delta\subset[0,1]$,使得 $g(x)>g(x_0)-\varepsilon(x\in I_\delta)$.从而有

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1 g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\geqslant\lim_{p\to+\infty}\left(\int_{I_\delta} g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}\geqslant\lim_{p\to+\infty}(g(x_0)-\varepsilon)|I_\delta|^{1/p}$$

$$=g(x_0)-\varepsilon\quad(|I_\delta|\text{表示区间 }I_\delta\text{ 的长度}).$$

由 ε的任意又知

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1 g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}=g(x_0).$$

这说明$\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\int_0^1 g^p(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p}=g(x_0)$.

(ii) 根据(i)式推理,易知

$$I=\lim_{p\to+\infty}\left(\int_0^1\frac{1}{f^p(x)}\mathrm{d}x\right)^{-1/p}=\lim_{p\to+\infty}1\Big/\left(\int_0^1\frac{1}{f^p(x)}\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

$$=1\Big/\max_{[0,1]}\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}=\min_{[0,1]}\{f(x)\}.$$

(2) 考察两个积分的差,即($X>a$)

$$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^X[f(x,y)-f(x,y_0)]\mathrm{d}x+\int_X^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_X^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x.$$

对任给 $\varepsilon>0$,由(ii)知对充分大的 X,有

$$\left|\int_X^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_X^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{3},\quad\left|\int_X^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

而由(i)又知,当$|y-y_0|$充分小时,有估计

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon/3(X-a)\quad(a<x<X).$$

这说明当$|y-y_0|$充分小时,可得

$$\left|\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_a^{+\infty}f(x,y_0)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

(3) 只需指出$\lim\limits_{t\to0^+}\int_0^{1/t}f(x)\mathrm{d}x=L$,或$\lim\limits_{t\to0^+}\left(\int_0^{1/t}f(x)\mathrm{d}x-F(t)\right)=0$.

易知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得$|xf(x)|<\varepsilon(x\geqslant M)$.又知存在 $\delta>0$,使得

$$\left|\int_0^M f(x)\mathrm{d}x-\int_0^M \mathrm{e}^{-xt}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^M|f(x)|(1-\mathrm{e}^{-tx})\mathrm{d}x<\varepsilon\quad(0<t<\delta).$$

注意到$1-\mathrm{e}^{-xt}\leqslant xt$,故在$0<t<\min\{\delta,1/M\}$时,可得

$$\left|\int_M^{1/t} f(x)\mathrm{d}x - \int_M^{1/t} \mathrm{e}^{-xt} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_M^{1/t} |f(x)|(1-\mathrm{e}^{-xt})\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_M^{1/t} |xf(x)|\, t\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon t(1/t - M) < \varepsilon.$$

此外,我们还有

$$\left|\int_{1/t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon\int_t^{+\infty} x^{-1}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x < \varepsilon\int_1^{+\infty} t^{-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

综合上述推理,最后得出估计

$$\left|\int_0^{1/t} f(x)\mathrm{d}x - F(t)\right| \leqslant \left|\int_0^M f(x)\mathrm{d}x - \int_0^M \mathrm{e}^{-xt} f(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$+ \left|\int_M^{1/t} f(x)\mathrm{d}x - \int_M^{1/t} \mathrm{e}^{-xt} f(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$+ \left|\int_{1/t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(x)\mathrm{d}x\right| < 3\varepsilon.$$

由此即得所证.

例 5.2.10　解答下列问题:

(1) 试论 $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \dfrac{x\mathrm{d}x}{2+x^\alpha}$ 在 $(2,\infty)$ 上的连续性.

(2) 试论 $f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}/|\sin x|^\alpha \mathrm{d}x$ 在 $(0,1)$ 上的连续性.

(3) 试论 $I(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2(1+y^2)}\sin x\mathrm{d}y$ 关于 $x \in (-\infty,\infty)$ 上的一致收敛性.

解　(1) 分解 $F(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha)$,其中

$$f(\alpha) = \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{2+x^\alpha},\quad g(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{2+x^\alpha},$$

易知 $f(\alpha)$在 $(2,\infty)$上连续.对 $g(\alpha)$,先看 $\alpha \geqslant 2+\varepsilon(\varepsilon>0)$的情形;此时,因为

$$\frac{x}{2+x^\alpha} \leqslant \frac{x}{2+x^{2+\varepsilon}} = O\left(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}\right)\quad (x \to +\infty),$$

所以积分 $g(\alpha)$关于 $\alpha \in [2+\varepsilon,\infty)$是一致收敛的,也就是说 $g \in C([2+\varepsilon,\infty))$.其次,注意到 ε的任意性,即知 $g \in C((2,\infty))$.最后得出,$F \in C((2,\infty))$.

(2) 将积分区域分割使无穷积分表成一个级数,再对其中每个小区间上的积分作变量替换,可知

$$f(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{|\sin x|^\alpha}\quad (令\ x = k\pi + t)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k\pi} \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}{\sin^\alpha t} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}{\sin^\alpha t}.$$

因为我们有估计(对 $0<t\leqslant 1$,$0<\varepsilon<1/2$,$\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 1-\varepsilon$)

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^\alpha t} \leqslant \left(\frac{\pi}{2t}\right)^\alpha \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1-\varepsilon} / t^{1-\varepsilon}.$$

所以根据 Weierstrass 判别法,可知积分$\int_0^1 e^{-t}/\sin^\alpha t\mathrm{d}t$关于$\alpha\in[\varepsilon,1-\varepsilon]$一致收敛. 类似地可知,积分$\int_1^\pi e^{-t}/\sin^\alpha t\mathrm{d}t$也在$[\varepsilon,1-\varepsilon]$上一致收敛.

此外,注意到函数 $e^{-t}/\sin^\alpha t$ 在区域$(0<t<\pi)\times(\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant1-\varepsilon)$上连续,故知$f(\alpha)$在$[\varepsilon,1-\varepsilon]$上连续.再由 ε的任意性,即得 $f\in C((0,1))$.

(3)作变量替换,令 $t=|x|y$,可知 $I(x)=(\sin x/|x|)e^{-x^2}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$.得

$$\lim_{x\to0^-}I(x)=-\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t,\quad \lim_{x\to0^+}I(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

这说明 $I(x)$在 $x=0$ 处不连续,即积分 $I(x)$关于 $x\in(-\infty,\infty)$不一致收敛.

例 5.2.11　试证明下列命题:

(1)设 $f(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上有界且连续的函数,令 $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x,y)}{1+y^2}\mathrm{d}y$,则 $F\in C(\mathbf{R}^1)$.

(2)设 $f(x,y)$在$[a\leqslant x<\infty)\times[\alpha\leqslant y\leqslant\beta]$上非负连续,且积分 $F(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\alpha,\beta]$时收敛.若 $F\in C([\alpha,\beta])$,则积分$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[\alpha,\beta]$一致收敛.

(3)设 $f(x,y)$在$[a\leqslant x\leqslant b]\times[c\leqslant y<\infty)$上一致连续,且积分$\int_c^{+\infty}|\varphi(y)|\mathrm{d}y$ 收敛,则 $F(x)=\int_c^{+\infty}\varphi(y)f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上连续.

(4)设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$,且$\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

(i) $F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+x)f(t)\mathrm{d}x$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上连续.

(ii) $\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/4\varepsilon}F(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x$.

证明　(1)设 $x_0\in\mathbf{R}^1$,并估计差$(A>0)$

$$\begin{aligned}|F(x)-F(x_0)|&\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|f(x,y)-f(x_0,y)|}{1+y^2}\mathrm{d}y\\&=\left(\int_{-\infty}^{-X}+\int_{-X}^{X}+\int_X^{+\infty}\right)\frac{|f(x,y)-f(x_0,y)|}{1+y^2}\mathrm{d}y\triangleq\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}.\end{aligned}$$

因为$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}<+\infty$,所以对任给 $\varepsilon>0$,可取 $X>0$,使得

$$|\mathrm{I}|\leqslant2M\int_X^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}<\frac{\varepsilon}{3},\quad|\mathrm{III}|\leqslant2M\int_X^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}<\frac{\varepsilon}{3},$$

其中 $|f(x,y)|\leqslant M((x,y)\in\mathbf{R}^2)$.

对于Ⅱ,注意到 $f(x,y)$在$[x_0-1,x_0+1]\times[-X,X]$上一致连续,故可知存在 δ:$0<\delta<1$,使得

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon/6X\quad(-X\leqslant y\leqslant X,|x-x_0|<\delta).$$

这说明 $|\mathrm{II}|<\varepsilon/3$.

综合上述结果,我们有 $|F(x)-F(x_0)|<\varepsilon(|x-x_0|<\delta)$.即得所证.

(2)令 $F_n(y)=\int_a^n f(x,y)\mathrm{d}x(n\in\mathbf{N})$,易知,$F_n\in C([\alpha,\beta])(n\in\mathbf{N})$,且有

$$F_n(y)\leqslant F_{n+1}(y)\quad(y\in[\alpha,\beta]),\quad\lim_{n\to\infty}F_n(y)=F(y).$$

注意到 $F\in C([\alpha,\beta])$,故根据 Dini 定理即可得证.

(3)记$\int_c^{+\infty}|\varphi(y)|\mathrm{d}y=l$.由 $f(x,y)$的一致连续性可知,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|<\varepsilon$$
$$(a\leqslant x',x''\leqslant b,c\leqslant y',y''<\infty,|x'-x''|<\delta,|y'-y''|<\delta).$$

从而对每一点 $x_0\in[a,b]$且 $|x-x_0|<\delta$时,有

$$\begin{aligned}|F(x)-F(x_0)|&=\left|\int_c^{+\infty}\varphi(y)f(x,y)\mathrm{d}y-\int_c^{+\infty}\varphi(y)f(x_0,y)\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant\int_c^{+\infty}|\varphi(y)||f(x,y)-f(x_0,y)|\mathrm{d}y\\&\leqslant\varepsilon\cdot\int_c^{+\infty}|\varphi(y)|\mathrm{d}y=\varepsilon\cdot l.\end{aligned}$$

由此即可得证.

(4)(i)应用 Cauchy-Schwarz 不等式,可得积分估计式

$$\begin{aligned}\left|\int_{A'}^{A''}f(t+x)f(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\left(\int_{A'}^{A''}f^2(t+x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{A'}^{A''}f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\\&\leqslant\frac{1}{2}\left(\int_{A'}^{A''}f^2(t+x)\mathrm{d}x+\int_{A'}^{A''}f^2(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}\int_{A'+t}^{A''+t}f^2(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{A'}^{A''}f^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}\qquad①$$

由此可知对任意的区间$[a,b]$,积分

$$\int_0^{+\infty}f(t+x)f(x)\mathrm{d}x,\quad\int_{-\infty}^0 f(t+x)f(x)\mathrm{d}x$$

关于 $t\in[a,b]$是一致收敛的,故 $F\in C(\mathbf{R}^1)$.在式 ① 中,我们令 $A'\to-\infty$,$A''\to+\infty$,还可得 $|F(t)|\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x<+\infty$.

(ii)对积分作变量替换 $x=t/2\sqrt{\varepsilon}$,可得

$$\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/4\varepsilon}F(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} F(2\sqrt{\varepsilon}x)\mathrm{d}x.$$

易知上式右端积分关于 $\varepsilon\in[0,1]$一致收敛,因此我们有

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} F(2\sqrt{\varepsilon}x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(0)e^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &= F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 5.2.12 解答下列问题:

(1)(Fresnel 积分)求 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$.

(2)(Laplace 积分)$L(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(3)试求下列积分值

(i) $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x$. (ii) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

(iii) $I(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{ax^2+2bx+c}\mathrm{d}x\,(a>0,ac-b^2>0)$.

解 (1)令 $x^2=t$,则 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.应用$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2t}\mathrm{d}x$,可得

$$\begin{aligned}I&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\sin t\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2t}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}e^{-x^2t}\sin t\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\end{aligned}$$

其中用到变换积分次序(可以进行),以及积分公式$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2}$.

(2)注意到$\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}\mathrm{d}y=\frac{1}{1+x^2}$,故可得

$$L(\alpha)=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x\left(\int_0^{+\infty}e^{-y(1+x^2)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

再引入因子 e^{-kx^2}($k>0$),并考察积分

$$L^*(k,\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\mathrm{d}y.$$

易知 $f(x,y)\triangleq e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x$ 在区域$[0,\infty)\times[0,\infty)$上连续,且有估计

$$|e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x|\leqslant e^{-y},\quad |e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x|\leqslant e^{-kx^2},$$

更注意到积分$\int_0^{+\infty}e^{-y}\mathrm{d}y$,$\int_0^{+\infty}e^{-kx^2}\mathrm{d}x$ 收敛,则积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\mathrm{d}y,\quad \int_0^{+\infty}e^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\mathrm{d}x$$

均一致收敛.因此,根据估计

$$\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y-(k+y)x^2}\cos\alpha x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx^2}\mathrm{d}x,$$

即知 $L^*(k,\alpha)$收敛.从而可变换积分次序,我们有

$$L^*(k,\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(k+y)x^2}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x.$$

引用已知结果$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-b^2/4a}(a>0)$,又得

$$L^*(k,\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-[\alpha^2/4(y+k)+y]}/\sqrt{y+k}\,\mathrm{d}y=\sqrt{\pi}\mathrm{e}^k\int_{\sqrt{k}}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda(t)}\mathrm{d}t,$$

其中 $\lambda(t)=\alpha^2/4t^2+t^2$.于是,积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx^2}\cos\alpha x/(1+x^2)\mathrm{d}x$关于$k\geqslant0$一致收敛.因为被积函数是连续的,所以 $L^*(k,\alpha)$对 k 连续.从而导出

$$L(\alpha)=\lim_{k\to0}L^*(k,\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\alpha^2/4t^2+t^2)}\mathrm{d}t,$$

即 $L(\alpha)=\pi\mathrm{e}^{-|\alpha|}/2(\alpha\in\mathbf{R}^1)$.

(3)(i) $I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi(1-\mathrm{e}^{-2})/4$.

(ii)令 $f(y)=\int_0^{+\infty}\cos\alpha x/(y^2+x^2)\mathrm{d}x(|y-1|\leqslant1/2)$,并作变量替换 $x=yt$,用 Laplace 积分符号,有 $f(y)=L(|\alpha|y)/y=\pi\mathrm{e}^{-|\alpha y|}/2y$.对 y 求导,一方面有

$$f'(1)=-2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-2I(\alpha),\quad I(\alpha)=-\frac{1}{2}f'(1);$$

另一方面又有 $f'(1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-|\alpha y|}\right)\Big|_{y=1}$,从而知 $I(\alpha)=\pi(1+|\alpha|)\mathrm{e}^{-|\alpha|}/4$.

(iii)将分母写成完全平方形式,并令$\sqrt{a}x+b/\sqrt{a}=t$,则

$$I(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\alpha t/\sqrt{a})\cdot\cos(\alpha b/a)}{t^2+\lambda^2}\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\alpha t/\sqrt{a})\cdot\sin(\alpha b/a)}{t^2+\lambda^2}\mathrm{d}t,$$

其中 $\lambda^2=c-b^2/a>0$.易知上式第二个积分等于0,而第一个积分可通过 Laplace 积分算出,从而有

$$I(\alpha)=\frac{2}{|\lambda|\sqrt{a}}\cos\frac{\alpha b}{a}\cdot L\left(\frac{|\alpha|}{\sqrt{a}}|\lambda|\right)=\frac{\pi\cos(\alpha b/a)}{\sqrt{a\cos b^2}}\mathrm{e}^{-|\alpha|\sqrt{ac-b^2}/a}.$$

例 5.2.13　试求下列积分值:

(1) $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.　(2) $I(b)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(bx)}{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

(3) $I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$. (4) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为对 a 的求导运算可以在积分号下进行,

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\cos(ax)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-a^2I'(a),\quad I'(a)=\frac{1}{1+a^2},$$

所以 $I(a)=\arctan a+C$.注意到 $I(0)=0$,故知 $I(a)=\arctan a$.

(2) 在积分号下进行求导运算,可得

$$I'(b)=\int_0^{+\infty}\sin(bx)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{b}{1+b^2},\quad I(b)=\frac{1}{2}\ln(1+b^2).$$

(3) 令 $f(\alpha,x)=\frac{\arctan(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$,则 $f'_\alpha(\alpha,x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}(1+\alpha^2x^2)}$.易知 f 以及 f'_α 在 $(1<x<\infty)\times(-\infty<\alpha<\infty)$ 上连续,又注意到

$$\left|\frac{\arctan(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\right|\leqslant\frac{\pi}{2x^2\sqrt{x^2-1}},\quad \frac{1}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}\leqslant\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

故根据 Weierstrass 判别法,即知积分 $\int_1^{+\infty}f(\alpha,x)\mathrm{d}x$, $\int_1^{+\infty}f'_\alpha(\alpha,x)\mathrm{d}x$ 一致收敛.从而我们有

$$I'(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}.$$

作替换 $x=\sec t$,则得 $I'(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+\alpha^2\sec^2 t}$,再作替换 $u=\tan t$,又可得

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2(1+u^2)}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2+\alpha^2u^2}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right).\end{aligned}$$

由此即知 $I(\alpha)=\pi(\alpha-\sqrt{1+\alpha^2})/2+C(\alpha\geqslant 0)$.因为 $I(0)=0$,所以 $C=\pi/2$.最后有

$$I(\alpha)=\pi(\alpha+1-\sqrt{1+\alpha^2})/2\quad(\alpha\geqslant 0),$$
$$I(\alpha)=-\pi(1-\alpha-\sqrt{1+\alpha^2})/2\quad(\alpha\leqslant 0).$$

即 $I(\alpha)=\frac{\pi}{2}(1+|\alpha|-\sqrt{1+\alpha^2})\operatorname{sgn}\alpha\ (|\alpha|<\infty)$.

(4) 注意到 $\left|\frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}$,故 $I\in C^{(1)}([0,\infty))$,且有

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

当 $\alpha>\alpha_0>0$ 时,可得($x/(x^2+1)$递减,用中值公式,$A>1$)

$$J=\int_A^{+\infty}\frac{x\sin(\alpha x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{A}{A^2+1}\int_A^{\xi}\sin\alpha x\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{A}{A+1}\frac{2}{\alpha}<\frac{2}{\alpha_0}.$$

因此，积分$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(\alpha x)}{x^2+1}\mathrm{d}x$关于 $\alpha\in[\alpha_0,\infty)$一致收敛．故 $I(\alpha)$二次连续可导，且有

$$I''(\alpha)=-\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(\alpha x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\pi}{2}+I(\alpha).$$

由此得到 $I''(\alpha)-I(\alpha)=-\pi/2(x\in[0,\infty))$．注意到 $I(0)=0$，$I'(0)=\pi/2$，我们有

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-\alpha}).$$

注　由此例立即可得

(i)$\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x(x^2+a^2)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-ay})$．　(ii)$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi\mathrm{e}^{-ay}}{2a}$．

(iii)$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin xy}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-ay}$．

例 5.2.14　解答下列问题：

(1)试证明 $f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}/(1+t^2)\mathrm{d}t(x>0)$满足方程

$$f(x)-f'(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u/\sqrt{x}\quad(x>0).$$

(2)试求积分 $I(a)=\int_0^{+\infty}(1-\mathrm{e}^{-ax^2})/x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\quad(a>-1)$．

(3)试求积分 $f(a,b)=\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx})\cos mx/x\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0,m\neq0)$．

解　(1)注意到$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t$关于 $x\in[x_0,\infty)(x_0>0)$一致收敛，以及函数 $t^2/(1+t^2)$递减一致有界，故知积分$\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-xt^2}/(1+t^2)\mathrm{d}t$关于 $x\in[x_0,\infty)$一致收敛．从而有

$$f'(x)=\int_0^{+\infty}-\frac{t^2\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

而由$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$即可得证．

(2)注意到 $1-\mathrm{e}^{-ax^2}=ax^2+o(x^4)(x\to0^+)$，故积分 $I(a)$关于 $a>-1$一致收敛．又由计算

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-ax^2}}{\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-(a+1)x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2(a+1)}$$

可知，$I'(a)$关于 $a>a_0>-1$一致收敛，即积分号下求导可以进行．从而可得

$$I(a)=\ln(a+1)/2.$$

(3) 易知积分 $f(a,b)$ 收敛，又由 $(a>a_0>0)$

$$\left|\int_{A'}^{A''}\mathrm{e}^{-ax}\cdot\cos(mx)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{A'}^{A''}\mathrm{e}^{-a_0x}\mathrm{d}x\to 0\quad(A',A''\to+\infty),$$

可知积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos(mx)\mathrm{d}x$ 关于 $a>a_0>0$ 一致收敛．故可在积分号下求导即

$$\frac{\mathrm{d}f(a,b)}{\mathrm{d}a}=\int_0^{+\infty}-\mathrm{e}^{-ax}\cos(mx)\mathrm{d}x=-\frac{a}{a^2+m^2}.$$

从而得 $f(a,b)=-\frac{1}{2}\ln(a^2+m^2)+C$．注意到 $f(b,b)=0$，故有 $C=\ln(b^2+m^2)/2$．这说明 $f(a,b)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+m^2}{a^2+m^2}\right)$．

例 5.2.15　试求下列积分值：

(1) $I(b)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x\ (a>0,b\in\mathbf{R}^1)$．

(2) $I(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x-a/x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\ (a>0)$．

(3) $I(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+a^2/x^2)}\mathrm{d}x\ (a\geqslant 0)$．

解　(1) 令 $f(b,x)=\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx$，则 $f_b'(b,x)=-x\mathrm{e}^{-ax^2}\sin bx$，且易知 f 与 f_b' 均在 $(0\leqslant x<\infty)\times(-\infty<b<\infty)$ 上连续．注意到积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x,\quad\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-ax^2}\sin bx\mathrm{d}x$$

关于 $b\in\mathbf{R}^1$ 是一致收敛的，故 $I(b)$，$I'(b)$ 均在 $(-\infty,\infty)$ 上连续，且有

$$\begin{aligned}I'(b)&=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-ax^2}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\mathrm{e}^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}-\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x\\&=-\frac{b}{2a}I(b).\end{aligned}$$

由此可得 $I'(b)+bI(b)/2a=0$，即 $I(b)=C\mathrm{e}^{-b^2/4a}$．因为有 $I(0)=\sqrt{\pi}/2\sqrt{a}$，所以得

$$I(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-b^2/4a}\quad(-\infty<b<\infty).$$

注　设 $I(b)=\int_0^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2bx\mathrm{d}x$，则有 $(a=1)$ 等式

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}b^{2n}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2bx\mathrm{d}x=(-1)^n2^{2n}\int_0^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2bx\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}b^{2n}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-b^2}\right);$$

$$I(b)=(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}b^{2n}}(\mathrm{e}^{-b^2}).$$

(2) 求导可在积分号下进行，我们有

$$I'(a)=-\int_0^{+\infty}e^{-x-a/x}\frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

令 $x=a/t$,则 $I'(a)=-\int_0^{+\infty}e^{-t-a/t}\frac{dt}{\sqrt{at}}=-\frac{I(a)}{\sqrt{a}}$,从而知 $I(a)=Ce^{-2\sqrt{a}}$.注意到 $I(0)=\int_0^{+\infty}e^{-x}/\sqrt{x}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$,即得 $I(a)=\sqrt{\pi}e^{-2\sqrt{a}}$.

(3) 显然积分 $I(a)$是收敛的,又因为有

$$\left|-\frac{2a}{x^2}e^{-x^2-a^2/x^2}\right|<\frac{2A}{x^2}e^{-x^2-b^2/x^2}\quad(0<b\leqslant a\leqslant A),$$

所以积分 $-\int_0^{+\infty}2ae^{-x^2-a^2/x^2}/x^2dx$ 一致收敛.从而求导可在积分号下进行,得到

$$I'(a)=\int_{-2a}^{+\infty}e^{-x^2-a^2/x^2}/x^2dx\overline{\overline{\ x=a/t\ }}-\int_0^{+\infty}2e^{-a^2/t^2-t^2}dt=-2I(a).$$

解此方程可知 $I(a)=Ce^{-2a}$,而由 $I(0)=\sqrt{\pi}/2$ 最后我们有 $I(a)=\sqrt{\pi}e^{-2a}/2$.

例 5.2.16　试求下列积分值:

(1) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$.

(2) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2dx$.

(3) $F(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx(\alpha\geqslant 0,\beta\in\mathbf{R}^1)$.

(4) $F(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(\alpha x)\cdot\arctan(\beta x)}{x^2}dx(\alpha,\beta>0)$.

解　(1) 设 $\beta\neq 0$,记 $f(x,\alpha)=\ln(\alpha^2+x^2)/(\beta^2+x^2)$,则

$$f'_\alpha(x,\alpha)=2\alpha/(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2).$$

易知 f 与 f'_α在$(0<x<\infty)\times(-\infty<\alpha<\infty)$上连续.注意到

$$\frac{|\ln(\alpha^2+x^2)|}{\beta^2+x^2}\leqslant\frac{\varphi(x)}{\beta^2+x^2}\quad(\varphi(x)=|\ln(A^2+x^2)|).$$

可知积分 $I(\alpha)$在任一区间$[-A,A]$上一致收敛.此外,又由

$$\frac{2\alpha}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}\leqslant\frac{2A}{(\varepsilon^2+x^2)(\beta^2+x^2)}\triangleq\psi(x).$$

以及$\int_0^{+\infty}\psi(x)dx$ 收敛,可知积分

$$I'(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha dx}{(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)}\qquad ①$$

在 $0<\varepsilon\leqslant|\alpha|\leqslant A$ 上一致收敛.从而,积分 $I(\alpha)$在$(-\infty,\infty)$上连续,$I'(\alpha)$在 $|\alpha|>0$ 上连续.由式①可导出

$$I'(\alpha)=\pi\alpha/|\alpha\beta|(|\alpha|+|\beta|)\quad(\alpha\beta\neq 0).$$

因此 $I(\alpha)=\pi\ln(|\alpha|+|\beta|)/|\beta|+C$.因为我们有

$$I(0)=2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{\beta^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{|\beta|}\int_0^{+\infty}\frac{\ln|\beta|}{1+t^2}\mathrm{d}t+\frac{2}{|\beta|}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$=\frac{2\ln|\beta|}{|\beta|}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}+0=\pi\frac{\ln|\beta|}{|\beta|}.$$

所以 $C=0$.这说明 $I(\alpha)=\pi\ln(|\alpha|+|\beta|)/|\beta|(\beta\neq0)$.

若 $\beta=0$,则积分 $I(\alpha)$仅在 $|\alpha|=1$ 时收敛.此时,应用分部积分公式,可知 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\ln(1+x^2)/x^2\mathrm{d}x=\pi$.

(2) 注意,$x=0$ 不是积分的瑕点.又对 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$,有

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-2\alpha x}-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\right|\leqslant\frac{2}{x\mathrm{e}^{2\alpha_0 x}}\quad(x\geqslant1).$$

故积分$\int_0^{+\infty}[\mathrm{e}^{-2\alpha x}-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)x}]/x\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 是一致收敛的.从而求导可在积分号下进行,即得

$$I'(\alpha)=-2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\alpha x}-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\mathrm{d}x=-2\ln\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}.$$

因此,$I(\alpha)=-2\int\ln[(\alpha+\beta)/2\alpha]\mathrm{d}\alpha+C=2\alpha\ln\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}-2\beta\ln(\alpha+\beta)+C$.令 $\alpha=\beta$,即知 $C=2\beta\ln2\beta$.最后,我们有

$$I(\alpha)=\ln\frac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2\alpha+2\beta}}.$$

(3) (i) 看区域 $D_\varepsilon=\{(\alpha,\beta,x):\alpha\geqslant\varepsilon>0,|\beta|\geqslant\varepsilon>0,0\leqslant x<\infty\}$,令

$$f(\alpha,\beta,x)=\begin{cases}(\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\cos\beta x)/x^2, & x\neq0,\\ \beta^2/2-\alpha, & x=0,\end{cases}$$

则求导后可得

$$f'_\alpha(\alpha,\beta,x)=-\mathrm{e}^{-\alpha x^2},\quad f'_\beta(\alpha,\beta,x)=\begin{cases}\sin\beta x/x, & x\neq0,\\ \beta, & x=0.\end{cases}$$

易知 f,f'_α,f'_β均在 D_ε 上连续,且积分

$$F(\alpha,\beta),\quad\int_0^{+\infty}f'_\alpha(\alpha,\beta,x)\mathrm{d}x,\quad\int_0^{+\infty}f'_\beta(\alpha,\beta,x)\mathrm{d}x$$

均一致收敛.从而我们有

$$F'_\alpha(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}f'_\alpha(\alpha,\beta,x)\mathrm{d}x,\quad F'_\beta(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}f'_\beta(\alpha,\beta,x)\mathrm{d}x.$$

$$\mathrm{d}F(\alpha,\beta)=\left(-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\alpha+\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\beta$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathrm{d}\alpha+\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta\cdot\mathrm{d}\beta.$$

由此又得 $F(\alpha,\beta)=\pi|\beta|/2-\sqrt{\pi\alpha}+C$.注意到 $\varepsilon>0$ 的任意性,此结论对 $\alpha>0$,$|\beta|>0$ 也真.

(ii) 分解原积分为两个积分,即

$$F(\alpha,\beta)=\int_0^1 f(\alpha,\beta,x)\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} f(\alpha,\beta,x)\mathrm{d}x,$$

易知第一个积分是 α,β的连续函数;注意到 $|f(\alpha,\beta,x)|\leqslant 2/x^2$,则第二个积分关于 $\alpha\geqslant 0$ 以及任意的 $\beta\in\mathbf{R}^1$ 一致收敛.再顾及 f 的连续性,可知第二个积分对 $\alpha\geqslant 0$,$\beta\in\mathbf{R}^1$ 连续.从而根据 $F(\alpha,\beta)$的连续性,可作运算

$$F(0,0)=\lim_{\alpha,\beta\to 0^+}(\pi|\beta|/2-\sqrt{\pi\alpha}+C)=0.$$

最后我们有 $F(\alpha,\beta)=\pi|\beta|/2-\sqrt{\pi\alpha}\quad(\alpha\geqslant 0,\beta\in\mathbf{R}^1)$.

(4) (i) 令 $f(x,\alpha,\beta)=\begin{cases}\arctan(\alpha x)\cdot\arctan(\beta x)/x^2, & x\neq 0,\\ \alpha\beta, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x,\alpha,\beta)$在 $(0\leqslant x<\infty)\times(-\infty<\alpha,\beta<\infty)$上连续,且有

$$|f(x,\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha\beta|\ (0\leqslant x\leqslant 1),\quad |f(x,\alpha,\beta)|\leqslant\pi^2/4x^2\ (x\geqslant 1).$$

即积分 $F(\alpha,\beta)$是一致收敛的,从而知 $F(\alpha,\beta)$在 $-\infty<\alpha,\beta<\infty$上连续.

(ii) 考察区域 $0<\varepsilon\leqslant\alpha<A\leqslant\infty$,$0<\delta\leqslant\beta\leqslant B<\infty$,不难推知

$$F'_\alpha(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(\beta x)}{x(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x,\quad F''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)}.$$

对 $\alpha\neq\beta$,我们有

$$F''_{\alpha\beta}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2x^2}-\frac{\beta^2}{1+\beta^2x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}.\qquad ②$$

(实际上,对 $\alpha=\beta$也真,因为 $F''_{\alpha\beta}$在 $\alpha>0$,$\beta>0$ 上内闭一致收敛,由连续性再取极限即得.)在式②,对 β作积分,易知

$$F'_\alpha(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\beta)+g(\alpha).$$

而$\lim\limits_{\beta\to 0}F'_\alpha(\alpha,\beta)=0$,故 $g(\alpha)=-\pi\ln\alpha/2$.这说明

$$F'_\alpha(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha},\quad F(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{2}\left(\alpha\ln\frac{\alpha+\beta}{\alpha}+\beta\ln(\alpha+\beta)\right)+\varphi(\beta).$$

又由 $\alpha\to 0$,即得 $\varphi(\beta)=-\pi\beta\ln\beta/2$.

注 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x\cdot\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=F(1,1)$.

例 5.2.17 试证明下列命题:

(1) 令 $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\mathrm{d}t$,则

(i) $F\in C([0,\infty))$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$.

(ii) $y=F(x)$满足方程 $y''+y=1/x$.

(2) 令 $F(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t\,(x\geqslant 0)$,则 $y=F(x)$满足 $y''+y=1/x$.

(3) 令 $F(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin(xt)}{t(1+t^4)}\mathrm{d}t\,(x>0)$,则 $F(x)$满足

$$F^{(4)}(x)+F(x)=\pi/2.$$

(4) 设 $f(x)$是$(-\infty,\infty)$上的有界连续函数,则函数

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(z)}{y^2+(x-z)^2}\mathrm{d}z$$

满足

$$\text{(i)}\ \frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=0.\qquad \text{(ii)}\ \lim_{y\to 0}F(x,y)=f(x)\quad(y>0).$$

证明 (1) (i) 令 $f(x,t)=\mathrm{e}^{-tx}/(1+t^2)$,则 $f(x,t)$在$[0,\infty)\times[0,\infty)$上连续,且由不等式 $\mathrm{e}^{-tx}/(1+t^2)<1/(1+t^2)$,可知$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}/(1+t^2)\mathrm{d}t$关于 $x\geqslant 0$一致收敛,故 $F\in C([0,\infty))$.此外,易得

$$0\leqslant F(x)\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}\to 0\quad(x\to+\infty).$$

(ii) 作求导运算,我们有

$$f'_x(x,t)=-\frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2},\quad f''_{xx}(x,t)=\frac{t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2},$$

它们在区域$[0,\infty)\times[0,\infty)$上连续,且对任给 $x_0>0$,可知

$$|f'_x(x,t)|\leqslant\frac{t\mathrm{e}^{-x_0t}}{1+t^2},\quad |f''_{xx}(x,t)|\leqslant\frac{t^2\mathrm{e}^{-x_0t}}{1+t^2}\quad(x\geqslant x_0,t\geqslant 0),$$

从而积分

$$\int_0^{+\infty}f'_x(x,t)\mathrm{d}t,\quad\int_0^{+\infty}f''_{xx}(x,t)\mathrm{d}t$$

关于 $x\in[x_0,\infty)$一致收敛,$F\in C^{(2)}([x_0,\infty))$.注意到 $x_0>0$ 的任意性,即知 $F(x)$在$(0,\infty)$上二次可导,且有

$$F''(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\mathrm{d}t\quad(x>0).$$

最后,我们得到

$$F''(x)+F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^2}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\quad(x>0).$$

(2) 作变量替换 $t+x=u$,则有 $F(x)=\int_x^{+\infty}\dfrac{\sin(u-x)}{u}\mathrm{d}u$.从而知$(x>0)$

$$F'(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{\cos(u-x)}{u}\mathrm{d}u,\quad F''(x)=-\int_x^{+\infty}\frac{\sin(u-x)}{u}\mathrm{d}u+\frac{1}{x}.$$

这说明 $F''(x)+F(x)=1/x(x>0)$.

注　由上述(1)与(2)的结果,可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t+x}\mathrm{d}t(x>0)$.实际上,上式对 $x=0$ 也对($\pi/2=\pi/2$).

(3) 令 $f(x,t)=\sin xt/t(1+t^4)(x>0,t\geqslant 0)$,则

$$f'_x(x,t)=\frac{\cos xt}{1+t^4},\quad f''_{xx}(x,t)=-\frac{t\sin xt}{1+t^4},$$

$$f'''_{x^3}(x,t)=-\frac{t^2\cos xt}{1+t^4},\quad f^{(4)}_{x^4}(x,t)=\frac{t^3\sin tx}{1+t^4}.$$

易知对 $\delta>0$,积分

$$\int_0^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}t,\quad \int_0^{+\infty}f'_x(x,t)\mathrm{d}t,\quad \int_0^{+\infty}f''_{x^2}(x,t)\mathrm{d}t,\quad \int_0^{+\infty}f''_{x^3}(x,t)\mathrm{d}t$$

关于 $\delta\leqslant x<\infty$ 是一致收敛的.又因为当 $t\to+\infty$ 时,$t^3/(1+t^4)$ 是递减趋于 0 的,且注意到 $\left|\int_0^S\sin tx\mathrm{d}t\right|\leqslant 2/x\leqslant 2/\delta(x\geqslant\delta)$,所以根据 Dirichlet 判别法,积分 $\int_0^{+\infty}f^{(4)}_{x^4}(x,t)\mathrm{d}t$ 关于 $x\in[\delta,\infty)$ 一致收敛.从而可得

$$\frac{\mathrm{d}^4F(x)}{\mathrm{d}x^4}=\int_0^{+\infty}\frac{t^3\sin xt}{1+t^4}\mathrm{d}t\quad(x\geqslant\delta),$$

$$\frac{\mathrm{d}^4F(x)}{\mathrm{d}x^4}+F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\quad(x\geqslant\delta).$$

由 $\delta>0$ 的任意性,可知上式对 $x>0$ 也成立.

(4) (i) 求导可在积分号下进行,即可证得.

(ii) 给定 $x_0\in(-\infty,\infty)$,并设 $|f(x)|\leqslant M(-\infty<x<\infty)$,再作变量替换 $z=yt+x_0$ 则得

$$F(x_0,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0+yt)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

注意到 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\pi/2$,故知对任给 $\varepsilon>0$,存在 $X>0$,使得

$$0\leqslant\frac{1}{\pi}\int_X^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}<\varepsilon,\quad 0\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-X}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}<\varepsilon.$$

又由 f 之连续性,还知存在 $\delta>0$,使得 $|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon(|h|<\delta)$.因此,在 $0<y<\delta/M$ 时,就有

$$|F(x_0,y)-f(x_0)|\leqslant\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0+ty)-f(x_0)}{1+t^2}\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \frac{2M}{\pi}\int_{-\infty}^{-X}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}+\frac{2M}{\pi}\int_X^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-X}^{X}\frac{|f(x_0+ty)-f(x_0)|}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 2M\varepsilon+2M\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=(4M+1)\varepsilon.$$

由此即可得证.

例 5.2.18 试论下列积分的一致收敛性:

(1) $I(\alpha)=\int_0^2\frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}\mathrm{d}x(|\alpha|<1/2)$.

(2) $I(\alpha)=\int_0^1\sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}(0<\alpha<2)$.

(3) $I(y)=\int_0^1\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x(0\leqslant y\leqslant 1)$.

(4) $I=\int_0^1 x^{p-1}\ln^q(1/x)\mathrm{d}x$.(i) $p\geqslant p_0>0$;(ii) $p>0,q>-1$.

解 (1) 对被积函数作分段估计,我们有

$$0\leqslant\frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{|x-1|(x-2)^2}}<\begin{cases}1/\sqrt{x}\ \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}, & 0<x<1,\\ \sqrt{x}/\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}, & 1<x<2.\end{cases}$$

由此知可作积分分段估计

$$I(\alpha)\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\ \sqrt{(1-x)(x-2)^2}}+\int_1^2\frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}. \qquad ①$$

注意到下列渐近估计

$$1/\sqrt{x}\ \sqrt[3]{(1-x)(2-x)^2}=o(1/\sqrt{x}),\quad x\to 0^+,$$
$$1/\sqrt{x}\ \sqrt[3]{(1-x)(2-x)^2}=o(1/\sqrt[3]{(x-1)}),\quad x\to 1,$$
$$\sqrt{x}/\sqrt[3]{(x-1)(2-x)^2}=o(\sqrt[3]{(x-2)^2}),\quad x\to 2,$$

知式①右端积分均收敛.由 Weierstrass 判别法,$I(\alpha)$关于 $|\alpha|<1/2$ 一致收敛.

(2) 作替换 $x=1/t(t>0)$,则 $I(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\mathrm{d}t$.应用分部积分公式又可得

$$\int_X^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}\mathrm{d}t=\frac{\cos X}{X^{2-\alpha}}+(\alpha-2)\int_X^{+\infty}\frac{\cos t}{t^{3-\alpha}}\mathrm{d}t\quad(X>1). \qquad ②$$

注意到$1/t^{3-\alpha}\leqslant 1/t$,故知$1/t^{3-\alpha}$是随$t\to+\infty$单调一致趋于0的.又知$\left|\int_X^x\cos t\mathrm{d}t\right|\leqslant 2$,因此上式右端之积分关于 $\alpha\in(0,2)$一致收敛.也就是说,对任给 $\varepsilon>0$,存在 $X>1$,使得$\left|\int_X^{+\infty}\cos t/t^{3-\alpha}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$.

现在考察式②之第一项.对任给 ε:$0<\varepsilon<1/2$,可取 $A=2k\pi>X$ 以及 α 满足:$0<2-\alpha<\ln\varepsilon^{-1}/\ln 2k\pi$,使得 $|\cos A/A^{2-\alpha}|=1/(2k\pi)^{2-\alpha}>\varepsilon$.这说明 $I(\alpha)$不一致收敛.

(3) 对 η:$0<\eta<1$,可得下述积分估计

$$\int_0^\eta \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{(x^2+y^2)}\Big|_0^\eta=\frac{\eta}{\eta^2+y^2}\to\frac{1}{\eta}\quad (y\to 0^+).$$

这说明 $I(y)$关于 $0\leqslant y\leqslant 1$ 不一致收敛.

(4) 作变量替换 $x=\mathrm{e}^{-t}(t>0)$,则 $I=\int_0^{+\infty} t^q\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$.

(i) 因为 $t^q\mathrm{e}^{-pt}\leqslant t^q\mathrm{e}^{-p_0t}$,以及积分$\int_0^{+\infty} t^q\mathrm{e}^{-p_0t}\mathrm{d}t$ 收敛,所以 I 一致收敛.

(ii) 设 $A>0$,考察积分 $I(A,p)=\int_A^{+\infty} t^q\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$.作变换 $s=pt$,则得 $I(A,p)=\dfrac{1}{p^{q+1}}\int_{Ap}^{+\infty} s^q\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s$.由于 $I(A,p)\to+\infty(p\to 0^+)$,故对任给 $\varepsilon>0$,可取 $p>0$,使得 $I(A,p)>\varepsilon$,这说明 I 不一致收敛.

例 5.2.19　解答下列问题:

(1) 设 $f\in C([0,1])$且 $f(x)>0(0\leqslant x\leqslant 1)$,令

$$F(y)=\int_0^1\frac{yf(x)\mathrm{d}x}{x^2+y^2}(y\neq 0),\quad F(0)=0.$$

试论 $F(y)$在 $y=0$ 处的连续性.

(2) 试问式 $I=\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-x^2/y^2}\mathrm{d}x$ 中极限与积分次序是否可交换?

(3) 设 $F(\alpha)=\int_0^1\frac{\sin(\alpha/x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$,试证明 $F\in C((-\infty,2))$.

(4) 试论 $F(\alpha)=\int_0^\pi \sin x/x^\alpha(\pi-x)^\alpha\mathrm{d}x(0<\alpha<2)$的连续性.

解　(1) 注意到 x 的函数 $y/(x^2+y^2)$在$[0,1]$上可积,且在$(0,1)$上不变号,根据中值定理可知

$$y>0:F(y)=f(\xi_y)\cdot\int_0^1\frac{y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=f(\xi_y)\arctan\frac{1}{y},\quad 0\leqslant\xi_y\leqslant 1;$$

$$F(-y)=-f(\xi_{-y})\arctan\frac{1}{y},\quad 0\leqslant\xi_{-y}\leqslant 1.$$

从而对任给 $\varepsilon>0$,可得

$$\begin{aligned}|F(\varepsilon)-F(-\varepsilon)|&=\left|[f(\xi_y)+f(\varepsilon_{-y})]\arctan\frac{1}{\varepsilon}\right|\\&\geqslant 2\left|\arctan\frac{1}{\varepsilon}\right|\cdot\min\{f(x):0\leqslant x\leqslant 1\}.\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|F(\varepsilon)-F(-\varepsilon)|\geqslant\pi\cdot\min\{f(x):0\leqslant x\leqslant 1\}>0.$$

这说明 $F(y)$在 $y=0$ 处间断.

(2) 不可以交换,理由如下:

$$\int_0^1\lim_{y\to 0}xe^{-x^2y^2}/y^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot 0\,\mathrm{d}x=0;$$

$$I=\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2/y^2}\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}(1-e^{-1/y^2})=\frac{1}{2}.$$

(3) 作变量替换 $x=1/t(t>0)$,则 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(\alpha t)}{t^{2-\alpha}}\mathrm{d}t$.

(i) $-\infty<\alpha\leqslant 1/2$.由于 $|\sin(\alpha t)/t^{2-\alpha}\leqslant 1/3$,故积分 $F(\alpha)$一致收敛.再注意到 $\sin(\alpha t)/t^{2-\alpha}$在$(-\infty<\alpha\leqslant 1/2)\times[1\leqslant t<\infty)$上连续,知 $F\in C((-\infty,1/2])$.

(ii) $1/2<\alpha\leqslant 2-\varepsilon(\varepsilon>0)$.注意到$\left|\int_1^x\sin(\alpha t)\mathrm{d}t\right|\leqslant 2/\alpha\leqslant 4$,以及对取定之 α,$1/t^{2-\alpha}$在 $t\to+\infty$时单调地趋于0.还有估计 $1/t^{2-\alpha}\leqslant 1/t^{\varepsilon}$,因此积分 $F(\alpha)$一致收敛.因为被积函数在 $1/2\leqslant\alpha\leqslant 2-\varepsilon$上连续,所以 $F(\alpha)$也在$[1/2,2-\varepsilon]$上连续.这说明 $F(\alpha)$在$(-\infty,2-\varepsilon)$上连续.由 $\varepsilon>0$ 的任意性即得 $F\in C((-\infty,2))$.

(4) (i) 令 $\varepsilon>0$,考察 $\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 2-\varepsilon$,并作分解估计,可得

$$\begin{aligned}F(\alpha)&<\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha-1}(\pi-x)^{\alpha}}+\int_1^{\pi-1}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}+\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha-1}}\\&\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{1-\varepsilon}}+\pi-2+\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(\pi-x)^{1-\varepsilon}}.\end{aligned}$$

由此可知积分 $F(\alpha)$关于 $\alpha\in[\varepsilon,2-\varepsilon]$一致收敛.再注意到函数 $\sin x/x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}$ 在$(0<x<\pi)\times[\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant 2-\varepsilon]$上连续,因此 $F(\alpha)$在$[\varepsilon,2-\varepsilon]$上连续.

(ii) 由 $\varepsilon>0$ 的任意性,即得 $F\in C((0,2))$.

例 5.2.20 试求下列积分值:

(1) $F(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$ $(|x|<1)$.

(2) $I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ $(|\alpha|\leqslant 1)$.

(3) $I(p)=\int_0^1 x^{p-1}\ln^m x\,\mathrm{d}x$ $(p>0,m\in\mathbf{N})$.

(4) 设 $f\in C^{(1)}([0,b])$,$F(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}$,则 $F'(\alpha)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^{\alpha}\frac{f'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}$.

解 (1) 注意到$\int_0^1\frac{x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2y^2}}=\arcsin x(-1<x<1)$,以及对 x_0:$-1<x_0-\delta<x_0<x_0+\delta<1$,函数 $1/(1-x^2y^2)^{3/2}$ 在$[x_0-\delta,x_0+\delta]\times[0,1]$上连续,且积

分$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{(1-x^2y^2)^{3/2}}$关于 $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$一致收敛，故可进行积分号下取极限

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2y^2}}\right)\Bigg|_{x=x_0}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-x_0^2y^2)^3}}.$$

故知左端为 $1/\sqrt{1-x_0^2}$.证毕.

(2)(i)限定 $|\alpha|\leqslant 1-\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，且令

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\ln(1-\alpha^2x^2)/x^2\sqrt{1-x^2}, & x\neq 0,\\ -\alpha^2, & x=0,\end{cases}$$

则 $f'_\alpha(x,\alpha)=-2\alpha/(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}$，且易知 $f(x,\alpha)$，$f'_\alpha(x,\alpha)$在区域$(|\alpha|\leqslant 1-\varepsilon)\times(|x|<1)$上连续.注意到 $|f'_\alpha(x,\alpha)|\leqslant 2/[1-(1-\varepsilon)^2x^2]\sqrt{1-x^2}$，故根据 Weierstrass 判别法，可知积分

$$I'(\alpha)=-2\int_0^1 \frac{\alpha\mathrm{d}x}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

关于 $|\alpha|\leqslant 1-\varepsilon$一致收敛.作替换 $x=\sin t$，可得

$$I'(\alpha)=-2\alpha\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1-\alpha^2\sin^2 t}=-\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

由此可知 $I(\alpha)=\pi\sqrt{1-\alpha^2}+C$.由 $I(0)=0$ 又知 $C=-\pi$，即 $I(\alpha)=\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$ $(|\alpha|\leqslant 1-\varepsilon)$.根据 ε的任意性，实际上此结论对$|\alpha|<1$时亦真.

(ii)注意到 $f(x,\alpha)$在$(-1\leqslant x\leqslant 1)\times(-1<x<1)$上连续，有由不等式$|f(x,\alpha)|\leqslant|\ln(1-x^2)|/x^2\sqrt{1-x^2}$，可知 $I(\alpha)$在$|\alpha|\leqslant 1$上一致收敛.因此$\lim\limits_{|\alpha|\to 1} I(\alpha)=I(\pm 1)$.这说明 $I(\alpha)=\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)(|\alpha|\leqslant 1)$.

(3)作变量替换 $x=1/t(t>0)$，可知

$$I(p)=(-1)^m\int_1^{+\infty} \frac{\ln^m t}{t^{p+1}}\mathrm{d}t.$$

易知 $1/t^{p+1}$ 与 $\ln^m t\cdot t^{-(p+1)}$ 在$(1\leqslant t<\infty)\times(0<\varepsilon\leqslant p<\infty)$上连续，且积分$\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty} t^{-(p+1)}\mathrm{d}t$收敛.此外，又因为有

$$\left|\frac{\ln^m t}{t^{p+1}}\right|\leqslant\frac{\ln^m t}{t^{1+\varepsilon}}=\frac{\ln^m t}{t^{\varepsilon/2}}\frac{1}{t^{1+\varepsilon/2}}\leqslant\left(\frac{2m}{\mathrm{e}^{\varepsilon}}\right)^m\Big/t^{1+\varepsilon/2},$$

所以根据 Weierstrass 判别法，积分 $I(p)$关于 $p\in[\varepsilon,\infty)$一致收敛.从而在公式

$$\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{p}\quad(p>0)$$

两端对 p 求导 m 次(可在积分号下操作)，可知

$$I(p)=\int_0^1 x^{p-1}\ln^m x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}p^m}\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}p^m}\left(\frac{1}{p}\right)=(-1)^m\frac{m!}{p^{m+1}}.$$

(4) 作变量替换 $x=\alpha t$，可知(注意 $1/\sqrt{1-t}$ 在[0,1]上绝对可积)

$$F(\alpha)=\sqrt{\alpha}\int_0^1 f(\alpha t)/\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

在上式中对 α 求导，我们有(可以在积分号下求导)

$$\begin{aligned}
F'(\alpha)&=\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\int_0^1\frac{f(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t+\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{tf'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{-1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^1 f(\alpha t)\mathrm{d}\sqrt{1-t}+\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{tf'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{f(0)}{\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\alpha}\int_0^1 f'(\alpha t)\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t+\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{tf'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t\\
&=\frac{f(0)}{\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\alpha}\int_0^1 f'(\alpha t)\left(\sqrt{1-t}+\frac{t}{\sqrt{1-t}}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{f(0)}{\sqrt{\alpha}}+\sqrt{\alpha}\int_0^1\frac{f'(\alpha t)}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t=\frac{f(0)}{\sqrt{\alpha}}+\int_0^\alpha\frac{f'(x)}{\sqrt{\alpha-x}}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

例 5.2.21　试求下列积分值：

(1) $I(a,b)=\displaystyle\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x\,(a,b>0)$. (2) $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$.

解　(1) 注意到 $\lim\limits_{x\to0^+}(x^b-x^a)/\ln x=0$，以及

$$\lim_{x\to1}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\lim_{x\to1}x(bx^{b-1}-ax^{a-1})=\lim_{x\to1}(bx^b-ax^a)=b-a,$$

故知积分 $I(a,b)$ 存在. 从而应用公式 $\int_a^b x^y\mathrm{d}y=(x^b-x^a)/\ln x$，可得

$$I(a,b)=\int_0^1\left(\int_a^b x^y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\int_0^1 x^y\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

(2) 应用公式 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}=\arctan x/x$，可知 $I=\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

注意到对 $\varepsilon>0$，函数 $1/(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}$ 在区域 $[0\leqslant x\leqslant1-\varepsilon]\times[0\leqslant y\leqslant1]$ 上连续，故考察积分 I_ε：

$$I_\varepsilon=\int_0^{1-\varepsilon}\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+x^2y^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}y.$$

对积分 $J=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}\,(|x|<1)$ 用替换 $t=\arcsin x$，可得

$$J=\arctan(\lambda\sqrt{1+y^2})/\sqrt{1+y^2}\quad(\lambda=\tan(\arcsin x)).$$

从而有

$$f(\varepsilon,y)\triangleq\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}=J\Big|_0^{1-\varepsilon}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\arctan[\sqrt{1+y^2}\cdot\tan(\arcsin(1-\varepsilon))].$$

由于 $f(\varepsilon,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上连续(设定 $f(0,y)=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}f(\varepsilon,y)$),故我们有

$$I=\lim_{\varepsilon\to0^+}I_\varepsilon=\int_0^1\lim_{\varepsilon\to0^+}f(\varepsilon,y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

5.3　Euler 积分——B 函数与 Γ 函数

B(Beta)函数和 Γ(Gamma)函数,统称为 Euler 积分.

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,\quad\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$$

B 函数的定义域为 $p>0,q>0$;Γ 函数的定义域为 $s>0$.

1. 两函数的其它形式:

(i) $\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta$;　　(ii) $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\mathrm{d}x$;

(iii) $\Gamma(x)=2\int_0^{+\infty}x^{2s-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

2. 递推公式($p>0,q>0$):

(i) $\mathrm{B}(p+1,q)=\frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$;　　(ii) $\mathrm{B}(p,q+1)=\frac{q}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$;

(iii) $\mathrm{B}(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\mathrm{B}(p,q)$; (iv) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$.

注意 $\mathrm{B}(1,1)=\int_0^1\mathrm{d}x=1,\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$,故有

$$\Gamma(n)=(n-1)!,\quad\mathrm{B}(n,m)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!},$$

其中 n,m 为正整数,并约定 $0!=1$,所以当 p,q 是正整数时,我们有

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

3. 余元公式($0<p<1$):(i) $\mathrm{B}(p,1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$;(ii) $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

4. 两函数联系公式($p>0,q>0$):$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

公式表明:B 函数在其定义域上的值,可归结为 Γ 函数在其定义域上的值;由递推公式,只要知道 Γ 函数在$(0,1)$区间上的值,即可确定它在正实轴上的值;余元公式进一步缩小 Γ 函数未知值的范围,只要知道它在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上的值,即可确定它在$(0,1)$上的值.

由 $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$，$\Gamma(1)=1$，可知 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx$，得到$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5. $\Gamma(s)$与 $B(p,q)$在其定义域上连续，且任意次可导.

例 5.3.1 试求下列积分值：

(1) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}}(p,q>0)$.

(2) $I=\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx(0<p<1)$.

(3) $I=\int_a^b(x-a)^p(b-x)^q dx(b>a;p,q>-1)$.

(4) $I=\int_a^b\frac{(x-a)^l(b-x)^k}{(x+c)^{l+k+2}}dx(b>a>0,c>0;l>-1,k>-1)$.

解 (1) 由变量替换 $x=y/(1-y)$，则 $dx=dy/(1-y)^2$. 从而知

$$I=\int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}dy=B(p,q).$$

(2) 考察积分 $F(\varepsilon)=\int_0^1(x^{p-1}-x^{-p})(1-x)^{-1+\varepsilon}dx(\varepsilon\geqslant 0)$. 因为 $f(x,\varepsilon)=(x^{p-1}-x^{-p})/(1-x)^{1-\varepsilon}$ 在区域 $D=\{(x,\varepsilon):0<x<1,\varepsilon\geqslant 0\}$ 上连续，又有

$$|f(x,\varepsilon)|\leqslant|x^{p-1}-x^{-p}|/(1-x),\quad \int_0^1\frac{|x^{p-1}-x^{-p}|}{1-x}dx<+\infty,$$

所以积分 $F(\varepsilon)$一致收敛. 从而 $F(\varepsilon)$连续且可在积分号下取极限，故得

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}F(\varepsilon)=\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}dx.$$

由于 $F(\varepsilon)=B(p,\varepsilon)-B(1-p,\varepsilon)$，因此有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[B(p,\varepsilon)-B(1-p,\varepsilon)]\\&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\Gamma(\varepsilon)[\Gamma(p)/\Gamma(p+\varepsilon)-\Gamma(1-p)/\Gamma(1-p+\varepsilon)].\end{aligned}$$

应用公式 $\Gamma(\varepsilon)=\Gamma(1+\varepsilon)/\varepsilon$，以及 L'Hospital 法则，可得

$$\begin{aligned}I&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[\Gamma'(1-p+\varepsilon)/\Gamma(1-p)-\Gamma'(p+\varepsilon)/\Gamma(p)]\\&=\ln[\Gamma(1-p)\cdot\Gamma(p)]\Big|_p^1=\pi\cot p\pi.\end{aligned}$$

(3) 令$(x-a)/(b-a)=t$，则得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 t^p(b-a)^p(b-a)^q(1-t)^q(b-a)dt\\&=(b-a)^{p+q+1}\int_0^1 t^p(1-t)^q dt=(b-a)^{p+q+1}B(p+1,q+1).\\&=(b-a)^{p+q+1}pqB(p,q)/(p+q)(p+q+1).\end{aligned}$$

(4) 作变量替换$\frac{x-a}{x+c}=\frac{b-a}{b+c}t$，可得

$$I=\frac{(b-a)^{l+k+1}}{(b+c)^{l+1}(a+c)^{k+1}}\int_0^1 t^l(1-t)^k\mathrm{d}t$$
$$=(b-a)^{l+k+1}\mathrm{B}(l+1,k+1)/(b+c)^{l+1}(a+c)^{k+1}.$$

例 5.3.2　试证明下列命题：

(1) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\mathrm{d}x}{(a+bx^q)^r}=\frac{a^{p/q-r}}{qb^{p/q}}\mathrm{B}\left(\frac{p}{q},r-\frac{p}{q}\right)\quad(a>0,b>0)$.

(2) $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha/2x^2}/x^{n+1}\mathrm{d}x=2^{\frac{n-2}{2}}\alpha^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\quad(\alpha>0)$.

(3) $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n-1/2)}{2\Gamma(n)}=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}$.

(4) 设 $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$，$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^3}$，则 $I_1=I_2=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

(5) 设 $I_1=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$，$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}$，则 $I_1=I_2=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

(6) $I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}=\Gamma^2(1/4)/8\sqrt{\pi}$.

(7) $I=\int_0^1\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)-\pi\sqrt{2\pi}/\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$.

证明　(1) 用变量替换 $bx^q=at$，即 $x=(a/b)^{1/q}t^{1/q}$，则

$$I=\left(\frac{a}{b}\right)^{p/q}\frac{1}{a^r}\frac{1}{q}\int_0^{+\infty}\frac{t^{p/q-1}}{(1+t)^r}\mathrm{d}t=\frac{1}{q}\frac{a^{p/q-r}}{b^{p/q}}\mathrm{B}\left(\frac{p}{q},r-\frac{p}{q}\right).$$

(2) 令 $t=\alpha/2x^2$，即知 $I=2^{\frac{n-2}{2}}\alpha^{-\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$.

(3) $I=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma(n)$

$$=\sqrt{\pi}\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)/2\Gamma(n)=\sqrt{\pi}\Gamma\left(n-\frac{3}{2}+1\right)/2(n-1)!$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)}{2(n-1)!}=\frac{\sqrt{\pi}\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma(1/2)}{2(n-1)!}$$
$$=\sqrt{\pi}\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots1\cdot\sqrt{\pi}}{2\cdot2^{n-1}(n-1)!}=\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}\frac{\pi}{2}.$$

(4) $I_1=\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{\Gamma(1/3)\Gamma(1-1/3)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin(\pi/3)}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$;

$$I_2=\frac{1}{3}\mathrm{B}\left(\frac{2}{3},1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin(2\pi/3)}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(5) $I_1=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=\pi/4\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$;

$$I_2=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},1-\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{4}/\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(6) (i) 我们有

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\Big/4\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\Big/4\sqrt{\pi}.$$

(ii) 对积分$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$作变量替换 $t=1/x$,可得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}.$$

由此知

$$J=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}=2I,$$
$$I=J/2=\Gamma^2(1/4)/8\sqrt{\pi}.$$

(7) $I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}-\int_0^1\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right).$

例 5.3.3 计算下列积分:

(1) $I=\int_0^1\frac{x^{m-1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^n}}$. (2) $I=\int_{-1}^1(1-x^2)^{n/2}\,\mathrm{d}x$.

(3) $I=I_{n+1}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)^{n+1}}$ $(a>0)$.

解 (1) 令 $x^n=t$,即知

$$I=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{m/n-1}(1-t)^{1/2-1}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{m}{n},\frac{1}{2}\right).$$

(2) 作变量替换 $x=\sin\theta$,则 $\mathrm{d}x=\cos\theta\cdot\mathrm{d}\theta$,且有

$$I=2\int_0^1(1-x^2)^{n/2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\cdot\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2\cdot\frac{1}{2}-1}\theta\cdot\cos^{2\cdot\frac{n+2}{2}-1}\theta\,\mathrm{d}\theta=\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{n+2}{2}\right)$$
$$=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n+2}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right).$$

(3) 在公式$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a}=\frac{\pi}{2}\sqrt{a}$ $(a>0)$ 两端对 a 求导(在积分号下进行)

$$(-1)^n n!\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a)^{n+1}}=\frac{\pi}{a}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}(a^{-1/2})=\frac{(-1)^n n!(2n-1)!!}{(2n)!!a^n\cdot\sqrt[2]{a}}\pi.$$

$\Big($理由:函数 $\dfrac{1}{x^2+a}$ 与 $\dfrac{1}{(x^2+a)^{n+1}}$ 在 $(0<\varepsilon\leqslant a<\infty)\times[0\leqslant x<\infty)$ 上连续,且 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}$ 收敛.$\Big)$ 又由 $\dfrac{1}{(x^2+a)^{n+1}}\leqslant\dfrac{1}{(x^2+\varepsilon)^{n+1}}(x\geqslant 0$,任意 $\varepsilon>0)$ 可知 I_{n+1} 是一致收敛的.

例 5.3.4　计算下列积分:

(1) $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}x\mathrm{d}x(\alpha>0)$. (2) $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}}$.

(3) $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\tan^{\alpha}x\mathrm{d}x(|\alpha|<1)$. (4) $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^p}\mathrm{d}x(0<p<1,a\neq 0)$.

(5) $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cdot\cos^n x\mathrm{d}x(m>-1,n>0)$.

(6) $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin^{n-1}x\cdot\mathrm{d}x}{(1+k\cos x)^n}(0<|k|<1)$. (7) $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha}x\cdot\sin^{\beta}x\mathrm{d}x$

解　(1) 作变量替换 $\sqrt{t}=\sin x$,则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t/\sqrt{t}2\sqrt{1-t}$.从而有

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{1}{2}\right)=2^{\alpha-2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right).$$

(2) 改写积分 $I=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\sin^2(x/2)}}$,再用替换 $y=\sin\dfrac{x}{2}$,则

$$I=\sqrt{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}}\xlongequal{y^4=t}\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{-1/2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\Big/4\sqrt{\pi}.$$

(3) 令 $y=\sin x$,则 $\tan x=y/\sqrt{1-y^2}$.我们有

$$I=\int_0^1 y^{\alpha}(1-y^2)^{-\alpha/2-1/2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\alpha/2-1/2}(1-t)^{-\alpha/2-1/2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)=\pi/2\cos(\pi\alpha/2).$$

(4) 应用公式 $1/x^p=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{p-1}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t/\Gamma(p)(x>0)$,可得

$$I=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{+\infty}\cos ax\left(\int_0^{+\infty}t^{p-1}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\lim_{\substack{A\to+\infty\\ \delta\to 0}}\int_{\delta}^{A}\cos ax\left(\int_0^{+\infty}t^{p-1}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

因为函数 $f(x,t)=t^{p-1}\mathrm{e}^{-xt}$ 在 $(0<t<\infty)\times(0<\delta\leqslant x\leqslant A]$ 上连续,且由 $|f(x,t)|\leqslant t^{p-1}\mathrm{e}^{-\delta t}$ 可知,积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}t^{p-1}\cos ax\mathrm{d}t$ 关于 $x\in[\delta,A]$ 一致收敛,所以积分次序可以交换,即

$$I=\frac{1}{\Gamma(p)}\lim_{\substack{A\to+\infty\\ \delta\to0^+}}\int_0^{+\infty}t^{p-1}\left(\int_\delta^A e^{-xt}\cos ax\,dx\right)dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\lim_{\substack{A\to+\infty\\ \delta\to0^+}}\left\{\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}(a\sin aA-t\cos aA)}{a^2+t^2}e^{-tA}dt\right.$$

$$\left.+\cos a\delta\int_0^{+\infty}\frac{t^p e^{-\delta t}}{a^2+t^2}dt-a\sin a\delta\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}e^{-\delta t}}{a^2+t^2}dt\right\}. \quad ①$$

对式①中第一个积分,有估计

$$\left|\int_0^1+\int_1^{+\infty}(\cdots)dt\right|<\frac{1+|a|}{a^2}\int_0^1 e^{-tA}dt+e^{-A}\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}(|a|+t)}{a^2+t^2}dt.$$

易知当 $A\to+\infty$时,上式右端趋于 0;对式①中第二个积分,由于它关于 $\delta\in[0,\delta]$ 一致收敛,且被积函数在$(0<t<\infty)\times[0\leqslant\delta\leqslant\delta]$上连续,故当 $\delta\to0^+$ 时它趋于

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^p dt}{a^2+t^2}=\frac{|a|^{p-1}}{2}B\left(\frac{p+1}{2},1-\frac{p+1}{2}\right)=\frac{\pi}{2|a|^{1-p}\cos(p\pi/2)}.$$

类似地,当 $\delta\to0^+$ 时式①中第三个积分也趋于 0.因此,最后我们有

$$I=\pi|a|^{p-1}/2\Gamma(p)\cos(p\pi/2)\quad(a\neq0).$$

(5) 令 $\sin x=\sqrt{t}\,(t>0)$,则得

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right).$$

(6) 令 $t=\tan(x/2)$,则得

$$I=\frac{2^n}{(1+k)^n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n-1}dt}{(1+\alpha^2t^2)^n}\quad\left(\alpha=\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\right).$$

再作变量替换 $\alpha t=\sqrt{s}$,我们有 $I=2^{n-1}B\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)\Big/(1-k^2)^{n/2}$.

(7) 令 $t=\sin^2x$,则可得

$$I=\int_0^1 t^{\alpha/2}(1-t)^{\beta/2}\frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)}}=\int_0^1 t^{\frac{\alpha+1}{2}-1}(1-t)^{\frac{\beta+1}{2}-1}dt$$

$$=\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\Big/2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right).$$

例 5.3.5 解答下列问题:

(1) 求曲线 $r^4=\sin^3\theta\cdot\cos\theta$所围面积 S.

(2) 求曲线 $r^m=a^m\cos m\theta$一段的孤长 l.

解 (1) 易知其图形位于第一、三象限,且对称,故有

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^{3/2}\theta\cdot\cos^{1/2}\theta d\theta=\frac{\Gamma(5/2)\Gamma(3/4)}{2\Gamma(2)}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}.$$

(2) 注意到 $\cos m\theta\geqslant0$,故 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,且图形对称,故有

$$l=2\int_0^{\pi/2m}\mathrm{d}s,\quad \mathrm{d}s=\sqrt{r^2+(r'_\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

由于 $r^2=a^2\cos^{2/m}(m\theta)$,故知 $r'_\theta=-a\cos^{\frac{1}{m}-1}(m\theta)\sin(m\theta)$,且 $\mathrm{d}s=a\cos^{\frac{1}{m}-1}(m\theta)\mathrm{d}\theta$,则

$$l=2a\int_0^{\pi/2m}\cos^{\frac{1}{m}-1}(m\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{2a}{m}\int_0^{\pi/2}\cos^{\frac{1}{m}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi$$
$$=\frac{a}{m}2^{\frac{1}{m}-1}\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{1}{m}\right).$$

例 5.3.6 计算下列积分:

(1) $I=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^p\mathrm{d}x\quad(p>-1)$. (2) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}\mathrm{d}x\quad(0<p<1)$.

(3) $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$. (4) $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln^2 x\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

(5) $I=\int_0^{+\infty}\frac{(\ln x)^{t-1}}{x(x-1)}\mathrm{d}x\quad(t>1)$.

解 (1) 令 $\ln(1/x)=t$,则得 $I=\int_0^{+\infty}t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\Gamma(p+1)$.

(2) 注意到$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(x^{p-1}/(1+x))=x^{p-1}\cdot\ln x/(1+x)$,故可得

$$I=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\mathrm{d}x}{1+x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\mathrm{B}(p,1-p)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}[\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)]$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\pi}{\sin(p\pi)}\right)=-\frac{\pi^2\cos(p\pi)}{\sin^2(p\pi)}.$$

(3) 令 $x=t^{1/3}$,则应用上例可得

$$I=\frac{1}{9}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2/3-1}}{l+t}\ln t\mathrm{d}t=-\frac{1}{9}\frac{\pi^2\cos(2\pi/3)}{\sin^2(2\pi/3)}=\frac{2\pi^2}{27}.$$

(4) 令 $x=t^{1/4}(t>0)$,则得 $I=\frac{1}{64}\int_0^{+\infty}t^{-3/4}\ln^2 t/(1+t)\mathrm{d}t$.因为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left(\frac{1}{64}\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}\mathrm{d}t}{(1+t)^{p+(1-p)}}\right)\Bigg|_{p=1/4}=I,$$

所以我们有

$$I=\frac{1}{64}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\mathrm{B}(p,1-p)\Bigg|_{p=1/4}=\frac{1}{64}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\left(\frac{\pi}{\sin p\pi}\right)\Bigg|_{p=1/4}=\frac{3\sqrt{2}\pi^3}{64}.$$

(5) 令 $x=\mathrm{e}^s$,则得(用 Taylor 展式)

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{s^{t-1}\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^{s-1}}=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}s^{t-1}\mathrm{e}^{-ns}\mathrm{d}s.$$

注意到$\int_0^{+\infty}s^{t-1}\mathrm{e}^{-ns}\mathrm{d}s=\Gamma(t)/n^t$,故只需指出

$$\int_0^{+\infty}\frac{s^{t-1}\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}s^{t-1}\mathrm{e}^{-ns}\mathrm{d}s=\sum_{n=1}^{m}\int_0^{+\infty}s^{t-1}\mathrm{e}^{-ns}\mathrm{d}s+\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^{+\infty}s^{t-1}\mathrm{e}^{-ns}\mathrm{d}s$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\int_0^{+\infty}s^{t-1}\mathrm{e}^{-ns}\mathrm{d}s+\Gamma(t)\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^t}.$$

由此又只需指出(上式右端第二项在 $m\to\infty$时趋于 0)

$$\int_0^{+\infty}\left[\frac{s^{t-1}}{\mathrm{e}^s-1}-\sum_{n=1}^{m}s^{t-1}\mathrm{e}^{-ns}\right]\mathrm{d}s=\int_0^{+\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}s^{t-1}\mathrm{e}^{-ns}\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(m+1)s}\frac{s^{t-1}}{\mathrm{e}^s-1}\mathrm{d}s\to 0\quad(m\to\infty).$$

因为我们有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(m+1)s}\frac{s^{t-1}}{\mathrm{e}^s-1}\mathrm{d}s\leqslant\left(\int_M^{+\infty}+\int_0^{\delta}\right)\frac{s^{t-1}}{\mathrm{e}^s-1}\mathrm{d}s+\int_\delta^M\mathrm{e}^{-(m+1)s}\frac{s^{t-1}}{e^s-1}\mathrm{d}s,$$

以及对充分小的 $\delta>0$,充分大的 $M>0$,当 $m\to\infty$时 $\mathrm{e}^{-(m+1)s}$关于 $s\in[\delta,M]$是一致收敛于 0 的,所以结论得证.

例 5.3.7 解答下列问题:

(1)求 $I=\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-at^2}\mathrm{d}t(a>0)$.　　(2)求 $I=\int_0^{+\infty}x^p\mathrm{e}^{-ax}\ln x\mathrm{d}x(a>0)$.

(3)设 $\lambda>0$,$x>0$,$-\pi/2<\alpha<\pi/2$,试求积分

(i) $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\cdot\cos(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t$.

(ii) $G(\alpha)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\cdot\sin(\lambda t\sin\alpha)\mathrm{d}t$.

(4)令 $I_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x$,　证明$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=1$.

解　(1)令 $at^2=x$,即 $t=(x/a)^{1/2}$,则得

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{n/2}}{a^{n/2}}\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{ax}}=\frac{1}{2}a^{-\frac{n+1}{2}}\int_0^{+\infty}x^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}a^{-\frac{n+1}{2}}\int_0^{+\infty}x^{\frac{n+1}{2}-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

(i)当 n是偶数时,记为 $2n$,此时有

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)$$
$$=\frac{2n-1}{2}\,\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

从而得到

$$\int_0^{+\infty}x^{2n}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n+1}}\,\frac{(2n-1)!!}{a^{n+1/2}}.$$

(ii)当 n是奇数时,记为 $2n+1$,此时有

$$\Gamma\left(\frac{2n+1+1}{2}\right)=\Gamma(n+1)=n!,\quad \int_0^{+\infty}x^{2n+1}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{n!}{2a^{n+1}}.$$

(2) 令 $x=t/a$,则得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{a^{p+1}}\int_0^{+\infty}t^p\mathrm{e}^{-t}\ln t\mathrm{d}t-\frac{\ln a}{a^{p+1}}\int_0^{+\infty}t^p\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\&=\frac{\Gamma'(p+1)}{a^{p+1}}-\frac{\ln a}{a^{p+1}}\Gamma(p+1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{a^{p+1}}\right).\end{aligned}$$

(3) 易知(i)与(ii)的积分中被积函数及其对 α 的导数均在区域 $(0<t<\infty)\times(-\pi/2<\alpha<\pi/2)$ 上连续.由比较判别法可知,$F(\alpha)$ 与 $G(\alpha)$ 在 $|\alpha|<\pi/2$ 时收敛.

令 $I_\varepsilon=[-\pi/2+\varepsilon,\pi/2-\varepsilon](0<\varepsilon<\pi/2)$,注意到 $\int_0^{+\infty}t^x\mathrm{e}^{-\lambda t\sin\varepsilon}\mathrm{d}t$ 以及估计

$$\left|t^x\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\begin{matrix}\sin(\lambda t\sin\alpha-\alpha)\\\cos(\lambda t\sin\alpha-\alpha)\end{matrix}\right|\leqslant t^x\mathrm{e}^{-\lambda t\sin\varepsilon},$$

故可在 $F(\alpha)$,$G(\alpha)$ 中对 α 的求导在积分号下进行:

$$F'(\alpha)=-\lambda\int_0^{+\infty}t^x\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\cdot\sin(\lambda t\sin\alpha-\alpha)\mathrm{d}t,$$

$$G'(\alpha)=\lambda\int_0^{+\infty}t^x\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\cdot\cos(\lambda t\sin\alpha-\alpha)\mathrm{d}t.$$

根据 Weierstrass 判别法,上述积分关于 $\alpha\in I_\varepsilon$ 是一致收敛的.现在,对积分 $F'(\alpha)$,$G'(\alpha)$ 作分部积分,其中

$$\mu=t^x,\quad \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha-\alpha);$$
$$\mu=t^x,\quad \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha-\alpha),$$

可得

$$F'(\alpha)=-xG(\alpha),\quad G'(\alpha)=xF(\alpha).$$

应用微分方程的理论,我们得解($|\alpha|<\pi/2$)

$$F(\alpha)=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x,\quad G(\alpha)=-A\cos\alpha x+B\sin\alpha x.$$

注意到 $F(0)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\dfrac{\Gamma(x)}{\lambda^x}$,$G(0)=0$,故 $A=0$,$B=\Gamma(x)/\lambda^x$.最后我们有

$$F(\alpha)=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\cos\alpha x,\quad G(\alpha)=\frac{\Gamma(x)}{\lambda^x}\sin\alpha x.$$

(4) 令 $x^n=t$,则 $I_n=\dfrac{1}{n}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{n}\Gamma\left(\dfrac{1}{n}\right)=\Gamma\left(\dfrac{1}{n}+1\right)$.由此即得

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)=1.$$

例 5.3.8　试证明下列命题:

(1) $I=\int_0^1\ln(\Gamma(x))\sin\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}\left(1+\ln\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(2) $\Gamma(2s)=2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s+1/2)/\sqrt{\pi}$.

(3) 记 $\varphi(x)=\ln\Gamma(x)(0<x<\infty)$,则

$$\varphi(x)\leqslant\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\varphi(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\varphi(x_2)\quad(0<x_1<x<x_2).$$

即 $\ln\Gamma(x)$是$(0,\infty)$上的下凸函数.

(4) 设定义在$(0,\infty)$上的正值函数 $f(x)$ 满足

(i) $f(x+1)=xf(x)$, (ii) $f(1)=1$, (iii) $\ln f(x)$下凸,

则 $f(x)=\Gamma(x)\quad(0<x<\infty)$.

证明(1) 令 $x=1-t$,则得

$$I=\int_0^1\ln(\Gamma(1-t))\sin(\pi t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1\ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\sin(\pi x)\mathrm{d}x.$$

注意到 $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\pi/\sin(p\pi)(0<p<1)$.故又得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_0^1[\ln\pi-\ln(\sin(\pi x))]\sin(\pi x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\ln\pi-\frac{1}{2}\int_0^1\ln(\sin\pi x)\cdot\sin(\pi x)\mathrm{d}x\\&=\left(1+\ln\frac{\pi}{2}\right)\Big/\pi.\end{aligned}$$

(2) 注意到 $\mathrm{B}(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$,故先求 $\mathrm{B}(s,s)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(s,s)&=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2s-1}\theta\cdot\cos^{2s-1}\theta\mathrm{d}\theta=2\cdot2^{-(2s-1)}\int_0^{\pi/2}(\sin2\theta)^{2s-1}\mathrm{d}\theta\\&=2^{-(2s-1)}\int_0^{\pi}\sin^{2s-1}t\mathrm{d}t=2^{-(2s-1)}\left\{\int_0^{\pi/2}+\int_{\pi/2}^{\pi}\right\}\sin^{2s-1}t\mathrm{d}t\\&=2^{-(2s-1)}\left\{\int_0^{\pi/2}\sin^{2s-1}t\mathrm{d}t+\int_{\pi/2}^{0}\sin^{2s-1}(\pi-x)(-\mathrm{d}x)\right\}\\&=2\cdot2^{-(2s-1)}\int_0^{\pi/2}\sin^{2s-1}t\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{B}(s,1/2)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2s-1}\theta\mathrm{d}\theta$,故又知 $2^{-(2s-1)}\mathrm{B}(s,1/2)=\mathrm{B}(s,s)$.

现在,再返回 $\Gamma(x)$,由上即得

$$\frac{2^{-(2s-1)}\Gamma(s)\Gamma(1/2)}{\Gamma(s+1/2)}=\frac{\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(2s)},$$

$$\Gamma(2s)=\frac{2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(1/2)}=\frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\cdot\Gamma(s+1/2).$$

(3) 只需指出 $\varphi''(x)\geqslant0(0<x<\infty)$.因为我们有

$$\varphi''(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)=\frac{\Gamma''(x)\Gamma(x)-[\Gamma'(x)]^2}{\Gamma^2(x)},$$

以及(Cauchy-Schwarz 不等式)

$$\Gamma''(x)\Gamma(x)=\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln^2 t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)$$
$$\geqslant\int_0^{+\infty} \sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}\cdot\sqrt{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}\ln t\mathrm{d}t)^2$$
$$=\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\right)^2=[\Gamma'(t)]^2,$$

所以 $\varphi''(x)\geqslant 0(0<x<\infty)$.

(4) 令 $\varphi(x)=\ln f(x)$,则由(i),(ii)可知

$$\varphi(t+1)=\varphi(t)+\ln t\ (0<t<\infty),\quad \varphi(1)=0,\quad \varphi(n+1)=\ln(n\,!).$$

又由(iii)可知$(0<x<1)$

$$\varphi(n+1)\leqslant\frac{1}{1+x}\varphi(n+1+x)+\frac{x}{1+x}\varphi(n),$$
$$\varphi(n+1+x)\leqslant x\varphi(n+2)+(1-x)\varphi(n+1).$$

从而得到

$$\ln n\leqslant\frac{\varphi(n+1+x)-\varphi(n+1)}{x}\leqslant\ln(n+1).$$

注意到 $\varphi(n+1+x)=\varphi(x)+\ln[x(x+1)\cdots(x+n)]$,代入上式知

$$0\leqslant\varphi(x)-\ln\left[\frac{n\,!\cdot n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right]\leqslant x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

令 $n\to\infty$,我们有

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n\,!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}\right]\quad(0<x<1).$$

这说明 $\varphi(x)$,也即 $f(x)$在$(0,1)$上由条件(i),(ii),(iii)唯一确定,事实上,由(i),(ii)不难说明 $f(x)$在$[1,\infty)$上也是唯一被确定的.注意到 $\Gamma(x)$也满足由(i),(ii),(iii)的.证毕.

例 5.3.9　$\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-C+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{x+n-1}\right)$,其中 C 是 Euler 常数,$x\leqslant 0$ 且不是整数.

证明　根据公式

$$\frac{1}{\Gamma(x)}=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\quad f_n(x)=\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}{n\,!\cdot n^{x-1}},$$

可知$(h_n=1+1/2+\cdots+1/n)$

$$\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\cdots+\frac{1}{x+n-1}-\ln n$$
$$=(h_n-\ln n)+\left(\frac{1}{x}-1\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x+n-1}-\frac{1}{n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}=C-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n-1}\right).$$

注意到 $|1/n-1/(x+n-1)|\leqslant 2|x-1|/n^2$ $(n\geqslant 2|x-1|)$,故知当 $n\to\infty$ 时 $f_n'(x)$一致收敛到 $\Gamma'(x)$.从而有 $\Gamma'(x)/\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[f_n'(x)/f_n(x)]$,由此即得所证.

第6章　重　积　分

6.1　重积分与累次积分

下面所述的区域若有边界皆指逐段光滑曲线($\mathbf{R}^2$ 中);逐块光滑曲面($\mathbf{R}^3$ 中);$\mathbf{R}^n$($n\geqslant 4$)中的区域也在此一界定中.以二重积分为例给出积分定义及性质,其余类似.

定义 6.1.1　设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界闭区域,$f(x,y)$在 D 上的有界函数.若对 D 的任意分划 Δ:$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$(分块 $\Delta\sigma_i$ 也表示面积)以及任意取点$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$($i=1,2,\cdots,n$),存在极限

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=I\quad(\|\Delta\|\text{ 表示 }\Delta\sigma_i\text{ 的直径中最大者}),$$

则称 $f(x,y)$在 D 上的积分存在,或称为 f 在 D 上可积.数值 I 称为 $f(x,y)$在 D 上的二重积分,记作(表示以曲面 $z=f(x,y)$为顶、D 为底的柱体体积)

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

重积分具有:线性性,保序性,积分区域的可加性,绝对值的可积性,乘积可积性等.此外,若 $f(x,y)$在有界闭域 D 上连续,则 $f(x,y)$在 D 上可积.还有中值性,即存在$(\xi,\eta)\in D$ 使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)|D|,\quad \iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|D|,$$

其中 $|D|$表示区域 D 的面积.关于复合函数的可积性,我们有下述结果.

定理 6.1.1　设 $f(x,y)$在 D 上可积,且有 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$($(x,y)\in D$),又 $\varphi\in C([m,M])$,则复合函数 $h(x,y)=\varphi[f(x,y)]$在 D 上可积.

定理 6.1.2　设 $f(x,y)$在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$上可积,对每个 $x\in[a,b]$,单积分 $I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 存在,则累次积分$\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 也存在,且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

定理 6.1.3　设 D 为图 6.1 中区域,即 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$,其中 $\varphi_1(x)$,$\varphi_2(x)$在$[a,b]$上连续.设 $f(x,y)$在 D 上可积,对每一 $x\in[a,b]$,单积分 $I(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 存在,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

对更一般的区域 D,我们可用平行于 y 轴的线段,把 D 分成若干个图(6.1)中区域;或用平行于 x 轴的线段,把 D 分割成若干个图 6.2 中的区域.求 D 上重积分也就归结为求图 6.1 或图 6.2 中区域上的重积分.

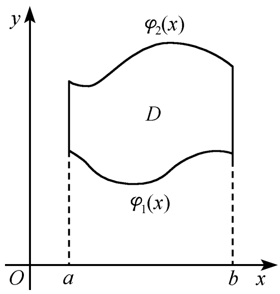


图 6.1

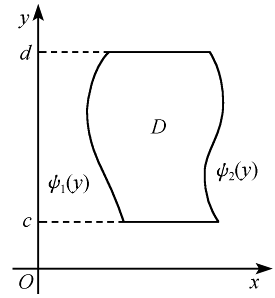


图 6.2

定理 6.1.4 设空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)|(x,y)\in D,\varphi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\varphi_2(x,y)\}$(图 6.3),其中 D 是 Ω 在 xy 平面上的投影区域,$\varphi_1(x,y)$,$\varphi_2(x,y)$在 D 上连续.设 $f(x,y,z)$在 Ω 上可积,对每一点$(x,y)\in D$,$f(x,y,z)$作为 z 的函数在$[\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y)]$上可积,则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

定理 6.1.5 设空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)|c\leqslant z\leqslant d,(x,y)\in D(z)\}$(图 6.4),其中 $D(z)$为平面 $z=z$ 与 Ω 的交集,且为平面闭区域.设 $f(x,y,z)$在 Ω 上可积,对每一 $z\in[c,d]$,$f(x,y,z)$作为 x,y 的函数在 $D(z)$上可积,则

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_c^d\mathrm{d}z\iint\limits_{D(z)}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

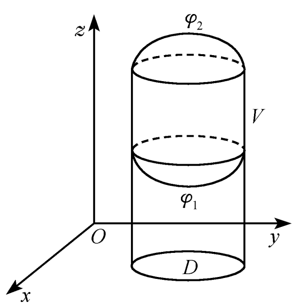


图 6.3

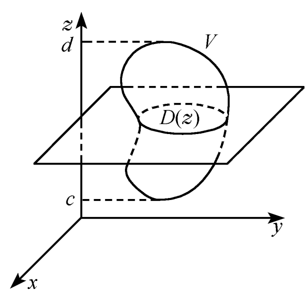


图 6.4

上面,我们只给出对 z 求定积分,对 x,y 求重积分的公式.同样也有对 x 或 y 求定积分,对 $y,z(z,x)$求二重积分的公式.

例 6.1.1 解答下列问题:

(1) 设 $D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,c<y\leqslant d\}$,$f\in C(D)$.试问:此时其累次积分能交换次序吗?

(2) 试举例说明定义在$[0,1]\times[0,1]$上的非负不可积函数 $f(x,y)$,有

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=0=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 设 $D=[0,1]\times[0,1]$,试举例 $f\in R(D)$,但存在 $E\subset[0,1]$,$\overline{E}=[0,1]$,使得积分$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 对 $y\in E$ 不存在.

(4) 求下列积分值($D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 4\}$):

(i) $I_1=\iint_D x^7y^8\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. (ii) $I_2=\iint_D x^{10}y^{11}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 (1) 不一定.例如我们有定义在$[0,1]\times(0,1]$上的函数

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

易知

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{1+x^2}\quad(x\in[0,1]),$$

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=-\frac{\pi}{4}.$$

(2) 在$[0,1]\times[0,1]$上作函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\text{ 与 }y\text{ 均属于 }\mathbf{Q}\text{,且是同分母的既约分数},\\ 0, & \text{其它,包括轴上的点}.\end{cases}$$

注意到在任一点$(x_0,y_0)\in[0,1]\times[0,1]$的任意小的邻域上,函数 f 的振幅均等于1,故 $f(x,y)$在$[0,1]\times[0,1]$上不可积.

但另一方面,当 $y\overline{\in}\mathbf{Q}$ 时,$f(x,y)=0$;当 $y\in\mathbf{Q}$ 时,易知除有限个点外均有 $f(x,y)=0$,即

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=0,\quad \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=0.$$

同理有$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=0$.

(3) 在 $D=[0,1]\times[0,1]$上作函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1/n_1+1/n_2, & x=\dfrac{m_1}{n_1},y=\dfrac{m_2}{n_2}\text{ 是既约分数},\\ 0, & \text{其它以及在轴上}.\end{cases}$$

易知 f 在有理点上不连续,在其它点上均连续,即 $f\in R(D)$,且有$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

此外,当 y_0 是无理点时,有$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=0$;当 y_0 是有理点:$y_0=\dfrac{m_2}{n_2}$ 时,有

$$f(x,y_0)=\begin{cases}0, & x\overline{\in}\mathbf{Q},\\ \dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}, & x=\dfrac{m_1}{n_1}\in\mathbf{Q}.\end{cases}$$

由此可知,作为 x 的函数 $f(x,y_0)$ 在任何小区间上的振幅均大于 $1/n_2$,即在 $x\in[0,1]$ 上不可积,不存在积分 $\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$.同理可说明不存在积分 $\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$.

(4) 注意,积分区域是轴对称的,而被积函数是奇函数,故知 $I_1=0=I_2$.

例 6.1.2 交换下列积分次序:

(1) $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\dfrac{y\mathrm{e}^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}y$. (2) $I=\int_2^4\mathrm{d}x\int_{4/x}^{\frac{20-4x}{8-x}}(y-4)\mathrm{d}y$.

解 (1) 由区域 $[0\leqslant x\leqslant 1]\times[0\leqslant y\leqslant x^2]$ 即知

$$I=\int_0^1\frac{y\mathrm{e}^y}{1-\sqrt{y}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1\mathrm{d}x=\int_0^1 y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y.$$

(2) 考察曲线 $y=4/x$ 与 $y=(20-4x)/(8-x)$ 之交点的 (x,y) 坐标,我们有

$$\begin{cases}x=4/y,\\ x=(20-8y)/(4-y),\end{cases}\quad\begin{cases}y=1,\\ y=2.\end{cases}$$

从而可知

$$I=\int_1^2(y-4)\mathrm{d}y\int_{4/y}^{(20-8y)/(4-y)}\mathrm{d}x.$$

例 6.1.3 试证明下列等式:

(1) $I=\int_0^{\mathrm{e}}\mathrm{d}y\int_1^2\dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\mathrm{d}y\int_{\ln y}^2\dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x$.

(2) $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(xy)^{xy}\mathrm{d}y=\int_0^1 y^y\,\mathrm{d}y$.

证明 (1) 记 I 中第一、二项积分各为 I_1,I_2,则从 $y=\mathrm{e}^x$ 的图形限定易知

$$I_2=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^x}\frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}y=\int_1^2\frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})\mathrm{d}x=\int_1^2\ln x\,\mathrm{d}x-I_1.$$

(2) 令 $xy=t$,我们有(注意 $xy=0$ 时给定 $xy^{xy}=1$)

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(xy)^{xy}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{y}\int_0^1(xy)^{xy}\mathrm{d}(xy)\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{y}\int_0^y t^t\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\int_0^y t^t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\ln y\\&=\ln y\cdot\int_0^y t^t\mathrm{d}t\Big|_0^1-\int_0^1 y^y\ln y\,\mathrm{d}y=-\int_0^1 y^y\ln y\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

注意到$\int_0^1 y^y(1+\ln y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}(y^y)=0$,故 $I=\int_0^1 y^y\,\mathrm{d}y$.

例 6.1.4 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续,$a>0$,试交换下列累次积分的次序:

(1) $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(2) $I=\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(3) $I=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} f(r,\theta)\mathrm{d}r$.　　(4) $I=\int_0^a \mathrm{d}y\int_{y/2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

(5) $I=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin(2\varphi)}} f(\varphi,\rho)\mathrm{d}\rho\quad(a>0)$.

解 (1) $I=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y^2-2}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{3}}^{2}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$(图 6.5).

(2) 如图 6.6 所示之 D_1,D_2,D_3 区域,我们有

$$I=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a \mathrm{d}y\int_{y^2/4a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f\mathrm{d}x+\int_0^a \mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f\mathrm{d}x+\int_a^{2\sqrt{2a}}\mathrm{d}y\int_{y^2/4a}^{2a} f\mathrm{d}x.$$

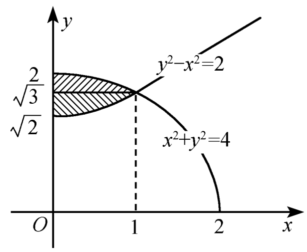


图 6.5

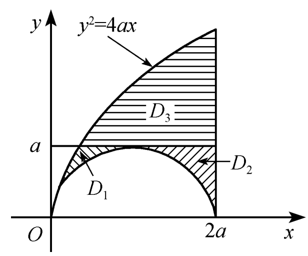


图 6.6

(3) $I=\int_0^{2a}\mathrm{d}r\int_0^{\arccos(r/2a)} f(r,\theta)\mathrm{d}\theta$(图 6.7).

(4) $I=\int_0^{a/2}\mathrm{d}x\int_{x/2}^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{a/2}^{2a}\mathrm{d}x\int_{x/2}^{a} f(x,y)\mathrm{d}y$(图 6.8).

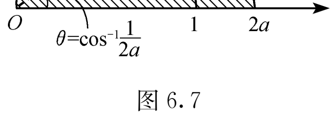


图 6.7

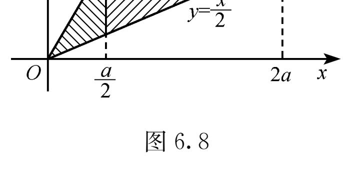


图 6.8

(5) 如图 6.9 所示,我们有 $0\leqslant\rho\leqslant a$,以及 $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\rho^2}{a^2}\right)\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\rho^2}{a^2}\right)$,

$$I=\int_0^a \mathrm{d}\rho\int_{1/2\arcsin(\rho^2/a^2)}^{\pi/2-1/2\arcsin(\rho^2/a^2)} f(\varphi,\rho)\mathrm{d}\varphi.$$

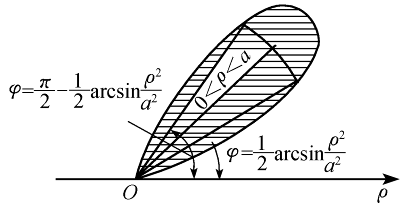


图 6.9

例 6.1.5 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续,试交换下列累次积分的次序:

(1) $I=\int_0^a \mathrm{d}y\int_{-y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x\ (a>0)$. (2) $I=\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{x^2+x}^{x+1} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(3) $I=\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta\int_0^{a\sec\theta} f(r,\theta)\mathrm{d}r$. (4) $I=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\int_0^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(5) $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$.

解 (1) 积分区域 D_1,D_2 如图 6.10 所示,我们有

$$I=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-a}^0 \mathrm{d}x\int_{-x}^a f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^{\sqrt{a}} \mathrm{d}x\int_{x^2}^a f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) 整个积分区域分成 D_1 与 D_2,如图 6.11 斜线部分所示.

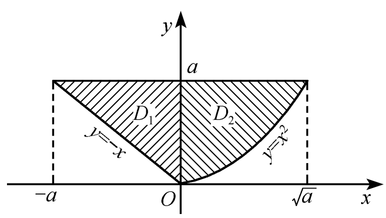


图 6.10

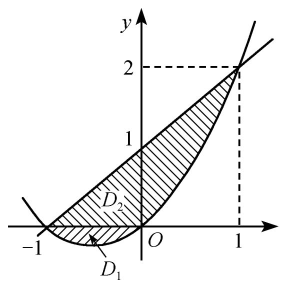


图 6.11

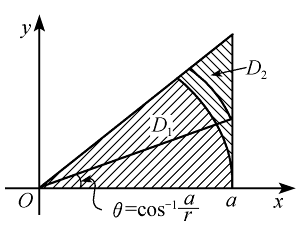


图 6.12

$$I=\int_{-1/4}^0 \mathrm{d}y\int_{(-1-\sqrt{1+4y})/2}^{(-1+\sqrt{1+4y})/2} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y-1}^{(-1+\sqrt{1+4y})/2} f(x,y)\mathrm{d}x$$

(3) 整个积分区域分成 D_1 与 D_2 两部分,并以不同斜线在图 6.12 中表示出.

$$I=\int_0^a \mathrm{d}r\int_0^{\pi/4} f(r,\theta)\mathrm{d}\theta+\int_0^{\sqrt{2}a} \mathrm{d}r\int_{\arccos(a/r)}^{\pi/4} f(r,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

(4) 首先,我们有

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{0}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

其次,注意到 y 从 0 变到 1 时,x 是从 $\arcsin y$ 变到 $\pi-\arcsin y$;而 y 从 -1 变到 0 时,x 是从 $\pi-\arcsin y$ 变到 $2\pi+\arcsin y$,故可得

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(5) $I=\int_0^{\sqrt{2}a}r\mathrm{d}r\int_{-\pi/4}^{\arccos(r/2a)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta+\int_{\sqrt{2}a}^{2a}r\mathrm{d}r\int_{-\arccos(r/2a)}^{\arccos(r/2a)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$

例 6.1.6 试证明下列积分公式(其中 f 皆连续):

(1) $I=\int_a^b\mathrm{d}y\int_a^y(y-x)^nf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n+1}\int_a^b(b-x)^{n+1}f(x)\mathrm{d}x.$

(2) $I=\int_{-A/2}^{A/2}\mathrm{d}x\int_{-A/2}^{A/2}f(x-y)\mathrm{d}y=\int_{-A}^{A}f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t\ (A>0).$

(3) 设 $D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$,$f(x)>0\ (a\leqslant x\leqslant b)$,则

$$\iint_D[f(x)/f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant(b-a)^2.$$

(4) 设 $f\in C([a,b])$,则 $I=2\int_0^af(x)\mathrm{d}x\int_x^af(y)\mathrm{d}y=\left(\int_0^af(t)\mathrm{d}t\right)^2.$

证明 (1) 调换积分次序,可知

$$I=\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\int_x^b(y-x)^n\mathrm{d}y=\int_a^bf(x)\left[\left.\frac{(y-x)^{n+1}}{n+1}\right|_x^b\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{n+1}\int_a^b(b-x)^{n+1}f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 对单积分作变量替换 $x-y=t$,可得

$$I=\int_{-A/2}^{A/2}\mathrm{d}x\int_{x-A/2}^{x+A/2}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-A}^{0}f(t)\mathrm{d}t\int_{-A/2}^{t+A/2}\mathrm{d}x+\int_0^Af(t)\mathrm{d}t\int_{t-A/2}^{A/2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-A}^{0}f(t)\cdot(t+A)\mathrm{d}t+\int_0^Af(t)(-t+A)\mathrm{d}t=\int_{-A}^{A}f(t)(A-|t|)\mathrm{d}t.$$

(3) 应用 Cauchy-Schwarz 不等式,可知

$$(b-a)^2=\left(\int_a^b\sqrt{f(x)/f(x)}\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\left(\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\right)$$
$$=\left(\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b\frac{1}{f(y)}\mathrm{d}y\right)=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(4) $I=\int_0^af(x)\mathrm{d}x\int_x^af(y)\mathrm{d}y+\int_0^af(y)\mathrm{d}y\int_y^af(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^af(x)\mathrm{d}x\int_x^af(y)\mathrm{d}y+\int_0^af(x)\mathrm{d}x\int_0^xf(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\left[\int_x^a f(y)\mathrm{d}y+\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\right]=\left(\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\right)^2.$$

例 6.1.7 试证明下列命题：

(1) 设 $f\in C^{(1)}([a,b])$，且 $f(a)=0$，则

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b[f'(x)]^2(x-a)^2\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $f\in C([0,1])$．若有等式 $f(x)=1+a\int_x^1 f(y)f(y-x)\mathrm{d}y$，则 $a\leqslant 1/2$．

证明 (1) 由题设知，对 $x\geqslant a$ 有(用 Cauchy-Schwarz 不等式)

$$f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,\quad f^2(x)\leqslant(x-a)\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t.$$

在上述右端不等式对 x 在$[a,b]$上作积分，可得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b(x-a)\int_a^x[f'(t)]^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x=\int_a^b[f'(t)]^2\mathrm{d}t\int_t^b(x-a)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_a^b[f'(t)]^2(t-a)^2\mathrm{d}t.$$

(2) 令 $A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则由题设知

$$A=\int_0^1 1\mathrm{d}x+a\int_0^1 1\mathrm{d}x\cdot\int_x^1 f(y)f(y-x)\mathrm{d}y$$

$$=1+a\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(y-x)\mathrm{d}x=1+a\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(t)\mathrm{d}t$$

$$=1+a\int_0^1\left(\int_0^y f(t)\mathrm{d}t\right)d\left(\int_0^y f(t)\mathrm{d}t\right)=1+\frac{a}{2}\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2$$

$$=1+aA^2/2.$$

由此可得 $\frac{a}{2}A^2-A+1=0$．注意到 $A\in\mathbf{R}^1$，故 $a\leqslant 1/2$．

例 6.1.8 试证明下列积分不等式：

(1) (Minkowski 不等式)设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续，则

$$I=\left(\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\leqslant\int_c^d\left[\int_a^b f^2(x,y)\mathrm{d}x\right]^{1/2}\mathrm{d}y.$$

(2) (Poincaré 不等式)设 $\varphi(x)$，$\psi(x)$是$[a,b]$上的连续函数，$f(x,y)$在区域 $D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\}$上连续可微，且有 $f(x,\varphi(x))=0$，则存在 $M>0$，使得

$$\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant M\iint_D\left(f'_y(x,y)\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 设 $D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，$f(x,y)$在 D 上四次连续可微．若 $f(x,y)=0((x,y)\in\partial D)$，且有

$$\left|\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}\right| \leqslant M \quad ((x,y)\in D),$$

则 $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \dfrac{M}{144}$.

(4) 设 $D: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$,则满足方程

$$f(x,y)=1+\int_0^x\int_0^y f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

的连续解 $f(x,y)(0\leqslant x,y\leqslant 1)$是唯一的.

证明 (1) 应用 Cauchy-Schwarz 不等式,可知

$$\begin{aligned}I^2&=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\left(\int_c^d f(x,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x=\int_c^d\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)f(x,z)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&\leqslant\int_c^d\int_c^d\left(\int_a^b f^2(x,y)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b f^2(x,z)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\int_c^d\left(\int_a^b f^2(x,y)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\mathrm{d}y\cdot\int_c^d\left(\int_a^b f^2(x,z)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\mathrm{d}z\\
&=\left\{\int_c^d\left(\int_a^b f^2(x,y)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\mathrm{d}y\right\}^2.\end{aligned}$$

(2) 不妨假定 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant\psi(x)\leqslant m$,且令 $D'=\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant m\}$,定义 $f(x,y)=0((x,y)\in D'\cap D^c)$.由题设知

$$f(x,y)=\int_{\varphi(x)}^y f'_t(x,t)\mathrm{d}t=\int_0^y f'_t(x,t)\mathrm{d}t.$$

从而可得

$$f^2(x,y)=\left(\int_0^y f'_t(x,t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant m^2\int_0^m (f'_t(x,t))^2\mathrm{d}t.$$

注意到上式右端与 y 无关,故又知

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f^2(x,y)\mathrm{d}y\\
&=\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^m f^2(x,y)\mathrm{d}y\leqslant m^2\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^m[f'_t(x,t)]^2\mathrm{d}t\\
&=m^2\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}[f'_t(x,t)]^2\mathrm{d}t=m^2\iint\limits_D[f'_y(x,y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(3) 作 $\mathbf{R}^2$ 上的函数 $g(x,y)=x(1-x)y(1-y)$,则

$$\frac{\partial^4 g(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}=4,\quad\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{36}.$$

注意到 $f(0,y)=f(1,y)=0$,可知

$$\frac{\partial^2 f(0,y)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f(1,y)}{\partial y^2}=0.$$

又有 $g(0,y)=g(1,y)=0$,从而得到

$$\iint_D \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

同理也可得 $\displaystyle\iint_D \frac{\partial^4 g(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

从而我们有

$$\iint_D \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D \frac{\partial^4 g(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\frac{1}{4}\left|\iint_D \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\iint_D\left|\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}g(x,y)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\frac{M}{4}\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{M}{144}.$$

(4) 假定 $f(x,y),h(x,y)$是该方程的两个连续解,则令 $g(x,y)=f(x,y)-h(x,y)$,易知 $g\in C(D)$.不妨认定 $|g(x,y)|\leqslant M((x,y)\in D)$,我们有

$$g(x,y)=\int_0^x\int_0^y[f(u,v)-h(u,v)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^x\int_0^y g(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v;$$

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x\int_0^y|g(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\leqslant Mxy\quad(0\leqslant x,y\leqslant 1).$$

由此又可推出

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x\int_0^y M\cdot uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v=M\left(\int_0^x u\mathrm{d}u\right)\left(\int_0^y v\mathrm{d}v\right)=M\frac{x^2}{2!}\frac{y^2}{2!}.$$

现在假定 $|g(x,y)|\leqslant M(x^k/k!)(y^k/k!)(0\leqslant x,y\leqslant 1)$,则可得

$$|g(x,y)|\leqslant\int_0^x\int_0^y|g(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\leqslant\int_0^x\int_0^y M\frac{u^k}{k!}\frac{v^k}{k!}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=M\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\frac{y^{k+1}}{(k+1)!}.$$

从而根据归纳法,我们有不等式

$$|g(x,y)|\leqslant M\frac{x^n}{n!}\frac{y^n}{n!}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由此令 $n\to\infty$ 即知 $|g(x,y)|=0$,也就是说 $f(x,y)\equiv h(x,y)$.

例 6.1.9 试证明下列命题(转换成二重积分):

(1) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上递减正值函数,则

$$\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x\Big/\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\Big/\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 设 $f\in C([a,b])$,且 $0<f(x)\leqslant M(a\leqslant x\leqslant b)$,则

$$0<I=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\cos x\,\mathrm{d}x\right)^2-\left(\int_a^b f(x)\sin x\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\frac{M^2}{12}(b-a)^4.$$

(3) 设 $p(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负可积,函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增,则

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (1)只需指出

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y-\int_0^1 yf^2(y)\mathrm{d}y\cdot\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

将上式左端改写为

$$I=\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)y[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

并在积分中的变量 x 与 y 给予交换,又可写出

$$I=\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)x[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从而知(相加)

$$2I=\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)(y-x)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

根据 f 的递减性,我们有 $(y-x)[f(x)-f(y)]\geqslant 0(0\leqslant x,y\leqslant 1)$.这说明 $2I\geqslant 0$,即 $I\geqslant 0$.

(2) 令 $D=\{(x,y):a\leqslant x,y\leqslant b\}$,则积分式 I 可写为

$$\begin{aligned}I&=\iint_D f(x)f(y)[1-\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D f(x)f(y)[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由此即知

$$\begin{aligned}0<I&\leqslant M^2\iint_D[1-\cos(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=M^2(b-a)^2\left\{1-\left[\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\Big/\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]^2\right\}.\end{aligned}$$

再引用不等式 $t-t^3/b<\sin t<t(t>0)$,即得所证.

(3) 只需指出

$$I=\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

更换变量符号,将 I 改写为

$$\begin{aligned}J&=\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(y)\mathrm{d}y-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(y)g(y)\mathrm{d}y\\&=\iint_D p(x)p(y)f(x)[g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由 x,y 的对称性,同样可得

$$J=\iint_D p(x)p(y)f(y)[g(y)-g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

将上两式相加再除 2,得

$$J=\frac{1}{2}\iint_D p(x)p(y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 $f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上单调递增,故上式两个方括号同号,即上式被积函数在 D 上取非负值,因而有 $J\geqslant 0$.

例 6.1.10 试将下列三重积分次序 $z\to y\to x$ 改换为 $x\to y\to z$.

(1) $I=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z\quad f\in C(\mathbf{R})$.

(2) $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z\quad(f\in C(\mathbf{R}^3))$.

(3) $I=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z\quad(f\in C(\mathbf{R}^3))$.

(4) $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}f(x,y,z)\mathrm{d}z\quad(f\in C(\mathbf{R}^3))$.

解 换序的方法有多种,这里采用的方法是:先换 x 与 y 的积分序,再换 y 与 z 的积分序.从而只需考察平面区域的情形.

(1) x 与 y 的积分次序交换,得 $I=\int_0^a\mathrm{d}y\int_y^a\mathrm{d}x\int_0^y f(z)\mathrm{d}z$,故知

$$\begin{aligned}I&=\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z\int_y^a\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^y f(z)(a-y)\mathrm{d}z\\&=\int_0^a f(z)\mathrm{d}z\int_z^a(a-y)\mathrm{d}y=\int_0^a f(z)(a-z)^2/2\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

(2) 先看 x 与 y 的积分次序交换,则由图 6.13 可知

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}\mathrm{d}x\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

其次,认定 y 为常量来交换 x 与 z 的积分次序.则如图 6.14 所示,可得

$$I=\int_0^1 dy\int_0^y dz\int_0^{1-y} f dx+\int_0^1 dy\int_y^1 dz\int_{z-y}^{1-y} f dx=\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_0^{1-y} f dx+\int_0^1 dz\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} dx.$$

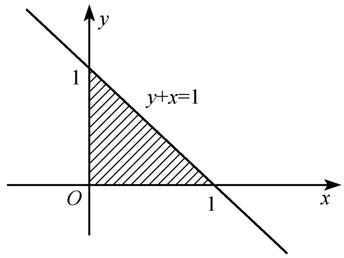


图 6.13

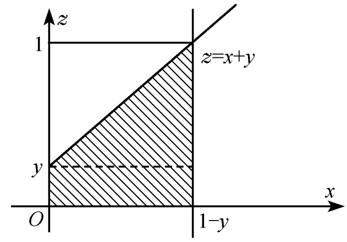


图 6.14

(3) 首先,交换 x 与 y 的积分次序,易知

$$I=\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)dz.$$

其次,再交换 x 与 z 的积分次序,可知(从 $0<z=\sqrt{x^2+y^2}$ 分解出 $x=\pm\sqrt{z^2-y^2}$)

$$I=\int_{-1}^1 dy\int_{|y|}^1 dz\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f dx=\int_0^1 dz\int_{-z}^z dy\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f dx.$$

(4) 先交换 x 与 y 的积分次序,我们有

$$I=\int_0^1 dy\int_y^1 dx\int_0^{xy} f(x,y,z)dz.$$

再交换 x 与 z 的积分次序,即认定 $y(0\leqslant y\leqslant 1)$ 为常量,则 x-z 平面上的积分区域如图 6.15 所示,从而可得

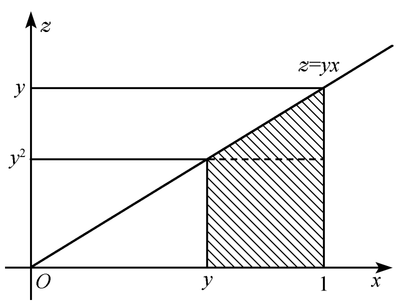


图 6.15

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 dy\left(\int_y^1 dx\int_0^{xy} f(x,y,z)dz\right)\\&=\int_0^1 dy\left[\int_0^{y^2} dz\int_y^1 f dx+\int_{y^2}^y dz\int_{z/y}^1 f dx\right]\\&=\int_0^1 dz\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_y^1 f dx+\int_0^1 dz\int_z^{\sqrt{z}} dy\int_{z/y}^1 f dx.\end{aligned}$$

例 6.1.11　试求下列积分 I 的值:

(1) 设 D 是由直线 $y=0,x=1$ 和 $y=x$ 围成,$I=\iint\limits_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dx dy$.

(2) 设 D 是以点 $(1,0),(2,1),(0,2)$ 为顶点的三角形内部,$I=\iint\limits_D (x+y)^2 dx dy$.

(3) 设 D 是由 $y^2=2x,x+y=4,x+y=12$ 围成,$I=\iint\limits_D (x+y)dx dy$.

(4) 设 D 是 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 围成，$f\in C(\mathbf{R}^1)$，$I=\iint\limits_D xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(5) $[\lambda]$ 表示小于等于 λ 的最大整数.

(i) 设 $D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$，$I=\iint\limits_D [x+y]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$；

(ii) 设 $D=\{(x,y):-2\leqslant x\leqslant 2,x^2\leqslant y\leqslant 4\}$，$I=\iint\limits_D \sqrt{[y-x^2]}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

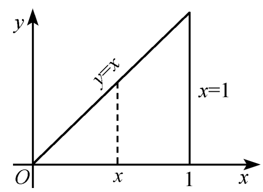


图 6.16

解 (1) 画出区域 D 的图(图 6.16)，即知 $D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$.故有

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{4x^2-y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+2x^2\arcsin\frac{y}{2x}\right]_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right).$$

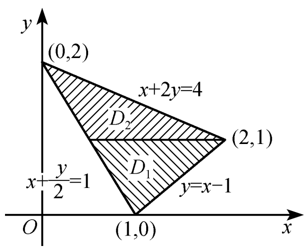


图 6.17

注 若积分序变成先 x 后 y，则计算将会变得复杂.

(2) 易知 D 为图 6.17 所示，从而可得

$$I=\iint\limits_{D_1}(x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y/2}^{y+1}(x+y)^2\,\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{1-y/2}^{4-2y}(x+y)^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{25}{4}.$$

(3) 将 D 分解为 D_1 与 D_2，可得

$$D_1=\{(x,y):2\leqslant x\leqslant 8,4-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x}\},$$

$$D_2=\{(x,y):8\leqslant x\leqslant 18,-\sqrt{2x}\leqslant y\leqslant 12-x\},$$

$$I=\iint\limits_{D_1}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_2^8\mathrm{d}x\int_{4-x}^{\sqrt{2x}}(x+y)\,\mathrm{d}y+\int_8^{12}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x}(x+y)\,\mathrm{d}y=543\,\frac{11}{15}.$$

(4) $$I=\int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x\int_{x^3}^1 yf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x\int_{x^3}^1 f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x^2+y^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 x\int_{x^2+x^6}^{1+x^2}f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

(注意 $F(x)=x\int_{x^2+x^6}^{1+x^2}f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 x 的奇函数).

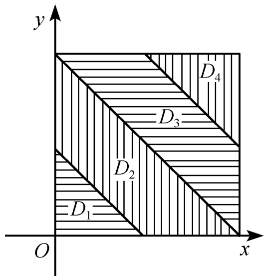


图 6.18

(5) (i)用直线 $x+y=i(i=1,2,3)$分割 D 成为四个区域:$D_k(k=1,2,3,4)$,见图 6.18.因为$[x+y]=k-1$ $((x,y)\in D_k;k=1,2,3,4)$,所以

$$I=\sum_{k=1}^{4}\iint_{D_k}[x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{4}(k-1)|D_k|=|D_2|+2|D_3|+3|D_4|,$$

其中$|D_k|$表示 D_k 之面积.从而我们有

$$|D_2|=|D_3|=3/2,\quad |D_4|=|D_1|=1/2,\quad I=3+3/2.$$

(ii) 注意到积分的对称性,易知

$$I=2\iint_{D_1}\sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D_1:0\leqslant x\leqslant 2,x^2\leqslant y\leqslant 4.$$

用曲线 $y=x^2+j(j=1,2,3;x\geqslant 0)$分割 D 为四个区域:$D_k(k=1,2,3,4)$,如图 6.19.我们有 $\sqrt{[y-x^2]}=\sqrt{k-1}$ $((x,y)\in D_k;k=1,2,3,4)$.从而得到

$$I=2\sum_{k=1}^{4}\sqrt{k-1}\iint_{D_k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\sum_{k=1}^{4}\sqrt{k-1}|D_k|.$$

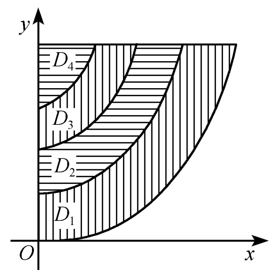


图 6.19

将区域 D_k 表示为

$$D_k=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant\sqrt{4-k},x^2+k-1\leqslant y\leqslant x^2+k\}$$
$$\cup\{(x,y):\sqrt{4-k}\leqslant x\leqslant\sqrt{4-(k-1)},x^2+k-1\leqslant y\leqslant 4\},$$

则可求出面积

$$|D_k|=\int_0^{\sqrt{4-k}}\mathrm{d}x\int_{x^2+k-1}^{x^2+k}\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{4-k}}^{\sqrt{5-k}}\mathrm{d}x\int_{x^2+k-1}^{4}\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{4-k}+(5-k)(\sqrt{5-k}-\sqrt{4-k})-[(5-k)^{3/2}-(4-k)^{3/2}]/3.$$

因此最后导致

$$I=2\sum_{k=1}^{4}\sqrt{k-1}|D_k|=2(|D_2|+\sqrt{2}|D_3|+\sqrt{3}|D_4|)$$

$$=2(8/3+8\sqrt{3}/3-2\sqrt{2})=4(4+4\sqrt{3}-3\sqrt{2})/3.$$

例 6.1.12　试求下列三重积分:

(1) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是以(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(0,0,2),(0,2,2),(2,2,2)为顶点的棱台,$I=\iiint_{\Omega}(1/(y^2+z^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(2) 设 $\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1, I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(3) 设 $D=\{(x,y,z): x,y,z\geqslant 0, x+y+z\leqslant \pi/2\}$,

$$I=\iiint\limits_{\Omega} xyz\cdot\sin(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解 (1) 以平行于 xOy 平面的平面截该棱台,可知其截面为 $D=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant y, y\leqslant z\}$.从而可得

$$I=\int_1^2\mathrm{d}z\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y^2+z^2}=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}y\int_0^y\frac{\mathrm{d}x}{y^2+z^2}=\frac{\ln 2}{2}.$$

(2) 首先,分解原积分为

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}\frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{\Omega}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\triangleq I_1+I_2+I_3.$$

其次,对积分 I_1,用平行于 yOz 平面的平面截该椭球 Ω,可知其截面为一椭圆,记为 V_x;对 I_2, I_3 也类似,可得

$$I_1=\int_{-a}^a\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\iint\limits_{V_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad I_2=\int_{-b}^b\frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}y\iint\limits_{V_y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\quad I_3=\int_{-c}^c\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}z\iint\limits_{V_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$I=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^a x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x+\frac{\pi ac}{b^2}\int_{-b}^b y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y+\frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^c z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{5}\pi abc.$$

(3) 易知 Ω是第一象限内的直角四面体,选积分序为 $x\to y\to z$,则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi/2}z\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2-z}y\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2-y-z}x\sin(x+y+z)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi/2}z\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2-z}y[-x\cos(x+y+z)+\sin(x+y+z)]\Big|_0^{\pi/2-y-z}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\pi/2}z\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2-z}y[1-\sin(y+z)]\mathrm{d}y=1-\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^4}{384}.\end{aligned}$$

例 6.1.13 试证明下列积分等式:

(1) 设 D 是由 $y=x, y=x^2$ 所围成的区域, $I=\iint\limits_D\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\sin 1$.

(2) $I=\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

(3) 设 $\varphi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

(i) $I=\int_0^x\varphi(at)\mathrm{d}t=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}(\mathrm{e}^{-a^2x^2}-1)+x\varphi(ax)$.

(ii) $I=\int_0^{+\infty}[1-\varphi(t)]\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

证明 (1)易知 D 可表示为 $D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant x\}$,故

$$I=\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\sin x}{x}(x-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(1-x)\sin x\,\mathrm{d}x=1-\sin 1.$$

注 D 也可表示为 $D=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant 1,y\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\}$,这时

$$I=\iint_D\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,$$

内层积分由于无初等原函数,故无法计算.此例说明正确选择累次积分顺序,关系到能不能求出积分值.

(2)在 $f(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+x^2\tan^2 t}$ 两端对 x 作$[0,1]$上的积分,再换序得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+x^2\tan^2 t}=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}t\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\tan^2 t}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\tan t}[\mathrm{acrtan}(x\tan t)]\Big|_0^1\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{t\mathrm{d}t}{\tan t}$$

$$=\int_0^{\pi/2}t\mathrm{d}\ln\sin t=t\ln\sin t\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\mathrm{d}t=-\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\mathrm{d}t.$$

另一方面,设 $\tan t=u$,又可得

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+x^2u^2)}=\frac{1}{1-x^2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}-\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}u}{1+x^2u^2}\right)$$

$$=\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2}-x\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

从而我们有(对上式作积分)$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

综合上述结果,即可得证.

(3)(i) $I=\int_0^x\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{at}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ax}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\int_{u/a}^{x}\mathrm{d}t$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ax}\left(x-\frac{u}{a}\right)\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[x\int_0^{ax}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u-\frac{1}{a}\int_0^{ax}\mathrm{e}^{-u^2}u\mathrm{d}u\right]$$

$$=x\varphi(ax)-\frac{1}{a\sqrt{\pi}}(\mathrm{e}^{-a^2x^2}-1).$$

(ii)注意到积分公式$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,我们有

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^t\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u-\int_0^t\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}u\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

例 6.1.14 设 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 4\}$,求 $I=\iint\limits_D \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 记 D 在第一象限部分为 D_1,则由对称性可知

$$I=4\iint\limits_{D_1}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)$,作曲线 $l:y=\sqrt{x^2+2}(0\leqslant x\leqslant 1)$,则 f 在 l 上每一点上均间断.从而分 D_1 为 D_2 与 D_3 两个区域(图 6.20).

$$D_2=[0,1]\times[0,\sqrt{x^2+2})\cup[1,2]\times[0,\sqrt{4-x^2}],$$
$$D_3=[0,1]\times(\sqrt{x^2+2},\sqrt{4-x^2}].$$

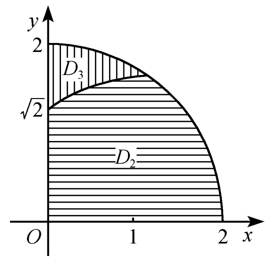


图 6.20

注意到 $f(x,y)=1\ ((x,y)\in D_2)$,$f(x,y)=0\ ((x,y)\in l$,$f(x,y)=-1\ ((x,y)\in D_3)$,故得

$$\begin{aligned}
I&=4\left(\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\\
&=4\left(\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y-\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y\right)\\
&=4\left(\int_0^1(2\sqrt{x^2+2}-\sqrt{4-x^2})\mathrm{d}x+\int_1^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x\right)\\
&=4\left((x\sqrt{x^2+2}+2\ln x+\sqrt{(x^2+2)})\,\big|_0^1-4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2t\mathrm{d}t+4\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t\right)\\
&=4\left(\sqrt{3}+2\ln\frac{1+\sqrt{3}}{2}-2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}+2\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right)\\
&=8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{4\pi}{3}\quad(\text{其中,对 }\sqrt{4-x^2}\text{ 用变换 }x=2\sin t).
\end{aligned}$$

例 6.1.15 设 $f(x,y)$在 $I=(a,b)\times(c,d)$上连续,且有

(i) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$在 I 上存在且连续;

(ii) 对某个 $x_0\in(a,b)$,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)$存在;

(iii) $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$在 I 上存在且连续,

则在 I 上存在$\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$,$\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$,且有

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y\partial x},\quad (x,y)\in I.$$

证明 取 $y_0\in(c,d)$,则对任意的$(x,y)\in I$,有

$$\iint\limits_{[x_0,x]\times[y_0,y]}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}f(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}\left\{\int_{y_0}^{y}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(s,t)}{\partial s}\right)\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}s$$
$$=\int_{x_0}^{x}\left\{\frac{\partial}{\partial s}f(s,y)-\frac{\partial}{\partial s}f(s,y_0)\right\}\mathrm{d}s$$
$$=f(x,y)-f(x_0,y)-f(x,y_0)+f(x_0,y_0).$$

从而在等式两端对 y,x 求导即可得证.

例 6.1.16 试证明下列命题:

(1)设 $F(x,y,z)$在 Ω:$[\alpha,\beta]\times[c,d]\times[a,b]$上的最大、最小值为 M,m,且 $f(x,y,z)=\dfrac{\partial^3F(x,y,z)}{\partial x\partial y\partial z}$在 Ω 上连续.则

$$I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\leqslant 4(M-m).$$

(2)设 $f(x)$是 $\mathbf{R}^1$ 上的正值连续函数.若对任意的 $t\in\mathbf{R}^1$,有$\int_{\mathbf{R}^1}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant 1$,则对任意的 a,b:$a<b$,有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{b-a}{2}+1$.

证明 (1)将三重积分换成累次积分,我们有

$$I=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}x\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b\frac{\partial^3F}{\partial x\partial y\partial z}\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}x\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2F(x,y,z)}{\partial x\partial y}\right)\mathrm{d}z$$
$$=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}x\int_c^d\mathrm{d}y\left[\frac{\partial^2F(x,y,b)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2F(x,y,a)}{\partial x\partial y}\right]$$
$$=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}x\left\{\frac{\partial}{\partial x}[F(x,d,b)-F(x,c,b)]\right\}-\int_\alpha^\beta\mathrm{d}x\left\{\frac{\partial}{\partial x}[F(x,d,a)-F(x,c,a)]\right\}$$
$$=F(\beta,d,b)-F(\alpha,d,b)+F(\alpha,c,b)-F(\beta,c,b)-F(\beta,d,a)+F(\alpha,d,a)$$
$$+F(\beta,c,a)-F(\alpha,c,a)$$
$$\leqslant 4M-4m=4(M-m).$$

(2)令 $F(t)=\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x$,则 $F\in C([a,b])$且有

$$\int_a^bF(t)\mathrm{d}t=\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}\mathrm{d}t=\int_a^bf(x)[2-\mathrm{e}^{a-x}-\mathrm{e}^{x-b}]\mathrm{d}x.$$

注意到 $F(t)\leqslant 1$,故知

$$2\int_a^bf(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\mathrm{e}^{a-x}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\mathrm{e}^{x-b}f(x)\mathrm{d}x\leqslant b-a,$$
$$\int_a^bf(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}+\frac{1}{2}\int_a^b\mathrm{e}^{-|a-x|}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b\mathrm{e}^{-|b-x|}f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}+1.$$

例 6.1.17 解答下列问题：

(1) 求 $\mathbf{R}^3$ 中由曲面 $z=x^2+y^2$，$y=x^2$，$y=1$，$z=0$ 所围成的立体体积 V.

(2) 求 $\mathbf{R}^3$ 中由曲面 $z=xy$，$x+y+z=1$，$z=0$ 所围成的立体体积 V.

解 (1) 易知立体所在区域 Ω 为

$$\Omega=\{(x,y,z):-1\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant x^2+y^2\}.$$

由此知 Ω 在 xOy 平面上的投影为 $D=\{(x,y):|x|\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\}$.从而得到

$$\begin{aligned}V&=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1 x^2\mathrm{d}y+\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^1 y^2\mathrm{d}y=\frac{88}{105}.\end{aligned}$$

(2) 易知该立体在 xOy 平面上的投影区域为

$$D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x\}.$$

此外，曲面 $xy=z$ 与平面 $x+y+z=1$ 之交线在 xOy 平面上的投影为 $y=(1-x)/(1+x)$ $(x\in\mathbf{R}^1\setminus\{-1\})$.因此，$D$ 可分为两部分 D_1 与 D_2：

$$\begin{aligned}D_1&=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant(1-x)/(1+x)\},\\D_2&=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,(1-x)/(1+x)\leqslant y\leqslant 1-x\}.\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}V&=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{(1-x)/(1+x)}y\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{(1-x)/(1+x)}^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2/(1+x)\mathrm{d}x=\frac{17}{12}-2\ln 2.\end{aligned}$$

例 6.1.18 求下列由曲面所围(交)立体 Ω 的体积 V.

(1) 设圆柱体为 π：$x^2+y^2=a^2$.

(i) π 被平面 $z=0$，$z=mx$ 所围部分.

(ii) π 被平面 $z=0$，$z=m(x+a)$ 所围部分.

(2) 由半径为 a 的两个正圆柱体正交时的公共部分 Ω.

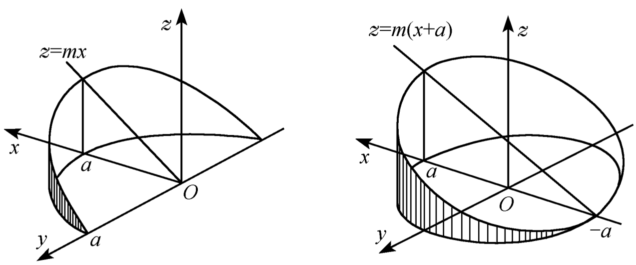
(3) 由半径为 a 的三个正圆柱体相互正交时的公共部分.

(4) 由曲面 $y^2+z^2=4ax$，$x^2+y^2=2ax$ 所围立体.

解 (1) 如图 6.21 所示，我们有

(i) $\dfrac{V}{2}=\displaystyle\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}mx\,\mathrm{d}x=\frac{ma^3}{3}$ (图 6.21(a)).

(ii) $\dfrac{V}{2}=\displaystyle\int_0^a\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}m(x+a)\mathrm{d}x=2ma\int_0^a\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{\pi ma^3}{2}$ (图 6.21(b)).



(a) (b)

图 6.21

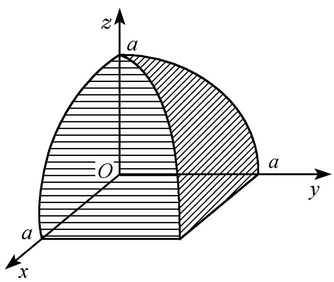


图 6.22

(2) 取该两正圆柱体的中心轴各为 x 与 y 轴(图 6.22),则它们各有表达式:$x^2+z^2=a^2$,$y^2+z^2=a^2$.从而由对称性可知,位于第一象限的部分立体 Ω_1 是 Ω 的 1/8.我们用平面 $y=x$ 对 Ω_1 进行二等分,可得($z=\sqrt{a^2-x^2}$)

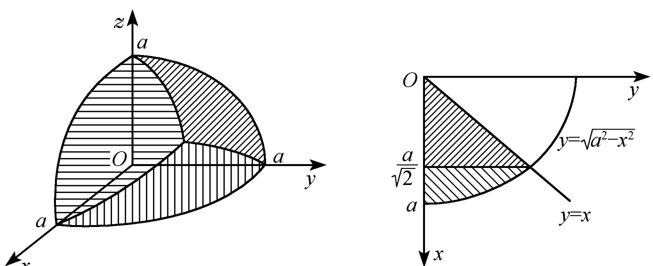
$$\frac{V}{16}=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^x \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^3}{3}.$$

(3) 取这些正圆柱的三个中心轴为坐标轴(图 6.23(a)),则它们可表示为

$$x^2+z^2=a^2,\quad y^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2=a^2.$$

由对称性可知,位于第一象限内的部分立体 Ω_1 是 Ω 的 1/8.我们有平面 $y=x$ 将 Ω_1 二等分(图 6.23(b)),可得

$$\begin{aligned}\frac{V}{16}&=\int_0^{a/\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y+\int_{a/\sqrt{2}}^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y\\&=\left[-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}\right]\Bigg|_0^{a/\sqrt{2}}+\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{a/\sqrt{2}}^a=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)a^3.\end{aligned}$$



(a) (b)

图 6.23

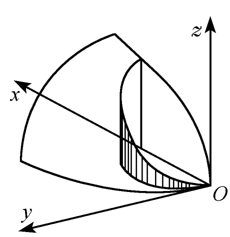


图 6.24

(4) $\dfrac{V}{4}=\displaystyle\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{4ax-y^2}\,\mathrm{d}y$(图 6.24)

$$=\int_0^{2a}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{4ax-y^2}+\frac{4ax}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{4ax}}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{2a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{4a^2-x^2}+2ax\arcsin\frac{\sqrt{2a-x}}{2\sqrt{a}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{1}{6}(4a^2-x^2)^{3/2}\right]\Bigg|_0^{2a}+\left[ax^2\arcsin\frac{\sqrt{2a-x}}{2\sqrt{a}}\right]\Bigg|_0^{2a}$$

$$-\int_0^{2a}ax^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2a-x}}{2\sqrt{a}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{6}a^3+\frac{a}{2}\int_0^{2a}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{4a^2-x^2}}=\frac{4}{3}a^3+\frac{a}{2}\int_0^{\pi/2}4a^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}a^3+\frac{\pi}{2}a^3.$$

例 6.1.19　求下列函数(积分)的导数:

(1) 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界闭区域,令

$$\Omega=\{(x,y,t):(x,y)\in D,t\in[\alpha,\beta]\}.$$

又设 $f\in C(\Omega)$,$f'_t\in C(\Omega)$,且记 $F(t)=\iint\limits_D f(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,求 $F'(t)$.

(2) 设 $f\in C(\mathbf{R}^3)$,令 $F(t)=\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^t f(x,y,z)\mathrm{d}z$,求 $F'(t)$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上可微,令 $F(t)=\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^t f(xyz)\mathrm{d}z$,求 $F'(t)$.

解　(1) 易知 $f'_t(x,y,t)$在 Ω上一致连续,故对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|f'_t(x,y,t')-f'_t(x,y,t'')|<\varepsilon\quad(t',t''\in[\alpha,\beta],|t'-t''|<\delta).$$

从而根据微分中值公式,当 $|\Delta t|<\delta$时我们有

$$\left|\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}-\iint\limits_D f'_t(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$=\left|\iint\limits_D\left(\frac{f(x,y,t+\Delta t)-f(x,y,t)}{\Delta t}-f'_t(x,y,t)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant\iint\limits_D|f'_t(x,y,t^*)-f'_t(x,y,t)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\varepsilon\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到$\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$是 D 的面积,是一个常数.由此即知

$$F'(t)=\lim_{\Delta t\to0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\iint\limits_D f'_t(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) $F'(t)=\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^t f(t,y,z)\mathrm{d}z+\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^t f(x,t,z)\mathrm{d}z+\int_0^t\mathrm{d}x\int_0^t f(x,y,t)\mathrm{d}y$.

(3) (i) 应用一般求导公式,易知

$$F'(t)=\int_0^t dy\int_0^t f(tyz)dz+\int_0^t dx\int_0^t f(xtz)dz+\int_0^t dx\int_0^t f(xyt)dy. \qquad ①$$

(ii) 对原式 $F(t)$进行分部积分,可得

$$F(t)=\int_0^t dx\int_0^t dy\left[zf(xyz)\Big|_{z=0}^{t}-\int_0^t zf'(xyz)xy\,dz\right]$$

$$=t\int_0^t dx\int_0^t f(xyt)dy-\int_0^t dx\int_0^t dy\int_0^t xyzf'(xyz)dz.$$

类似地,对 $F(t)$交换积分次序后再进行分部积分,又有

$$F(t)=t\int_0^t dx\int_0^t f(xtz)dz-\int_0^t dx\int_0^t dz\int_0^t xyzf'(xyz)dy,$$

$$F(t)=t\int_0^t dy\int_0^t f(tyz)dz-\int_0^t dy\int_0^t dz\int_0^t xyzf'(xyz)dx.$$

将上述三式相加,并依式①可得

$$F'(t)=\frac{3}{t}\left[F(t)+\int_0^t dx\int_0^t dy\int_0^t xyzf'(xyz)dz\right].$$

例 6.1.20 解答下列问题(用重积分求解单积分):

(1) 设 $f\in C([0,\infty])$.若有 $f(x)f(y)\leqslant xf(y/2)+yf(x/2)(x,y\geqslant 0)$,则

$$\int_0^x f(t)dt\leqslant 2x^2\ (x>0).$$

(2) 试求下列积分值($a>0,b>0$)

(i) $I_1=\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$. (ii) $I_2=\int_0^1\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$.

(3) 试证明不等式

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}(1-e^{-u^2/2})}<\int_0^u e^{-x^2/2}dx<\sqrt{\frac{\pi}{2}(1-e^{-u^2})}\quad (u>0).$$

解 (1) 令 $y=x$ 代入题设不等式,可知 $f^2(x)\leqslant 2xf(x/2)$.由此又导出 $f(x)\geqslant 0(x\geqslant 0)$.从而对 $t>0$,可得

$$\left(\int_0^t f(x)dx\right)^2=\int_0^t dx\int_0^t f(x)f(y)dy$$

$$\leqslant\int_0^t x\,dx\int_0^t f\left(\frac{y}{2}\right)dy+\int_0^t f\left(\frac{x}{2}\right)dx\int_0^t y\,dy$$

$$=t^2\int_0^t f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2t^2\int_0^{t/2}f(x)dx\leqslant 2t^2\int_0^t f(x)dx.$$

不妨假定$\int_0^t f(x)dx>0$,从而就有$\int_0^t f(x)dx\leqslant 2t^2\ (t>0)$.

(2) 应用公式$\int_a^b x^y\,dy=(x^b-x^a)/\ln x$,可知

$$I_1=\int_0^1 dx\int_a^b x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dy,\quad I_2=\int_0^1 dx\int_a^b x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dy.$$

对于 I_1,I_2 中的被积函数,在 $x=0$ 时取值定为 0,则它们都是连续函数.从而交换积分次序,得出

$$I_1=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,\quad I_2=\int_a^b \mathrm{d}y\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

再作变量替换 $x=\mathrm{e}^{-t}$,我们有

$$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1+y)t}\sin t\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1+y)t}\cos t\,\mathrm{d}t.$$

因此立即推得

$$I_1=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+(1+y)^2}=\arctan\left(\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}\right),$$
$$I_2=\int_a^b\frac{(y+1)\mathrm{d}y}{1+(y+1)^2}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}\right).$$

(3) 令 $J=\int_0^u \mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$,则 $4J^2=\int_{-u}^u\int_{-u}^u \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.又记

$$D_1=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant u^2\},\quad D_2=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 2u^2\},$$
$$I_1=\iint_{D_1}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_2=\iint_{D_2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

易知 $I_1\leqslant 4J^2\leqslant I_2$,以及(作极坐标变换)

$$I_1=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^u \mathrm{e}^{-r^2/2}r\mathrm{d}r=2\pi(1-\mathrm{e}^{-u^2/2}),$$
$$I_2=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}u}\mathrm{e}^{-r^2/2}r\mathrm{d}r=2\pi(1-\mathrm{e}^{-u}).$$

由此即可得证.

6.2 重积分的变量替换

定理 6.2.1 设 D,$\widetilde{D}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中由逐段光滑曲线围成的有界闭区域,变换 $T:\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\end{cases}$ $\widetilde{D}\to D$ 是同胚变换,且 $T\in C^{(2)}(\widetilde{D})$.记 $J=J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.若 $f(x,y)$在 D 上可积,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\widetilde{D}} f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

注 特例,在极坐标变换 $x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$下,$J=r$.

定理 6.2.2 设 $\widetilde{\Omega}$,Ω是(x,y,z)空间中的有界闭区域,变换

$$T:\begin{cases}x=x(u,v,w),\\ y=y(u,v,w),\ \widetilde{\Omega}\to\Omega\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$$

是同胚变换,且 $T\in C^{(2)}(\tilde{\Omega})$, $J=J(u,v,w)=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.若 $f(x,y,z)$在 Ω上可积,则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\tilde{\Omega}} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\cdot|J(u,v,w)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

注 (1)特例(i)柱坐标变换 $T:\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,0<r<\infty,0<\theta<2\pi,-\infty<z<\infty\\ z=z,\end{cases}$.此时有 $J=r>0$,而且 $\tilde{\Omega}$变为 Ω,换元公式为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\tilde{\Omega}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z.$$

(2)球坐标变换 $T:\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,0<r<\infty,0<\varphi<\pi,0<\theta<2\pi\\ z=r\cos\varphi,\end{cases}$.此时有

$$J=J(r,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\varphi.$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\tilde{\Omega}} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

例 6.2.1 用极坐标计算下列积分:

(1)设 D是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$与直线 $y=-x$围成的区域. $I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\Big/\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2)设 $D=\{(x,y):x^4+y^4\leqslant 1\}$, $I=\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(3)令 $D=\{(x,y):x^2+4y^2\leqslant 1\}$, $I=\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(4)令 $D=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0,\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1\}$, $I=\iint_D x^n y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(5)令 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant ax\}$, $I=\iint_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(6)设 D是由 $x=0,y=0,x+y=1$所围成的区域, $I=\iint_D \sqrt{\dfrac{xy}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 (1)作极坐标 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$变换,此时(曲线为$(y+a)^2=a^2-x^2$)$D$可表为 $D=\{(r,\theta):-\pi/4\leqslant\theta\leqslant 0,0\leqslant r\leqslant -2a\sin\theta\}$.从而知

$$I=\int_{-\pi/4}^{0}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{-2a\sin\theta} r^2\Big/\sqrt{4a^2-r^2}\,\mathrm{d}r\quad(\text{令 } r=2a\sin t)$$

$$=\int_{-\pi/4}^{0}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{-\theta}2a^2(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=2a^2\int_{-\pi/4}^{0}\left(-\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta=a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).$$

(2) 令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 此时 D 为 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, 以及 $0\leqslant r\leqslant 1/\sqrt[4]{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$,故可得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1/\sqrt[4]{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}r^2\,r\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\tan^2\theta}{1+\tan^4\theta}\mathrm{d}\tan\theta\quad(\text{令 }\tan^4\theta=t)\\&=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{(1+\sqrt{t})t^{-3/4}}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\left[\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\pi/2\sin(\pi/4)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(3) 作变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta/2$, 则积分区域变成 $\widetilde{D}=\{(\theta,r):0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1\}$,且 Jacobi 行列式为 $J=r/2$.从而可得

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)\mathrm{d}r=\frac{5\pi}{32}.$$

(4) 作变换替换 $x=r\cos^4\theta$, $y=r\sin^4\theta(0\leqslant r\leqslant 1)$,易知 Jacobi 行列式 $J=4r\cos^3\theta\sin^3\theta$.从而可得

$$I=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^{2n+1}\cos^{4n+3}\theta\cdot\sin^{4n+3}\theta\mathrm{d}r=\frac{2}{n+1}\int_0^{\pi/2}\cos^{4n+3}\theta\cdot\sin^{4n+3}\theta\mathrm{d}\theta.$$

(5) 令 $x=a/2+r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,则区域 D 变换为 $\widetilde{D}=\{(\theta,r):-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2,0\leqslant r\leqslant a/2\}$.从而可得

$$I=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a/2}r^2\left(\frac{a}{2}+r\sin\theta\right)\sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}r.$$

(6) 作变换 $x=r\cos^2\theta$, $y=r\sin^2\theta$,则区域 D 内部变换成为 $\widetilde{D}=\{(\theta,r):0<\theta<\pi/2,0<r<1\}$,且 Jacobi 行列式 $J=2r\sin\theta\cos\theta$.

$$I=\iint_G r^{\frac{1}{2}}\cos\theta\sin\theta\cdot 2r\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^1 r^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}r=\frac{2}{5}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{1}{20}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{20}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{20}.$$

例 6.2.2 解答下列问题:

(1) 设 $D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$,求 $I=\iint_D\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 证明 $\left(\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2+\int_0^1\mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}/(1+t^2)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

(3) 设 $D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$,求 $I=\iint_D|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(4) 设 $D: 2\leqslant x/(x^2+y^2), y/(x^2+y^2)\leqslant 4$，求 $I=\iint\limits_D \frac{1}{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　(1) 为求积分值，必须解开绝对值，为此令

$$f(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2,$$

$$D_1=\{(x,y): f(x,y)\geqslant 0\},\quad D_2=D\backslash D_1.$$

从而可得

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_D |(f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1\cup D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_D\left(x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{D_1}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\triangleq I_1+I_2.\end{aligned}$$

对积分 I_2, I_1 作变量替换 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}\begin{cases}x-1/2\sqrt{2}=r\cos\theta,\\ y-1/2\sqrt{2}=r\sin\theta,\end{cases}$ 可知

$$\begin{aligned}I&=-\iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant r\leqslant 1}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+2\iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\0\leqslant r\leqslant 1/2}}f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+r\cos\theta,\frac{1}{2\sqrt{2}}+r\sin\theta\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(r^2-\frac{r}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta)\right)r\mathrm{d}r+2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{4}-r^2\right)r\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{2}+4\pi\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\right)=\frac{9}{16}\pi.\end{aligned}$$

(2) 对 $I_1=\int_0^1 \mathrm{e}^{-a^2(1+t^2)}/(1+t^2)\mathrm{d}t$ 作变量替换 $\alpha=\arctan t$，则 $I_1=\int_0^{\pi/4}\mathrm{e}^{-a^2/\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha$；对 $I_2=\left(\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\iint\limits_{[0,a]^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，作替换 $x=r\cos\alpha, y=r\sin\alpha$，则又知

$$I_2=2\int_0^{\pi/4}\int_0^{a/\cos\alpha}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\pi/4}\mathrm{e}^{-a^2/\cos^2\alpha}\mathrm{d}\alpha.$$

综合上述结果，即得所证.

(3) (i) 为求积分值，必须化开函数的绝对值.对此，要从分解积分区域着手.我们用直线 $y+x=\pi$ 分 D 为两个区域(图 6.25)：

$$D_1=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant\pi, 0\leqslant y\leqslant\pi-x\},$$
$$D_2=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant\pi, \pi-x\leqslant y\leqslant\pi\}.$$

对积分 $\iint\limits_{D_2}|\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 用替换 $x=\pi-u, y=\pi-v$，则 $|J|=1$，且 D_2 为

$$\widetilde{D}_2: x+y\geqslant \pi, \pi-u+\pi-v\geqslant \pi,\quad 即\quad u+v\leqslant \pi, u\geqslant 0, v\geqslant 0,$$

而 $\cos(x+y)=\cos(2\pi-u-v)=\cos(u+v)$.从而可知

$$\iint_{D_2}|\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{u+v\leqslant\pi}|\cos(u+v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\iint_{D_1}|\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(ii) 分解 $D_1=D_1'+D_1''$,分界线为 $x+y=\pi/2$(图 6.26)

$$\cos(x+y)\geqslant 0\quad ((x,y)\in D_1'),$$
$$\cos(x+y)\leqslant 0\quad ((x,y)\in D_1'').$$

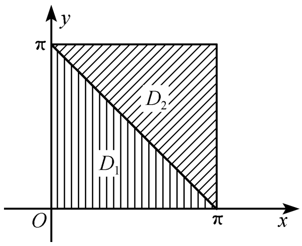


图 6.25

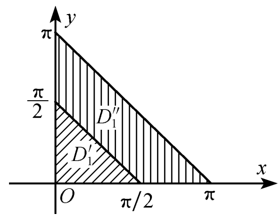


图 6.26

采用极坐标:$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则

$$D_1'=\{(\theta,r): 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2, 0\leqslant r\leqslant \pi/2(\sin\theta+\cos\theta)\},$$
$$D_1''=\{(\theta,r): 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2, \pi/2(\cos\theta+\sin\theta)\leqslant r\leqslant\pi/(\sin\theta+\cos\theta)\}.$$

$$I=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\left\{\int_0^{\pi/2(\sin\theta+\cos\theta)}-\int_{\pi/2(\sin\theta+\cos\theta)}^{\pi/(\sin\theta+\cos\theta)}\right\}\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}=\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin^2(\theta+\pi/4)}=\pi\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_{\pi/2}^{0}=2\pi.$$

(4) 作替换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则区域 D 变为两个区域:

$$\widetilde{D}_1=\{(\theta,r):\cos\theta/4\leqslant r\leqslant\cos\theta/2\},$$
$$\widetilde{D}_2=\{(\theta,r):\sin\theta/4\leqslant r\leqslant\sin\theta/2\}.$$

从而(注意对称性)可知(θ的交点之一为 $\cos\theta/4=\sin\theta/2$)

$$I=2\int_{\arctan(1/2)}^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_{\cos\theta/4}^{\sin\theta/2}\frac{r\mathrm{d}r}{r^2\cos\theta\cdot\sin\theta}=2\int_{\arctan(1/2)}^{\pi/4}\frac{\ln(2\tan\theta)}{\tan\theta}\mathrm{d}(\tan\theta)=(\ln 2)^2.$$

例 6.2.3　试用极坐标替换转化下列积分表达式:

(1) 设 $f\in C(\mathbf{R}^2)$, $D: 0\leqslant x\leqslant 1, 1-x\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$, $I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 设 $D: -a\leqslant x\leqslant a, x^2/a\leqslant y\leqslant a(a>0)$, $f\in C(\mathbf{R}^2)$, $I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(3) 设 $f\in C^{(1)}([0,a])$, $I=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x f'(y)/\sqrt{(a-x)(x-y)}\mathrm{d}y$.

(4) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$, $I=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2}x}f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}y$.

(5) 设 $D: 0 \leqslant \theta, \varphi \leqslant \pi/2, f \in C(D), I = \iint_D f(1 - \sin\theta\sin\varphi)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

解　(1) 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,易知 D 变为区域(图 6.27)

$$\widetilde{D} = \{(r,\theta): 1/(\sin\theta + \cos\theta) \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2\}.$$

由此可知

$$I = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_{\csc(\theta+\pi/4)/\sqrt{2}}^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$$

(或)

$$= \int_{1/\sqrt{2}}^{1} r\mathrm{d}r \int_{\arcsin(1/\sqrt{2}r) - \pi/4}^{3\pi/4 - \arcsin(1/\sqrt{2}r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

(2) 如图 6.28 所示,作直线 $y = x, y = -x (y > 0)$.

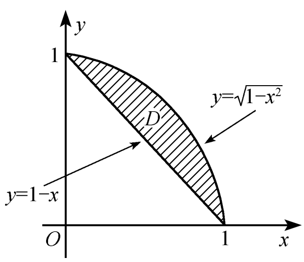


图 6.27

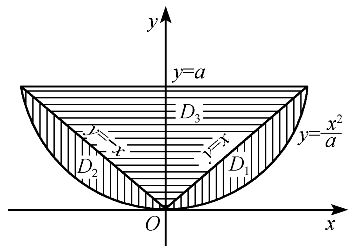


图 6.28

将 D 分成三部分:

$$D_1: 0 \leqslant x \leqslant a, \quad x^2/a \leqslant y \leqslant x;$$

$$D_2: -a \leqslant x \leqslant 0, \quad x^2/a \leqslant y \leqslant -x; \quad D_3: -a \leqslant x \leqslant a, |x| \leqslant y \leqslant a.$$

易知在极坐标变换下,它们变成

$$\widetilde{D}_1: 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4, \quad 0 \leqslant r \leqslant a\sin\theta/\cos^2\theta,$$

$$\widetilde{D}_2: 3\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant a\sin\theta/\cos^2\theta,$$

$$\widetilde{D}_3: \pi/4 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/4, \quad 0 \leqslant r \leqslant a\csc\theta.$$

从而得到

$$I = \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\sin\theta/\cos^2\theta} f(r\cos, r\sin\theta) r\mathrm{d}r + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\csc\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r$$

$$+ \int_{3\pi/4}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\sin\theta/\cos^2\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r.$$

(3) 改写原积分为 $I = \int_0^a f'(y)\mathrm{d}y \int_y^a 1 \Big/ \left[\left(\frac{a-y}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+y}{2}\right)^2\right] \mathrm{d}x$,并令 $x = \frac{a+y}{2} + \frac{a-y}{2}\sin t$,则可得

$$I = \int_0^a f'(y)\mathrm{d}y \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{a-y}{2}\cos t \Big/ \frac{a-y}{2}\cos t\right) \mathrm{d}t = \pi[f(a) - f(0)].$$

(4) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则由原不等式可得

$$0\leqslant r\cos\theta\leqslant 2,\quad r\cos\theta\leqslant r\sin\theta\leqslant\sqrt{2}\cos\theta;$$

$$0\leqslant r\leqslant 2/\cos\theta,\quad 1\leqslant\tan\theta\leqslant\sqrt{2}.$$

从而我们有

$$I=\int_{\pi/4}^{\arctan\sqrt{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2/\cos\theta}rf(r)\mathrm{d}r.$$

(5) (i) 注意到公式

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x,\quad \int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-y^2}}=\frac{\pi}{2},$$

易知$\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}1/\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y$.

(ii) 作变量替换 $x=\sin\theta\cdot\cos\varphi, y=\sin\theta\cdot\sin\varphi$,则可得 $J=\sin\theta\cos\theta$,且可将区域 $D: x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2+y^2\leqslant 1$ 变换为 $\widetilde{D}: 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.从而我们有

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}f(1-\sin\theta\sin\varphi)\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}f(1-\sin\theta\sin\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

注 从上面的例子中可以看出,坐标变换的目的是:化简积分区域和被积函数.应用极坐标变换是因为区域函数具有极角、向径化的特征.因此,坐标变换的方式虽多种多样,但变换的目的只有一个.下面再举若干例证.

例 6.2.4 试对下列平面曲边形区域 D 变作直边形区域 $\widetilde{D}$.

(1) $D: x\geqslant 0, y\geqslant 0, (x/a)^\alpha+(y/b)^\beta\leqslant 1\quad(a,b,\alpha,\beta>0)$.

(2) D 由曲线 $xy=1, xy=2$ 以及直线 $y=4x, y=x$ 所围.

(3) D 由曲线 $y=ax^3, y=bx^3, y^2=px, y^2=qx$ 所围.

(4) $D: |x|+|y|\leqslant 1$.

解 (1) 令 $u=(x/a)^\alpha, v=(y/b)^\beta$,即 $x=au^{1/\alpha}, y=bv^{1/\beta}$.此时,Jacobi 行列式为 $J=\frac{ab}{\alpha\beta}u^{1/\alpha-1}v^{1/\beta-1}$, D 变换为 $\widetilde{D}: u\geqslant 0, v\geqslant 0, u+v\leqslant 1$.

(2) 令 $u=xy, v=y/x$,则 D 变为 $\widetilde{D}: 1\leqslant u\leqslant 2, 1\leqslant v\leqslant 4$.

(3) 令 $y=ux^3, v=y^2/x$,则 D 变为 $\widetilde{D}: a\leqslant u\leqslant b, p\leqslant v\leqslant q$.

(4) 令 $u=x+y, v=x-y$,则 D 变为 $\widetilde{D}: -1\leqslant u\leqslant 1, -1\leqslant v\leqslant 1$.

例 6.2.5 试在下列积分 I 中实施变量替换:

(1) $I=\iint\limits_D\frac{(x+y)\ln(1+y/x)}{\sqrt{2-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 由 $y=0, y=x, x+y=1$ 围成.

(2) $I=\iint\limits_D\frac{y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1+(x+y)^3}}$, $D=\{(x,y): x>0, y>0, x+y<a\}$.

(3) $I=\iint_D x\,dx\,dy$, D 是以 $(x_i, y_i)(i=1,2,3)$ 为顶点的三角形.

(4) 设 $f\in C(\mathbf{R}^2)$, $D=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x\}$, $I=\iint_D f(x,y)dx\,dy$.

解 (1) 令 $u=x+y$, $v=y/x$, 则 D 变为 $\widetilde{D}: 0\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant 1$, 且积分成为 $(J=u/(1+v)^2)$

$$I=\iint_{\widetilde{D}}\frac{u\ln(1+v)}{\sqrt{2-u}}J\,du\,dv=\int_0^1\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}dv\int_0^1\frac{u^2\,du}{\sqrt{2-u}}\quad\left(J=\frac{u}{(1+v)^2}\right).$$

(2) 令 $u=x+y$, $v=x-y$, 则 D 变成 $\widetilde{D}=\{(u,v): 0<u<a, -u<v<u\}$, 且原积分成为

$$I=\frac{1}{4}\int_0^a\frac{du}{\sqrt{1+u^3}}\int_{-u}^{u}(u-v)dv=\sqrt{1+a^3}-1.$$

(3) 令 $t_i\geqslant 0(i=1,2,3)$: $t_1+t_2+t_3=1$, 将三角形内的点表示为

$$\begin{cases}x=t_1x_1+t_2x_2+t_3x_3,\\ y=t_1y_1+t_2y_2+t_3y_3.\end{cases}$$

从而作变量替换

$$\begin{cases}x=x_3+u(x_1-x_3)+v(x_2-x_3),\\ y=y_3+u(y_1-y_3)+v(y_2-y_3).\end{cases}\quad\begin{cases}u\geqslant 0, v\geqslant 0.\\ u+v\leqslant 1.\end{cases}$$

此时 $x=ux_1+vx_2+(1-u-v)x_3$. 因此我们有

$$\begin{aligned}I&=\iint[x_3+u(x_1-x_3)+v(x_2-x_3)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv\\&=2\left(\frac{x^3}{2}+\frac{x_1-x_3}{6}+\frac{x^2-x^3}{6}\right)S=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}S,\end{aligned}$$

其中 S 是该三角形之面积.

(4) 令 $x=u+v$, $y=u-v$; 即 $u=(x+y)/2$, $v=(x-y)/2$. 此时 $|J|=2$, 积分区域 D 变为 $\widetilde{D}=\{(u,v): v\geqslant 0, u\geqslant v, u+v\leqslant 1\}$. 从而可得

$$I=\iint_D f(u+v,u-v)2\,du\,dv=2\int_0^{1/2}dv\int_v^{1-v}f(u+v,u-v)du.$$

例 6.2.6 解答下列问题:

(1) 试求积分 $\iint_D(x\sin\alpha-y\cos\alpha)^2dx\,dy$, $D: x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1$.

(2) 证明公式 $\mathrm{B}(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ $(p>0, q>0)$.

(3) 设 $D: x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant a$, $f\in C(\mathbf{R}^1)$, 证明 $(p,q>0)$

$$I=\iint_D x^py^qf(x+y)dx\,dy=\mathrm{B}(p+1,q+1)\int_0^a u^{p+q+1}f(u)du.$$

解 (1) 令 $x=au$, $y=bv$, 则 D 变成 $\widetilde{D}: u^2+v^2\leqslant 1$, 且 $J=ab$. 得(用极坐标)

$$
\begin{aligned}
I = & ab\Big[a^2\sin^2\alpha\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r \\
& -2ab\cos\alpha\sin\alpha\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r+b^2\cos^2\alpha\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sin^2\theta\cdot r\mathrm{d}r\Big] \\
= & ab\Big[a^2\sin^2\alpha\cdot\frac{\pi}{4}-2ab\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot 0+b^2\cos^2\alpha\cdot\frac{\pi}{4}\Big]=\frac{\pi ab}{4}(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha).
\end{aligned}
$$

(2) 已知 $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$,以及公式

$$
\Gamma(p+1)=p\Gamma(p),\quad \mathrm{B}(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\mathrm{B}(p,q),
$$

故利用递推公式,只需对 $p>1,q>1$ 的情形证之即可.

为此,我们作函数 $f(x,y)=x^{p-1}y^{p-1}\mathrm{e}^{-(x+y)}(x,y\geqslant 0)$,以及考察三个区域:

$$
D_1:0\leqslant x,y\leqslant\frac{R}{2};\quad D_2:x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant R;\quad D_3:0\leqslant x,y\leqslant R.
$$

显然有(二重积分的几何意义)

$$
\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D_3}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
$$

$$
\iint\limits_{D_1}x^{p-1}y^{q-1}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{R}{2}}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{R}{2}}y^{q-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y,
$$

$$
\iint\limits_{D_3}x^{p-1}y^{q-1}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{R}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{R}y^{q-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y.
$$

又对在 D_2 上的积分作变量替换 $x=u(1-v),y=uv$,则 $J=u$,以及

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D_2}x^{p-1}y^{q-1}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\mathrm{d}v\int_0^R u^{p+q-1}\mathrm{e}^{-u}v^{q-1}(1-v)^{p-1}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 v^{q-1}(1-v)^{p-1}\mathrm{d}v\cdot\int_0^R u^{p+q-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{B}(p,q)\int_0^R u^{p+q-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

因此我们得到不等式

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{R}{2}}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{R}{2}}y^{q-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y &\leqslant \mathrm{B}(p,q)\int_0^R u^{p+q-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \\
&\leqslant \int_0^R x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^R y^{q-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

令 $R\to+\infty$,即得

$$
\Gamma(p)\Gamma(q)\leqslant\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q)\leqslant\Gamma(p)\Gamma(q),
$$

$$
\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\quad(p>1,q>1).
$$

(3) 作替换 $x+y=u, y=uv$,则 $J=u$,且 D 变为 $\widetilde{D}$: $0<u\leqslant a, 0\leqslant v\leqslant 1$. 可得

$$I=\iint_D u^p(1-v)^p u^q v^q f(u)u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^a u^{p+q+1}f(u)\mathrm{d}u\int_0^1 v^q(1-v)^q\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^a u^{p+q+1}f(u)\mathrm{d}u\cdot \mathrm{B}(q+1,p+1).$$

例 6.2.7 求解下列积分:

(1) 设 D 是在第一象限中由曲线

$$y^2-x^2=0,\quad y^2-x^2=1,\quad xy=a,\quad xy=b\quad (0<a<b)$$

围成的区域, $I=\iint_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 设 $D: x, y\geqslant 0, x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1$, $I=\iint_D \sqrt{xy}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(3) 设 $D: x, y\geqslant 0, x^3+y^3\leqslant 1$, $I=\iint_D x^2y^3\sqrt{1-x^2-y^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 (1) 令 $u=y^2-x^2, v=xy$,则 Jacobi 行列式为 $J=-1/2(x^2+y^2)$,且 D 变为 $\widetilde{D}$: $0\leqslant u\leqslant 1, a\leqslant v\leqslant b$. 从而可得

$$I=\frac{1}{2}\int_a^b \mathrm{d}v\int_0^1 u^v\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{\mathrm{d}v}{v+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

(2) 令 $u=x^2/a^2+y^2/b^2, y^2/b^2=uv$,即 $x=a\sqrt{u(1-v)}, y=b\sqrt{uv}$. 此时 $J=ab(1-v)^{-1/2}v^{-1/2}/4$,而 D 变为 $\widetilde{D}$: $0\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant 1$. 从而可得

$$I=\iint_{\widetilde{D}}\sqrt{ab}\sqrt{u}(1-v)^{1/4}v^{1/4}u\frac{ab}{4}v^{-1/2}(1-v)^{-1/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{(ab)^{3/2}}{4}\int_0^1 u^{3/2}\mathrm{d}u\int_0^1 v^{-1/4}(1-v)^{-1/4}\mathrm{d}v=\frac{(ab)^{3/2}}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot \mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{(ab)^{3/2}}{10}\frac{[\Gamma(3/4)]^2}{\Gamma(3/2)}=\frac{(ab)^{3/2}}{10}\frac{1}{\Gamma(1/2)/2}[\Gamma(3/4)]^2=\frac{(ab)^{3/2}}{5\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\right]^2.$$

(3) 令 $x^3+y^3=u, y^3=uv$,即 $x=u^{1/3}(1-v)^{1/3}, y=u^{1/3}v^{1/3}$,则

$$J=u^{-1/3}v^{-2/3}(1-v)^{-2/3}/9,$$

且 D 变为 $\widetilde{D}$: $0\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant 1$. 从而知

$$I=\iint_{\widetilde{D}}u^{2/3}(1-v)^{2/3}uv(1-u)^{1/2}\ |J|\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^1 u^{7/3-1}(1-u)^{3/2-1}\mathrm{d}u\int_0^1 v^{1/3}\mathrm{d}v=\frac{1}{9}\mathrm{B}\left(\frac{7}{3},\frac{3}{2}\right)\frac{3}{4}.$$

注 在对积分作变量替换时,常会遇到原区域 D 与变换后的区域 $\widetilde{D}$ 不是一一对应的. 此时,一般说来必须做一些修补工作,例如先切除一部分,作变量替换,再在积分后续过程中补回.

其中常用的是极限过程,举例如下:

设 D:$0\leqslant x\leqslant c$,$ax\leqslant y\leqslant bx$($b>a>0$),$f\in C(D)$,$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.如图 6.29.令 $x+y=u$,$y=uv$,则 Jacobi 行列式 $J=u$,且 D 变换为

$$\widetilde{D}=\left\{(u,v):u\geqslant 0,u(1-v)\leqslant c,\frac{a}{1+a}\leqslant v\leqslant\frac{b}{1+b}\right\}.$$

易知 $u=0$ 对应有 $J=0$,故 D 与 $\widetilde{D}$ 不一一对应.因此再作区域(图 6.30)

$$D_\varepsilon: x\leqslant c,\quad 0<\varepsilon\leqslant x+y,\quad ax\leqslant y\leqslant bx,\quad 0<a<b,$$

$$\widetilde{D}_\varepsilon: 0\leqslant\varepsilon\leqslant u,\quad u(1-v)\leqslant c,\quad \frac{a}{1+a}\leqslant v\leqslant\frac{b}{1+b},\quad b>a>0,$$

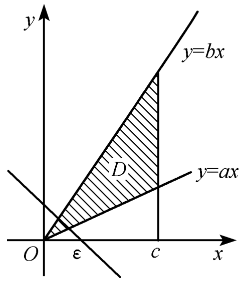


图 6.29

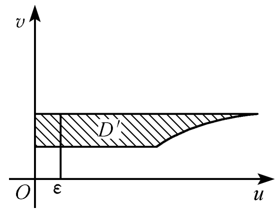


图 6.30

则 D_ε 与 $\widetilde{D}_\varepsilon$ 是一一对应的.从而可得

$$\begin{aligned}I_\varepsilon&=\iint\limits_{D_\varepsilon}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\widetilde{D}_\varepsilon}f(u-uv,uv)u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_{a/(1+a)}^{b/(1+b)}\mathrm{d}v\int_\varepsilon^{c/(1-v)}f(u-uv,uv)u\mathrm{d}u.\end{aligned}\qquad ①$$

由 $f(x,y)$连续知积分 I存在,且 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}I_\varepsilon=I$.注意到式①右端之积分是 ε的连续函数,故有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{\varepsilon\to 0^+}I_\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\iint\limits_{\widetilde{D}_\varepsilon}f(u-uv,uv)u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_{a/(1+a)}^{b/(1+b)}\mathrm{d}v\int_0^{c/(1-v)}f(u-uv,uv)u\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

当然,在十分明显的情况下,为简洁起见,有时也省略上述除 ε的过程.

例 6.2.8 解答下列问题:

(1)设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$,$h>0$,求 $F''(x)$,其中

$$F(x)=\frac{1}{h^2}\int_0^h\mathrm{d}y\int_0^h f(x+y+z)\mathrm{d}z.$$

(2)设 $F(t)=\int_0^t\int_0^t \mathrm{e}^{-tx/y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$($t>0$),试以 $F(t)$表达 $F'(t)$.

(3)设 $D(t)=\{(x,y):(x-t)^2+(y-t)^2\leqslant 1\}$,$t\in\mathbf{R}^1$,令 $F(t)=$

$\iint\limits_{D(t)}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,试证明 $F'(t)=\iint\limits_{D(t)}(x+y)/\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(4) 设 $z=f(x,y)$的等位(曲)线是简单闭曲线,用 $D(t_1,t_2)$表示位于两曲线

$$l_1=\{(x,y):f(x,y)=t_1\},\quad l_2=\{(x,y):f(x,y)=t_2\}\quad (t_1<t_2)$$

之间的区域,试证明

$$I=\iint\limits_{D(t_1,t_2)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{t_1}^{t_2}tF'(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $F(t)$表示位于曲线 l_1 与 $l=\{(x,y):f(x,y)=t,t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$之间的(变动)面积.

(5) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$,试证明

$$\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}f(1-\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^1f(x)\mathrm{d}x.$$

(6) 设 C是 $\mathbf{R}^2$ 中以点 O为中心 r 为半径的圆,D是某个含于 C 内的区域.又点$P=(x,y)\in D$,作以 P为圆心 δ为半径的圆周.记 $l(x,y)$为该圆周位于 D外的弧长.试证明

$$I=\lim_{\delta\to0}\frac{1}{\delta}\iint\limits_D l(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi r.$$

解　(1) 对内层积分作替换,可知 $F(x)=\dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_0^h\mathrm{d}y\int_{x+y}^{h+x+y}f(u)\mathrm{d}u$,从而有

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{1}{h^2}\int_0^h[f(h+x+y)-f(x+y)]\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{h^2}\left(\int_{x+h}^{x+2h}f(y)\mathrm{d}y-\int_x^{x+h}f(y)\mathrm{d}y\right),\\F''(x)&=\frac{1}{h^2}[f(2h+x)-2f(h+x)+f(x)].\end{aligned}$$

(2) 作变量替换 $x=tu,y=tv\ (t>0)$,则得

$$F(t)=\lambda t^2\quad\left(\lambda=\int_0^1\int_0^1\mathrm{e}^{-u/v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right).$$

从而对 t求导即知 $F'(t)=2\lambda t=2\lambda t^2/t=2F(t)/t$.

(3) 作变量替换 $x-t=r\cos\theta,y-t=r\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$,则

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{(t+r\cos\theta)^2+(t+r\sin\theta)^2}\,r\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}\Phi(\theta,t)\mathrm{d}\theta\quad\left(\Phi(\theta,t)=\int_0^1\sqrt{(t+r\cos\theta)^2+(t+r\sin\theta)^2}\,r\mathrm{d}r\right),\end{aligned}$$

易知求导可在积分号下进行,我们有

$$\begin{aligned}F'(t)&=\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Phi(\theta,t)}{\partial t}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{(t+r\cos\theta)+(t+r\sin\theta)}{\sqrt{(t+r\cos\theta)^2+(t+r\sin\theta)^2}}r\mathrm{d}r\\&=\iint\limits_{D(t)}(x+y)/\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(4) 假设 $F(t)$在$[t_1,t_2]$上可微,则由 $F(t)$的递增性可知 $F'(t)\geqslant 0$($t\in[t_1,t_2]$).对区间$[t_1,t_2]$作分划 Δ:$t_1=\bar{t}_0<\bar{t}_1<\cdots<\bar{t}_n=t_2$,并注意不等式 $\bar{t}_i\leqslant f(x,y)\leqslant \bar{t}_{i+1}$($(x,y)\in D(\bar{t}_i,\bar{t}_{i+1})$),以及积分的可加性,我们有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\bar{t}_i\cdot\Delta D(\bar{t}_i,\bar{t}_{i+1})\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\iint\limits_{D(\bar{t}_i,\bar{t}_{i+1})}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\triangleq I\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\bar{t}_{i+1}\Delta D(\bar{t}_i,\bar{t}_{i+1}),\qquad ①$$

其中 $\Delta F(\bar{t}_i,\bar{t}_{i+1})=F(\bar{t}_{i+1})-F(\bar{t}_i)$是区域 $D(\bar{t}_i,\bar{t}_{i+1})$的面积.由此知存在 $\tilde{t}_i$:$\bar{t}_i<\tilde{t}_i<\bar{t}_{i+1}$,成立中值公式

$$\Delta D(\bar{t}_i,\bar{t}_{i+1})=F'(\tilde{t}_i)\Delta\bar{t}_i\quad(\Delta\bar{t}_i=\bar{t}_{i+1}-\bar{t}_i).$$

因为有表达式

$$\bar{t}_i=\tilde{t}_i+\alpha_i^{(1)}\cdot\Delta\bar{t}_i,\quad \bar{t}_{i+1}=\tilde{t}_i+\alpha_i^{(2)}\Delta\bar{t}_i$$

(其中 $\alpha_i^{(1)},\alpha_i^{(2)}$ 是 $\Delta\bar{t}_i\to 0$ 时的无穷小量),所以式①可写为

$$\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i^{(1)}F'(\tilde{t}_i)\Delta\bar{t}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{t}_iF'(\tilde{t}_i)\Delta\bar{t}_i\leqslant I\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{t}_iF'(\tilde{t}_i)\Delta\bar{t}_i+\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i^{(2)}F'(\tilde{t}_i)\Delta\bar{t}_i.$$

由此知当分割的子区间长度$\|\Delta\|\to 0$ 时,可得 $I=\int_{t_1}^{t_2}tF'(t)\mathrm{d}t$.

特例　设 $f(x,y)=x^2+y^2$,$t_1=1$,$t_2=3$,则 $F(t)=\pi(t-1)$,$F'(t)=\pi$,且有

$$\iint\limits_{D(t_1,t_2)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_1^3t\mathrm{d}t=4\pi.$$

(5) 注意到有积分公式$\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1f(1-x)\mathrm{d}x$,以及

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-y^2}}=\frac{\pi}{2},$$

可知 $I=\frac{\pi}{2}\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1f(1-x)\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.由此可得

$$I=\iint\limits_D\frac{f(1-x)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(D:x,y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant 1).$$

作变量替换 $x=\sin\theta\cos\varphi$,$y=\sin\theta\sin\varphi$,则 $J=\sin\theta\cos\theta$,且 D 变为 $\widetilde{D}$:$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$,$0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$.从而我们有

$$I=\iint\limits_{\widetilde{D}}f(1-\sin\theta\cos\varphi)\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}f(1-\sin\theta\cos\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta.$$

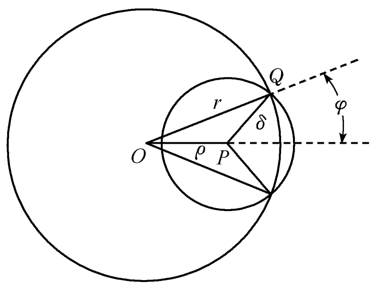


图 6.31

由此即得所证.

(6) 设 $\mathbf{R}^2$ 的坐标系原点位于 C 的圆心, P 位于 Ox 轴并采用极坐标表示:$(x,y)=(\rho,\theta)$.此时 $l(x,y)=L(\rho)$,以及当 $0\leqslant\rho\leqslant r-\delta$ 时有 $L(\rho)=0$.从而对 $\rho: r-\delta\leqslant\rho\leqslant r$,就有(图 6.31)

$$L(\rho)=2\delta\varphi=2\delta\arccos\left(\frac{r^2-\rho^2-\delta^2}{2\rho\delta}\right).$$

从而有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\int_0^{2\pi}\int_0^r L(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^2}\int_0^{2\pi}\int_{r-\delta}^r 2\delta\rho\arccos\left(\frac{r^2-\rho^2-\delta^2}{2\rho\delta}\right)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\&=\lim_{\delta\to 0}\frac{4\pi}{\delta}\int_{r-\delta}^r\rho\arccos\left(\frac{r^2-\rho^2-\delta^2}{2\rho\delta}\right)\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

令 $\rho=r-\delta u$,可得

$$I=\lim_{\delta\to 0}4\pi\int_0^1(r-\delta u)\arccos\left(\frac{2ur-\delta(1+u^2)}{2(r-\delta u)}\right)\mathrm{d}u.$$

注意到被积函数在 $(u,\delta)\in[0,1]\times[0,r/2]$ 上连续,积分区域有界,故又知

$$\begin{aligned}I&=4\pi\int_0^1\lim_{\delta\to 0}(r-\delta u)\arccos\left(\frac{2ur\cdot\delta(1+u)^2}{2(r-\delta u)}\right)\mathrm{d}u\\&=4\pi\int_0^1 r\arccos u\,\mathrm{d}u\quad(\text{分部积分})\\&=4\pi r(u\arccos u)\Big|_0^1+4\pi r\int_0^1\frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\\&=0+4\pi r\left(-\sqrt{1-u^2}\right)\Big|_0^1=4\pi r.\end{aligned}$$

例 6.2.9　求由下列曲面围成的立体体积 V.

(1) $z=0,z=x^2+y^2;x^2+y^2=x,x^2+y^2=2x$.

(2) $z=x^2+2y^2,z=2-x^2$.

(3) $x=0,y=0,z=0;x^2+y^2=R^2,z=xy$.

(4) $z=0;x^2+y^2=az,x^2+y^2=ay(a>0)$.

解　(1) 易知该立体是圆锥 $z=x^2+y^2$ 被两圆柱

$$(x-1)^2+y^2=1,\quad\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

所截之截体,它在 xOy 平面上的投影用极坐标表示可写为 $-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\cos\theta\leqslant r\leqslant 2\cos\theta$.从而可得

$$V=\frac{15}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{15}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)=\frac{45}{32}\pi.$$

(2) 易知此立体是椭球抛物面 $z=x^2+2y^2$ 与抛物面 $z=2-x^2$ 所围的空间区域.若它的投影区域记为 D,则 D 的边界曲线是该两曲面的交线在 xOy 平面上的投影.消去 z 即知边界为 $x^2+y^2=1$.从而可得

$$\begin{aligned}V&=\iint_D(2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D(x^2+2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint_D(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r\\&=2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]\Big|_0^1\mathrm{d}\theta=\pi.\end{aligned}$$

(3) 易知该立体是圆柱 $x^2+y^2=R^2$ 与双曲抛物面 $z=xy$ 所截出的空间,它在 xOy 平面上的投影为 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$,$0\leqslant r\leqslant R$,故应用极坐标变换可得

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{R^4}{8}.$$

(4) 易知该立体在 xOy 平面上之投影区域 D 之边界曲线为 $x^2+y^2=ay$,从而可得(采用极坐标)

$$V=\iint_D(x^2+y^2)/a\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sin\theta}\frac{r^3\mathrm{d}r}{a}=\frac{a^3}{4}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3a^3}{32}\pi.$$

例 6.2.10　解答下列问题:

(1) 求由平面 $z=0$,抛物面 $2z=x^2/a^2+y^2/b^2$,以及用球面 $x^2+y^2+(z-c)^2=c^2$ 与上述抛物面的交线作准线的正柱面($a,b,c>0$)围成的立体体积 V.

(2) 求由椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$ ($z>0$;$a,b,c>0$)围成的立体体积 V.

(3) 求由椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 与圆柱面

$$(x^2/a^2+y^2/b^2)^2=x^2/a^2-y^2/b^2\quad(a,b,c>0)$$

围成的立体体积 V.

(4) 设 $a>0$,$b>0$,$c>0$,求由曲面 $\dfrac{x^n}{a^n}+\dfrac{y^n}{b^n}+\dfrac{z^n}{c^n}=1$ 所围立体之体积 V.

(5) 已知两个球的半径各为 $a,b(a>b)$,且小球球心位于大球球面上,试求小球位于大球内的那一部分立体之体积 V.

(6) 求曲面 $x^2+y^2+az=4a^2$ 将球 $x^2+y^2+z^2\leqslant4az$ 分成两部分立体之体积比($a>0$).

解　(1) 易知交线在 xOy 平面上的投影为曲线

$$l: x^2+y^2+(x^2/2a+y^2/2b-c)^2=c^2,$$

且记 l 所围平面区域为 D,故知 $V=\iint\limits_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 $z=(x^2/a^2+y^2/b^2)/2$.为求 V,显然应采用极坐标变换:即令 $x=\sqrt{2a}\,r\cos\theta, y=\sqrt{2b}\,r\sin\theta$.此时有 $J=2\sqrt{ab}\,r$,D 变成 $\widetilde{D}: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2(c-a-b)}$.从而可得

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2(c-a-b)}} r^2\cdot 2\sqrt{ab}\,r\,\mathrm{d}r=4\sqrt{ab}(c-a-b)^2.$$

(2) 易知此两曲面的交线在 xOy 平面上的投影为 $x^2/a^2+y^2/b^2=1/2$,记其所围区域为 D,则 $V=\iint\limits_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 $z=c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}-c\sqrt{x^2/a^2-y^2/b^2}$.显然应采用极坐标变换来求积分,即令 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$.由此可得

$$V=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1/\sqrt{2}}(r\sqrt{1-r^2}-r^2)\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}abc(2-\sqrt{2}).$$

(3) 记曲线 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ 所围区域为 $D: (x^2/a^2+y^2/b^2)^2\leqslant x^2/a^2-y^2/b^2$,且由对称性知只需考察位于第一象限中的 D,记为 D_1,故有 $V=8\iint\limits_{D_1} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 $z=c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}$.令 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$,则

$$V=8abc\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r=\frac{2abc}{9}(3\pi+20-16\sqrt{2}).$$

(4) 由题设知该立体为 $\Omega=\{(x,y,z):(x,y)\in D, 0\leqslant z\leqslant\sqrt[n]{1-(x^n/a^n+y^n/b^n)}\}$,其中 D 是它在 xOy 平面投影:

$$D=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant b\sqrt[n]{1-x^n/a^n}\},$$

从而可得(用坐标变换 $x=ar\cos^{2/n}\theta, y=br\sin^{2/r}\theta$,而且 $J=\dfrac{2}{n}abr\cos^{2/n-1}\theta\cdot\sin^{2/n-1}\theta$)

$$\begin{aligned}V&=\frac{2abc}{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2/n-1}\theta\cdot\sin^{2/n-1}\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt[n]{1-r^n}\,\mathrm{d}r\\&=\frac{abc}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\int_0^1 r\sqrt[n]{1-r^n}\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

对上式右端的积分,再作变换 $r=t^{1/n}$,我们有

$$\int_0^1 r\sqrt[n]{1-r^n}\,\mathrm{d}r=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{2/n-1}(1-t)^{1/n}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{2}{n},1+\frac{1}{n}\right).$$

因此最后得到

$$V=\frac{abc}{n^2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\mathrm{B}\left(\frac{2}{n},1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{abc}{3n^2}[\Gamma(1/n)]^3/\Gamma(3/n).$$

(5) 建立坐标系：以小球球心为原点，Oz 轴穿过大球中心线，如图 6.32，则大、小球的方程可各写为

$$x^2+y^2+(z-a)^2=a^2,\quad x^2+y^2+z^2=b^2.$$

易知此两球之交线为

$$l: x^2+y^2=b^2(1-b^2/4a^2),\quad z=b^2/2a.$$

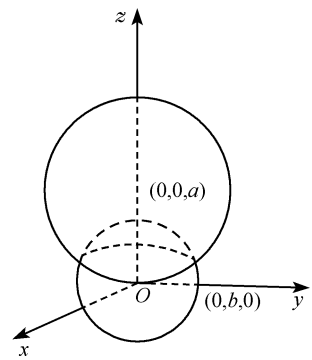


图 6.32

它在 xOy 平面上的投影就是 l.记 l 所围区域为 D，则

$$V=\iint_D\sqrt{b^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_D\left(a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}}\sqrt{b^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}}(a-\sqrt{a^2-r^2})\,r\,\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\left\{-\frac{1}{3}(b^2-r^2)^{3/2}-\frac{ar^2}{2}-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{3/2}\right\}\Bigg|_0^{\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2}}=\left(\frac{2}{3}-\frac{b}{4a}\right)\pi b^3.$$

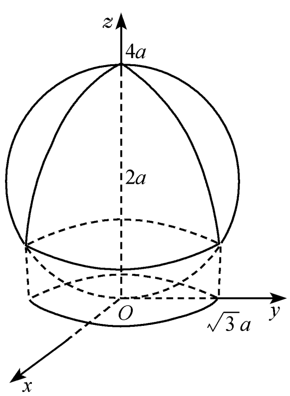


图 6.33

(6) 易知该两曲面之交线为 $z^2-5az+4a^2=0$.由此知，$z=a$ 或 $z=4a$.若 $z=4a$，则得两曲面之交点 $(0,0,4a)$；若 $z=a$，则得两曲面的交线在 xOy 平面上的投影曲线为(图 6.33) $x^2+y^2=3a^2$，$z=0$.

又，该两个曲面在柱坐标系下的方程分别是 $r^2+az=4a^2$，$r^2+z^2=4az$，即

$$z=(4a^2-r^2)/a;\quad z=2a\pm\sqrt{4a^2-r^2}.$$

由此知，抛物面下与球面上所围成之立体体积为

$$V_1=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}a}\left[\frac{4a^2-r^2}{a}-(2a-\sqrt{4a^2-r^2})\right]r\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{37}{6}\pi a^3.$$

而抛物面上与球面下所围立体体积 $V_2=V-V_1$ (V 是球体体积)，即 $V_2=32\pi a^3/3-37\pi a^3/6=27\pi a^3/6$.最后有 $V_1/V_2=37/27$.

例 6.2.11　求由下列曲面所围立体 Ω 之体积 V：

(1) $\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^p+\left(\frac{z}{c}\right)^p\leqslant 1\quad(x,y,z\geqslant 0; a,b,c>0)$.

(2) 圆锥面 $z=a-\sqrt{x^2+y^2}$ ($a>0$)，平面 $x=0$，$z=x$.

(3) 圆柱体 $x^2+y^2=ax$ 内部，平面 $z=0$ 上方，曲面 $y^2=a^2-az$ 的下方.

解 (1) 记曲面在 xOy 平面上的投影为 D,则 $D:(x/a)^p+(y/b)^p\leqslant 1$.对 $V=\iint\limits_D c[1-(x/a)^p-(y/b)^p]^{1/p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 作变量替换 $(x/a)^p=u,(y/b)^p=v$,则 $J=abu^{1/p-1}v^{1/p-1}/p^2$.且 D 变为 $\widetilde{D}:u\geqslant 0,v\geqslant 0,u+v\leqslant 1$.从而可得

$$\begin{aligned}V&=c\iint\limits_{\widetilde{D}}(1-u-v)^{1/p}\frac{ab}{p^2}u^{1/p-1}v^{1/p-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{abc}{p^2}\iint\limits_{\widetilde{D}}u^{1/p-1}v^{1/p-1}(1-u-v)^{1/p+1-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{abc}{p^2}\frac{\Gamma(1/p)\Gamma(1/p)\Gamma(1/p+1)}{\Gamma(1/p+1/p+1/p+1)}=\frac{abc}{3p^2}\frac{\Gamma^3(1/p)}{\Gamma(3/p)}.\end{aligned}$$

(2) 易知该圆锥面与平面 $z=x$ 之交线在 xOy 平面上的投影为 $x^2+y^2=(a-x)^2$,即 $y^2=a^2-2ax$.若用极坐标表示,则为 $r^2\sin^2\theta=a^2-2ar\cos\theta$,也即

$$r^2=r^2\cos^2\theta-2ar\cos\theta+a^2\quad 或\quad r=a/(1+\cos\theta).$$

从而可得

$$\begin{aligned}\frac{V}{2}&=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a/(1+\cos\theta)}(a-r-r\cos\theta)r\mathrm{d}r\\&=\frac{a^3}{6}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\cos\theta)^3}=\frac{a^3}{24}\int_0^{\pi/2}\sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^3}{24}\int_0^{\pi/2}\left[1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\sec^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{a^3}{12}\left[\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{a^3}{9}.\end{aligned}$$

(3) 平行移动坐标轴,将原点移到 $(a/2,0,0)$ 处,如图 6.35,易知此时抛物柱面方程式不变,而圆柱体方程变为 $x^2+y^2=(a/2)^2$.因此,我们采用柱坐标变换,可得体积的积分公式写为

$$\begin{aligned}V&=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a/2}\left(a-\frac{r^2\sin^2\theta}{a}\right)r\mathrm{d}r=4\int_0^{\pi/2}\left(\frac{a^3}{8}-\frac{a^3}{64}\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\&=4\left(\frac{a^3}{8}-\frac{a^3}{64}\frac{1}{2}\right)2\pi=\frac{15}{64}\pi a^3.\end{aligned}$$

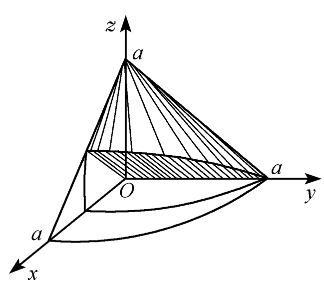


图 6.34

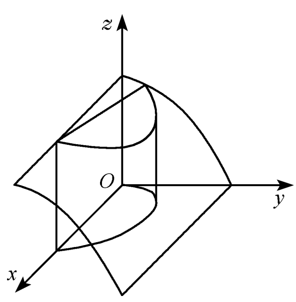


图 6.35

例 6.2.12　试求下列曲线围成的区域 D 的面积 S：

(1) $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1\quad (a_1b_2-a_2b_1)=\delta>0)$.

(2) $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ 与 $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$ 相交部分.

解　(1) 令 $a_1x+b_1y+c_1=r\cos\theta, a_2x+b_2y+c_2=r\sin\theta$,即

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\delta}[r(b_2\cos\theta-b_1\sin\theta)-c_1b_2+b_1c_2], \\ y=\dfrac{1}{\delta}[r(a_1\sin\theta-a_2\cos\theta)-a_1c_2+a_2c_1]. \end{cases}$$

从而可得 $J=r(a_1b_2-b_1a_2)/\delta^2=r/\delta$, 以及 $S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\delta}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{\delta}$.

(2) 采用极坐标,则相交部分之区域 D 为

$$D=\left\{(r,\theta): a[(\sin\theta+\cos\theta)-\sqrt{\sin 2\theta}\leqslant r\leqslant 2a\sqrt{\sin 2\theta};\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}\right\}.$$

由此可得(如图 6.36,注意,D 关于向径 $\theta=\pi/4$ 对称)

$$S=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{\left(\arcsin\frac{1}{8}\right)/2}^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_{a[(\sin\theta+\cos\theta)-\sqrt{\sin 2\theta}]}^{2a\sqrt{\sin 2\theta}}r\mathrm{d}r$$

$$=a^2\int_{\arcsin\left(\frac{1}{8}\right)/2}^{\pi/4}\left[2\sin 2\theta+2(\sin\theta+\cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta}-1\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\left[\cos\left(\arcsin\frac{1}{8}\right)-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}\right]$$

$$+2a^2\int_{\arcsin\left(\frac{1}{8}\right)/2}^{\pi/4}(\sin\theta+\cos\theta)\sqrt{\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta.$$

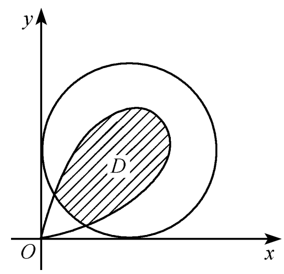


图 6.36

注意到公式 $\cos\left(\arcsin\frac{1}{8}\right)=\sqrt{1-1/64}=3\sqrt{7}/8$,以及

$$-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{8}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{8}\right)=\frac{-1}{2}\arccos\frac{1}{8},$$

并作变量替换 $\theta+\pi/4=t$,我们有

$$S=a^2\left(\frac{3\sqrt{7}}{8}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}+2\sqrt{2}\int_{\pi/4+\arcsin(1/8)/2}^{\pi/2}\sqrt{-\cos 2t}\sin t\mathrm{d}t\right).$$

计上式右端括号内之第二项为 I,则

$$I=2\int_{\pi/2}^{\arcsin(-1/8)/2}\sqrt{1-(\sqrt{2}\cot)^2}\mathrm{d}(\sqrt{2}\cos t).$$

用替换 $\sqrt{2}\cos t=\sin u$,又得

$$I=2\int_0^{\arcsin(\sqrt{7}/2\sqrt{2})}\cos^2 u\mathrm{d}u=\arcsin\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{7}}{8}.$$

从而可知

$$S = a^2\left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right).$$

记 $\alpha = \arcsin(\sqrt{7}/2\sqrt{2}) - \dfrac{1}{2}\arccos(1/8)$,则

$$\sin\alpha = 3\sqrt{7}/8\sqrt{2} - \sqrt{7}/8\sqrt{2} = \sqrt{14}/8,\quad \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}.$$

因此最后导出 $S = a^2(\sqrt{7}/2 + \arcsin(\sqrt{14}/8))$.

例 6.2.13 求由下列曲线围成的区域面积 S.

(1) $x=0, y=0, \sqrt[4]{x/a} + \sqrt[4]{y/b} = 1 \quad (a>0, b>0)$.

(2) $(x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 = xy/c^2 \quad (a, b, c>0)$.

(3) 第一象限中 $(x/a + y/b)^3 = xy \quad (a>0, b>0)$.

(4) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2), x^2+y^2 = a^2$ (指的是 $x^2+y^2 \geqslant a^2$ 的部分).

(5) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = x/h + y/k \quad (a, b, h, k>0)$.

(6) $x^3/a^3 + y^3/b^3 = x^2/h^2 + y^2/k^2 \quad (a, b, h, k>0$;第一象限).

解 (1) 作广义极坐标变换:$x = ar^8\cos^8\theta, y = br^8\sin^8\theta$,则 $J = 64abr^{15}\cos^7\theta \cdot \sin^7\theta$,且原区域 D 变为 $\widetilde{D}$:$0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, 0 \leqslant r \leqslant 1$,故可得

$$S = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 64ab\int_0^{\pi/2}\cos^7\theta\sin^7\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^{15}\mathrm{d}r$$
$$= 4ab\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)^3\sin^7\theta\mathrm{d}\sin\theta = \frac{ab}{70}.$$

(2) 作广义极坐标变换:$x = ar\cos\theta, y = br\sin\theta$,则 $J = abr$.此时,原曲线可表示为方程 $r^2 = \dfrac{ab}{c^2}\sin\theta\cos\theta$.从而可知其区域面积为

$$S = 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{ab\sin\theta\cos\theta/c^2}} abr\mathrm{d}r = \frac{a^2b^2}{c^2}.$$

(3) 作广义极坐标变换:$x = ar\cos^2\theta, y = br\sin^2\theta$.则原曲线有表示式 $r = ab\sin^2(2\theta)/4$,且 $J = rab\sin(2\theta)$.从而可得

$$S = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{ab\sin^2(2\theta)/4} rab\sin(2\theta)\mathrm{d}r = \frac{a^3b^3}{3^2}\int_0^{\pi/2}\sin^5(2\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{a^3b^3}{60}.$$

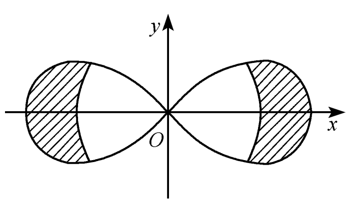


图 6.37

(4) 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,则所围区域 D 之边界曲线为 $r^2 = 2a^2\cos 2\theta, r^2 = a^2$.由对称性可知,只需计及 D 在第一象限部分 $\widetilde{D}$:$0 \leqslant \theta \leqslant \pi/6, a \leqslant r \leqslant a\sqrt{2\cos 2\theta}$.从而可得(图 6.37)

$$S = 4\int_0^{\pi/6}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} r\mathrm{d}r = (3\sqrt{3} - \pi)a^2/3.$$

(5) 将曲线改写成$\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{b}{2k}\right)^2=\frac{a^2}{4h^2}+\frac{b^2}{4k^2}$,易知应作变量替换:

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{2h}=r\cos\theta,\quad \frac{y}{b}-\frac{b}{2k}=r\sin\theta.$$

此时,有 $J=abr$,而区域变为 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$,$0\leqslant r\leqslant\sqrt{a^2/h^2+b^2/k^2}/2$.从而可得

$$S=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2/h^2+b^2/k^2}/2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$$

(6) 令 $x=ar\cos^{2/3}\theta$, $y=br\sin^{2/3}\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$,则原曲线表示为

$$r=\frac{a^2}{h^2}\cos^{4/3}\theta+\frac{b^2}{k^2}\sin^{4/3}\theta,$$

且有 $J=\frac{2}{3}abr\cos^{-1/3}\theta\cdot\sin^{-1/3}\theta$.从而可得

$$\begin{aligned}S&=\frac{2ab}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^{-1/3}\theta\cdot\sin^{-1/3}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{a^2}{h^2}\cos^{4/3}\theta+\frac{b^2}{k^2}\sin^{4/3}\theta}r\mathrm{d}r\\&=\frac{ab}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^{-1/3}\theta\sin^{-1/3}\theta\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^{4/3}\theta+\frac{b^2}{k^2}\sin^{4/3}\theta\right)^2\mathrm{d}\theta\\&=\frac{ab}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{a^4}{h^4}\sin^{-1/3}\theta\cdot\cos^{7/3}\theta+\frac{b^4}{k^4}\sin^{7/3}\theta\cos^{-1/3}\theta+\frac{2a^2b^2}{h^2k^2}\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{ab}{3}\left[\frac{a^2b^2}{h^2k^2}+\frac{a^4}{2h^4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)+\frac{b^4}{2k^4}\mathrm{B}\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)\right]\\&=\frac{ab}{3}\left[\frac{a^2b^2}{h^2k^2}+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)\right].\end{aligned}$$

例 6.2.14 解答下列问题:

(1) 设 Ω是曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy(a>0$ 且位于第一象限)所围立体.求

$$I=\iiint_\Omega\frac{xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2}.$$

(2) 记 Ω: $x,y,z\geqslant0$ 以及 $x+y+z\leqslant1$,求

$$I=\iiint_\Omega x^1y^9z^8w^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\quad(w=1-x-y-z).$$

(3) 记 Ω为 $x^2+y^2\leqslant2az$,$x^2+y^2+z^2\leqslant3$ 所围之立体,求

$$I=\iiint_\Omega(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(4) 记 Ω为 $x^2+(y-z)^2/2=R^2$,$z=0$,$z=h$所围之立体,求

$$I=\iiint_\Omega(y-z)\arctan z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解　(1) 采用球坐标

$$x = r\sin\varphi\sin\theta,\quad y = r\sin\varphi\cos\theta,\quad z = r\cos\varphi,$$

易知 $J = r^2\sin\varphi$,而曲面可表示为 $r^2 = a^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta$.从而可得

$$I = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r = \frac{a^4}{144}.$$

(2) 作区域 $\Omega(t) = \{(x,y,z): x,y,z\geqslant 0, x+y+z\leqslant t\}$,且令

$$I(t) = \iiint_{\Omega(t)} x^1y^9z^8(t-x-y-z)^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

则作替换 $x = tu, y = tv, z = ts$,易知 $I(t) = t^{25}I(1)$.

令 $J = \int_0^{+\infty} I(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$,我们有

$$J = \int_0^{+\infty} I(1)t^{25}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = I(1)\Gamma(26) = I(1)(25\,!).$$

另一方面,又有

$$J = \int_0^{+\infty}\left(\iiint_{\Omega(t)} x^1y^9z^8(t-x-y-z)^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

作替换 $r = t-x-y-z$,可得

$$J = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-z}x^1y^9z^8r^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}r = \Gamma(2)\Gamma(10)\Gamma(9)\Gamma(5).$$

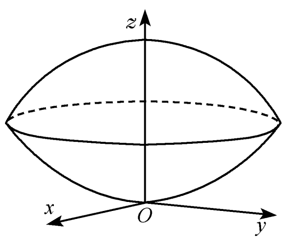


图 6.38

最后知 $I = I(1) = \Gamma(2)\Gamma(10)\Gamma(9)\Gamma(5)/(25\,!)$.

(3) 展开 $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$,则由对称性可知

$$\iiint_\Omega 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega 2yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega 2zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

从而可得(分成两个积分,采用极坐标变换),如图 6.38.

$$\begin{aligned}I &= \int_0^a\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant 2az}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_0^{\sqrt{3}a}\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant 3a^2-z^2}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^a\mathrm{d}z\left(2\pi\int_0^{\sqrt{2az}}(r^2+z^2)r\mathrm{d}r\right) + \int_0^{\sqrt{3}a}\mathrm{d}z\left(2\pi\int_0^{\sqrt{3a^2-z^2}}(r^2+z^2)r\mathrm{d}r\right)\\ &= \frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right).\end{aligned}$$

(4) 令 $y-z = \sqrt{2}v, x = u, z = w$,则 $J = \sqrt{2}$,且立体 Ω 变为 $\bar{\Omega}: u^2+v^2\leqslant R^2, 0\leqslant w\leqslant h$.从而可得

$$I = \int_0^h\mathrm{d}w\iint_{u^2+v^2\leqslant R^2}\sqrt{2}v\cdot\arctan w\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= 2\int_0^h \arctan w \, \mathrm{d}w \iint\limits_{u^2+v^2=R^2} v \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0 .$$

例 6.2.15 计算下列三重积分：

(1) 设 $\Omega: x, y, z \geqslant 0, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{\dfrac{1 - x^2 - y^2 - z^2}{1 + x^2 + y^2 + z^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(2) 设 Ω是由曲面 $z = (x^2 + y^2)/m, z = (x^2 + y^2)/n; xy = a^2, xy = b^2; y = \alpha x, y = \beta x$ ($0 < a < b, 0 < \alpha < \beta, 0 < m < n$;第一象限)围成的立体.

$$I = \iiint\limits_{\Omega} xyz \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

解 (1) 易知应采用球坐标变换,我们有

$$I = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - r^2}{1 + r^2}} r^2 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{(1 - r^2)r^2}{\sqrt{1 - r^4}} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^1 \frac{r^2 \mathrm{d}r}{\sqrt{1 - r^4}} - \int_0^1 \frac{r^4 \mathrm{d}r}{\sqrt{1 - r^4}}\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\left(\frac{4\pi^2}{\Gamma^2(1/4)} - \frac{1}{6}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\right) .$$

(2) 作变换 $u = xy, y = vx, z = z$,即

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad y = \sqrt{uv}, \quad z = z, \quad (u, v, w) \in \widetilde{\Omega},$$

$$\widetilde{\Omega} = \left\{ (u, v, z): \frac{u(v + v^{-1})}{n} \leqslant z \leqslant \frac{u(v + v^{-1})}{m}, \quad a^2 < u < b^2, \quad \alpha < v < \beta \right\} .$$

此时 $J = 1/2v > 0$.从而可得

$$I = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} u \mathrm{d}u \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\mathrm{d}v}{v} \int_{u(v+v^{-1})/n}^{u(v+v^{-1})/m} z \mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)\int_{a^2}^{b^2} u^3 \mathrm{d}u \int_{\alpha}^{\beta}\left(v + \frac{1}{v}\right)^2 \frac{\mathrm{d}v}{v}$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)(b^8 - a^8)\left[(\beta^2 - \alpha^2)\left(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right) + 4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right] .$$

例 6.2.16 解答下列问题：

(1) 设 $f(u)$在$[0, \infty)$上可微,试求极限

$$I = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\pi t^4} \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2 \leqslant t^2} f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

(2) 设 $h = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} > 0$, $f(x)$在$[-h, h]$上连续,证明

$$\iiint\limits_{\Omega} f(\alpha x + \beta y + \gamma z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi\int_{-1}^1 (1 - \zeta^2) f(h\zeta) \mathrm{d}\zeta,$$

其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

解 (1) 易知对积分应采用球坐标变换,我们有

$$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^4}\int_0^t r^2 f(r)\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\lim_{t\to 0^+}\frac{4\int_0^t r^2 f(r)\mathrm{d}r}{t^4}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2 f(t)}{t^3}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}=\begin{cases} f'(0), & f(0)=0,\\ \infty, & f(0)\neq 0.\end{cases}$$

(2) 选 ζ轴方向为平面 $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ 之单位法向量,再选取 ξ,η轴为此平面上之两垂直轴.构造正交变换

$$\begin{cases}\xi=a_1x+b_1y+c_1z,\\ \eta=a_2x+b_2y+c_2z,\\ \zeta=\dfrac{1}{h}(\alpha x+\beta y+\gamma z),\end{cases}\quad |J|=1.$$

变换 T 把 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant 1$ 变为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$,于是有

$$\iiint_{\Omega} f(\alpha x+\beta y+\gamma z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant 1} f(h\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$=\int_{-1}^1\mathrm{d}\zeta\iint_{\xi^2+\eta^2\leqslant 1-\zeta^2} f(h\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\pi\int_{-1}^1(1-\zeta^2)f(h\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

例 6.2.17 求由下列所指曲面围成的立体 Ω的体积 V,其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}>0,\quad h_i>0(i=1,2,3).$$

(1) $a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1$, $a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2$, $a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3$.

(2) $az=a^2-x^2-y^2$, $z=a-x-y$, $x=0$, $y=0$, $z=0(a\geqslant 0)$.

(3) $(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$.

解 (1) 作变量替换

$$\xi=a_1x+b_1y+c_1z,\ \eta=a_2x+b_2y+c_2z,\ \zeta=a_3x+b_3y+c_3z,$$

可得

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\tilde{\Omega}}\frac{1}{\Delta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{\Delta}\int_{-h_3}^{h_3}\mathrm{d}\zeta\int_{-h_2}^{h_2}\mathrm{d}\eta\int_{-h_1}^{h_1}\mathrm{d}\xi=\frac{8h_1h_2h_3}{\Delta}.$$

(2) 易知 Ω位于第一象限,且是顶点$(0,0,a)$的旋转抛物面 $az=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=a-x-y$ 所围,将 Ω表为两部分:

$$\Omega_1=\{(x,y,z):0\leqslant x\leqslant a,a-x\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2},0\leqslant z\leqslant a-(x^2+y^2)/a\},$$

$$\Omega_2=\{(x,y,z):0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant a-x,a-x-y\leqslant z< a-(x^2+y^2)/a\}.$$

则得 $V=\iiint_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{\Omega_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.采用柱坐标变换,我们有

$$V=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{a/(\cos\theta+\sin\theta)}^{a}r\mathrm{d}r\int_0^{a-r^2/a}\mathrm{d}z+\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a/(\cos\theta+\sin\theta)}r\mathrm{d}r\int_{a-r(\cos\theta+\sin\theta)}^{a-r^2/a}\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{\pi/2}\left\{\int_{a/(\cos\theta+\sin\theta)}^{a}r\left(a-\frac{r^2}{a}\right)\mathrm{d}r+\int_0^{a/(\cos\theta+\sin\theta)}r\left[r(\cos\theta+\sin\theta)-\frac{r^2}{a}\right]\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}\theta$$
$$=a^3\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{6(\cos\theta+\sin\theta)^2}\right]\mathrm{d}\theta$$
$$=a^3\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{12\sin^2(\theta+\pi/4)}\right]\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{a^3}{24}\left[6\theta+2\cot\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{a^3}{24}(3\pi-4).$$

(3) 令 $u_i=a_ix+b_iy+c_iz\,(i=1,2,3)$,则 $J=1/\Delta$,且 Ω变为 $\widetilde{\Omega}:u_1^2+u_2^2+u_3^2\leqslant h^2$.从而可得

$$V=\iiint_{\widetilde{\Omega}}\frac{1}{|\Delta|}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3=\frac{4\pi}{3|\Delta|}h^3.$$

例 6.2.18 求由下列曲面围成的立体 Ω的体积 V:

(1) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2y}{h^3}\quad(a,b,c,h>0)$.

(2) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\quad(a>0)$.

(3) $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1,\ x^2/a^2+y^2/b^2=z/c\quad(a,b,c>0)$.

(4) $x^2+z^2=a^2,\ x^2+z^2=b^2,\ x^2-y^2-z^2=0\quad(x>0,a<b)$.

解 (1) 易知该立体 Ω位于半空间 $y\geqslant0$ 内,且对 yOz 平面,xOy 平面对称,故只需计算它在第一象限内的部分 Ω.对积分 $I=4\iiint_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 用广义球坐标:

$$x=ar\sin\varphi\cos\theta,\quad y=br\sin\varphi\sin\theta,\quad z=cr\cos\varphi,$$

易知 $J=abcr^2\sin\varphi$,且该曲面表示为 $r=a^2b\sin^3\varphi\cos^2\theta\sin\theta/h^3$.从而可得

$$V=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a^2b\sin^3\varphi\cos^2\theta\sin\theta/h^3}abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{192}\frac{a^7b^4c}{h^9}.$$

(2) 易知 $z\geqslant0$,且 Ω对 yOz,zOx 平面对称(以 $-x$,$-y$ 代 x,y 不变),故只需计算 Ω在第一象限内的部分 Ω_1.对积分 $V=4\iiint_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 用球坐标变换,可得(曲面为 $r=a\sqrt[3]{\cos\varphi}$)

$$V=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\pi a^3.$$

(3) 易知该两曲面之交线为 $x^2/a^2+y^2/b^2=(\sqrt{5}-1)/2$,故知此立体 Ω及其在 xOy 平面上的投影 D 可表示为

$$\Omega=\{(x,y,z):(x,y)\in D,c(x^2/a+y^2/b^2)\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}\},$$

$$D=\{(x,y):x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant(\sqrt{5}-1)/2\}.$$

对积分 $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 采用柱坐标变换($0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$):

$$x=a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{1/2}r\cos\theta,\quad y=b\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{1/2}r\sin\theta,\quad z=z,$$

则 $J=abr(\sqrt{5}-1)/2$.注意到 Ω关于 xOz,yOz 平面的对称性,即得

$$\begin{aligned}V&=2ab(\sqrt{5}-1)\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{cr^2(\sqrt{5}-1)/2}^{c[1-r^2(\sqrt{5}-1)/2]^{1/2}}\mathrm{d}z\\&=\pi abc(\sqrt{5}-1)\int_0^1\left[r\sqrt{1-\frac{r^2(\sqrt{5}-1)}{2}}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}r^3\right]\mathrm{d}r=\frac{5}{12}\pi abc(3-\sqrt{5}).\end{aligned}$$

(4) 易知 Ω关于 xOz,xOy 平面对称,因此若记 Ω在第一象限部分为 Ω_1,则 $V=4\iiint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,作变量替换 $z=r\cos\theta,x=r\sin\theta,y=y$,则 Ω 可表示为

$$\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\quad a\leqslant r\leqslant b,\quad 0\leqslant y\leqslant r\sqrt{-\cos2\theta},$$

且 $J=r$.从而可得

$$V=4\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_a^b r\mathrm{d}r\int_0^{r\sqrt{-\cos2\theta}}\mathrm{d}y=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{-\cos2\theta}\mathrm{d}\theta.$$

再作变量替换 $t=\pi/2-\theta$,又知

$$V=\frac{4}{3}(b^3-a^3)\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos2t}\mathrm{d}t.$$

又作替换$\sqrt{u}=\sin2t$,$\mathrm{d}t=u^{-1/2}(1-u)^{-1/2}\mathrm{d}u/4$,我们有

$$V=\frac{b^3-a^3}{3}\int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{-1/4}\mathrm{d}u=\frac{b^3-a^3}{3}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right).$$

例 6.2.19 求下列曲面所围立体 Ω之体积 V:

(1) $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3xyz\,(a>0)$.

(2) $(x^2+y^2)^2+z^4=y$.

(3) $(x/a+y/b+z/c)^2=x/h-y/k\,(x,y,z\geqslant0;h,k>0)$.

(4) $x=0$,$x=a$,$x/a+y/b=1$,以及

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\Big/\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right).$$

解 (1) 易知立体 Ω只位于第一,三,六,八象限中,即

$$x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0;\quad x\leqslant0,y\leqslant0,z\geqslant0;$$
$$x\leqslant0,y\geqslant0,z\leqslant0;\quad x\geqslant0,y\leqslant0,z\leqslant0.$$

又注意到曲面方程右端在同时改变二个变量值的符号时均不变值,故其体积只需计及其中一个立体 Ω 即可,即 $V=4\iiint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.作球坐标变换可得

$$V=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{a^3}{6}.$$

(2) 易知 Ω关于 xOy,yOz 平面对称,故若记

$$\Omega_1:(x^2+y^2)^2+z^4=y,\quad x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0,$$

则可得 $V=4\iiint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.作柱坐标变换:$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$,则 Ω_1 变为 $\widetilde{\Omega}_1$:

$$\widetilde{\Omega}_1:0\leqslant\theta\leqslant\pi/2,0\leqslant r\leqslant\sin^{1/3}\theta,\quad 0\leqslant z\leqslant(r\sin\theta-r^4)^{1/4}.$$

从而我们有

$$V=4\iiint\limits_{\widetilde{\Omega}_1}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin^{1/3}\theta}r(r\sin\theta-r^4)^{1/4}\mathrm{d}r.$$

再作变量替换 $r=(x\sin\theta)^{1/3}$,最后可得

$$\begin{aligned}V&=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1x^{-1/4}(1-x)^{1/4}\sin\theta\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\int_0^1x^{-1/4}(1-x)^{1/4}\mathrm{d}x\\&=\frac{4}{3}\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\pi/3\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\pi/3.\end{aligned}$$

(3) 易知 Ω位于第一象限,作变量替换

$$x=ar\sin^2\theta\cos^2\varphi,\quad y=br\sin^2\theta\sin^2\varphi,\quad z=cr\cos^2\theta,$$

并注意到 $x/h-y/k\geqslant 0$,可知

$$\lambda(\theta,\varphi)\triangleq\frac{a\sin^2\theta\cos^2\varphi}{h}-\frac{b\sin^2\theta\sin^2\varphi}{k}\geqslant 0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\arctan\sqrt{\frac{ak}{bh}}.$$

从而得到

$$\begin{aligned}V&=4abc\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\arctan\sqrt{ak/bh}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\lambda(\theta,\varphi)}r^2\mathrm{d}r\\&=\frac{abc}{60}\left(\frac{a}{h}\right)^4\Big/\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right).\end{aligned}$$

(4) 作变量替换 $x/a=u,x/a+y/b=v,x/a+y/b+z/c=w$,则 Ω变为 $\widetilde{\Omega}$:$0\leqslant u\leqslant 1,2w\cdot\arcsin w/\pi\leqslant v\leqslant 1,-1\leqslant w\leqslant 1$,且 $J=abc$.从而可得

$$\begin{aligned}V&=abc\int_0^1\mathrm{d}u\int_{-1}^1\mathrm{d}w\int_{2w\arcsin w/\pi}^1\mathrm{d}v\\&=2abc\left\{1-\frac{1}{\pi}\left(\frac{w^2}{2}\arcsin w\Big|_{-1}^1-\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{w^2\mathrm{d}w}{\sqrt{1-w^2}}\right)\right\}\\&=abc\left\{1+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^1\frac{w^2\mathrm{d}w}{\sqrt{1-w^2}}\right\}=\frac{3}{2}abc.\end{aligned}$$

例 6.2.20 求由下列曲面围成的立体 Ω的体积 V:

(1) $(x^2+y^2+z^2)^n=x^{2n-1}$.

(2) $\sum\limits_{i,j=1}^3a_{ij}x_ix_j=1$,其中 $A=(a_{ij})(i,j=1,2,3)$是正交矩阵.

解 (1) 注意到曲面方程中出现分离单变量 x,故应作变量替换:$x=r\cos\varphi$,$y=r\sin\varphi\cos\theta$,$z=r\sin\varphi\sin\theta$.此时仍有 $J=r^2\sin\varphi$,而原曲面有表示式 $r=\cos^{2n-1}\varphi$.注意到立体 Ω 关于 yOz,xOy 平面对称,我们有

$$V=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos^{2n-1}\varphi}r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3(3n-1)}.$$

(2) 设 $\lambda_i>0(i=1,2,3)$是 A 的特征值,又易知存在正交矩阵 T,使得

$$T^{\mathrm{T}}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}.$$

若记矩阵 $B=\begin{pmatrix}\lambda_1^{-1/2}&0&0\\0&\lambda_2^{-1/2}&0\\0&0&\lambda_3^{-1/2}\end{pmatrix}$,且作变换 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=TB\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=TB\boldsymbol{Y}$,易知 $J=\dfrac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)}=(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{-1/2}$.注意到

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X}=(TB\boldsymbol{Y})^{\mathrm{T}}A(TB\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}T^{\mathrm{T}}ATB\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y},$$

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\iiint_{\boldsymbol{YY}^{\mathrm{T}}\leqslant 1}(\det A)^{-1/2}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3=\frac{4\pi}{3}(\det A)^{-1/2}.$$

*6.3 n重积分

设 Ω是 $\mathbf{R}^n$ 中有界闭区域,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是 Ω上的有界函数,其 n重积分记为

$$I=\iint_{\Omega}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

定理 6.3.1 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在 Ω上连续,变换 $T:(\tilde{\Omega}\to\Omega)\,x_i=\varphi_i(u_1,u_2,\cdots,u_n)(i=1,2,\cdots,n)$有连续偏导数,则

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}&\cdots&\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u_n}\\ \cdots&&\cdots\\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u_1}&\cdots&\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u_n}\end{vmatrix},$$

$$\iint\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\iint_{\tilde{\Omega}}\cdots\int F(u_1,u_2,\cdots,u_n)\,|J|\,\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n,$$

$$F(u_1,u_2,\cdots,u_n)=f(\varphi_1(u_1,\cdots,u_n),\cdots,\varphi_n(u_1,\cdots,u_n)).$$

对 n维空间我们也有球坐标变换:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1, \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\ x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\cos\theta_{n-1}, \\ x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-1} \end{cases} \quad (0<r<+\infty, 0<\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-2}<\pi, 0<\theta_{n-1}<2\pi),$$

其变换 T 的 Jacobi 行列式为 $J=J(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}$.

定理 6.3.2(化为累次积分)　设 $\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1\}$,而且 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在 Ω上连续,则有

$$\iint_\Omega\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_0^1\mathrm{d}x_n\int_0^{x_n}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_0^{x_2}f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1;$$

$$\iint_\Omega\cdots\int f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_{x_1}^1\mathrm{d}x_2\cdots\int_{x_{n-1}}^1 f(x_1,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n.$$

例 6.3.1　解答下列问题:

(1)设 Ω是 $\mathbf{R}^4$ 中立体:$x,y,z,t\geqslant 0$,$x^2+y^2+z^2+t^2\leqslant 1$,试求

$$I=\iiiint_\Omega\sqrt{\frac{1-x^2-y^2-z^2-t^2}{1+x^2+y^2+z^2+t^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t.$$

(2)求 $\mathbf{R}^4$ 中球体 Ω:$x^2+y^2+z^2+t^2\leqslant a^2$ 的体积 V.

(3)设 Ω:$x^2+y^2+u^2+v^2\leqslant 1$,求 $I=\iiiint_\Omega e^{x^2+y^2-u^2-v^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

解　(1)采用四维极坐标变换:

$$x=r\sin\varphi\cos\theta\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta\sin\psi,$$
$$z=r\sin\varphi\cos\theta,\quad t=r\cos\varphi\quad(0\leqslant\theta,\varphi,\psi\leqslant\pi/2).$$

此时,易知 $J\leqslant r^3\sin^2\theta\sin\varphi$.从而可得

$$I=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\psi\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r^3\sin^2\varphi\sin\theta\mathrm{d}r$$
$$=\frac{\pi^2}{16}\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\mathrm{d}r\xlongequal{r^2=\sin t}\frac{\pi^2}{16}\int_0^{\pi/2}(\sin t-\sin^2 t)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

(2)采用坐标变换:

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\sin\theta\cos\psi, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta\sin\psi, & 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \\ z=r\sin\varphi\cos\theta, & 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi, \\ t=r\cos\varphi, & 0\leqslant r\leqslant a. \end{cases}$$

易知 $|J|=\left|\dfrac{\partial(x,y,z,t)}{\partial(r,\theta,\varphi,\psi)}\right|=r^3\sin^2\varphi\sin\theta$.从而可得

$$V=\iiiint_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\psi\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\sin^2\varphi\sin\theta\mathrm{d}r=\frac{\pi^2a^4}{2}.$$

(3)对积分 $I=\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}e^{x^2+y^2}\left\{\iint_{u^2+v^2\leqslant 1-x^2-y^2}e^{-(u^2+v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 采用极坐标,易知 $I=$

$\pi^2(\cosh 1-1)$.

例 6.3.2　解答下列问题：

(1) 设 A 是四维正定矩阵，$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^4$，记 $\Omega:\langle A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle\leqslant 1$，求 $I=\iiiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{\langle A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$($\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4$)(其中 $\langle A\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle=\sum\limits_{i,j=1}^{\psi}a_{ij}x_ix_j$ 是正定二次型).

(2) 设 $\Omega=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4):\sqrt{x_2^2+x_3^2+x_4^2}\leqslant x_1\}$.试论积分

$$I(t)=\iiiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{-\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\rangle}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\quad(\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4,\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^4)$$

的敛散性.

解　(1) 记 $\lambda_i(i=1,2,3,4)$是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，并作正交变换化二次型为标准型，则 Ω变为 $\widetilde{\Omega}$：$\sum\limits_{i=1}^{4}\lambda_i\xi_i^2\leqslant 1$，可知 $|J|=1$.且有

$$I=\iiiint\limits_{\Omega}\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{4}\lambda_i\xi_i^2}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3\mathrm{d}\xi_4.$$

再作变换$\sqrt{\lambda_i}\xi_i=t_i(i=1,2,3,4)$，则又得

$$I=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}}\iiiint\limits_{\sum\limits_{i=1}^{4}t_i^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^{4}t_i^2}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3\mathrm{d}t_4.$$

再用极坐标变换：$t_1=r_1\cos\varphi_1$，$t_2=r_1\sin\varphi_1$；$t_3=r_2\cos\varphi_2$，$t_4=r_2\sin\varphi_2$，可知

$$I=\frac{1}{\sqrt{|A|}}\iint\limits_{r_1^2+r_2^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{r_1^2+r_2^2}r_1r_2\mathrm{d}r_1\mathrm{d}r_2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_1\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_2=\frac{\pi^2(\mathrm{e}-1)^2}{2\sqrt{|A|}},$$

其中 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ 是 A 的行列式.

(2) 令 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,t_3,t_4)$，$\boldsymbol{s}=(t_2,t_3,t_4)$，$\boldsymbol{u}=(x_2,x_3,x_4)$，$\|\boldsymbol{u}\|=\sqrt{x_2^2+x_3^2+x_4^2}$，则

$$I(\boldsymbol{t})=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t_1x_1}\left\{\iiint\limits_{\|\boldsymbol{u}\|\leqslant x_1}\mathrm{e}^{-\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{s}\rangle}\mathrm{d}\boldsymbol{u}\triangleq J(\boldsymbol{s})\right\}\mathrm{d}x_1.\qquad①$$

采用正交变换，易知问题归结为考察积分($\boldsymbol{s}=(a,0,0)$，$a=\|\boldsymbol{s}\|$)

$$J(\boldsymbol{s})=\iiint\limits_{\|\boldsymbol{u}\|\leqslant x_1}\mathrm{e}^{-ax_2}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4=\int_{-x_1}^{x_1}\mathrm{e}^{-ax_2}\pi(x_1^2-x_2^2)\mathrm{d}x_2$$

$$=\frac{4\pi x_1}{a^2}\cosh(ax_1)-\frac{4\pi}{a^3}\sinh(ax_1).$$

将此代入式①，我们有

$$I(t)=\frac{4\pi}{a^2}\int_0^{+\infty}\left[x_1\cosh(ax_1)-\frac{1}{a}\sinh(ax_1)\right]\mathrm{e}^{-t_1x_1}\mathrm{d}x_1.$$

易知，上述积分收敛当且仅当 $a<t_1$.

例 6.3.3　解答下列问题：

(1) 设 $\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1\}$，$f\in C([0,1]^n)$，试将

$$I=\iint\limits_{\Omega}\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

化为积分序为 $x_1\to x_2\to\cdots\to x_n$ 的累次积分.

(2) 设 $f\in C([0,\infty]^n)$,试将积分

$$I(t)=\int_0^t \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n$$

化为积分序为 $x_1\to x_2\to\cdots\to x_n$ 的累次积分.特别当 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$时,有 $I(t)=\dfrac{1}{n!}\left(\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right)^n$.

(3) 设 $f\in C(\mathbf{R}^1)$,试证明

$$I=\int_0^x \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{m-1}} f(x_m)\mathrm{d}x_m=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{d}u.$$

解 (1) 记 Ω在 $n-1$ 维空间 $Ox_2\cdots x_n$ 上的投影 Ω_{n-1}:

$$\Omega_{n-1}=\{(x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1\}.$$

这是因为对任意的$(x_2,\cdots,x_n)\in\Omega_{n-1}$,均存在 x_1 满足 $0\leqslant x_1\leqslant x_2$,所以点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega$在 $n-1$ 维空间上的投影即为点$(x_2,\cdots,x_n)\in\Omega_{n-1}$.反之,对任意的$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega$,显然其投影$(x_2,\cdots,x_{n-1})\in\Omega_{n-1}$.

固定$(x_2,x_3,\cdots,x_n)\in\Omega_{n-1}$,则变量 x_1 的变化范围为 $x_1=0$ 到 $x_1=x_2$,故得

$$I=\underset{\Omega_{n-1}}{\int\cdots\int}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\int_0^{x_2} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1.$$

由于 Ω_{n-1}与 Ω情形相似,这样依此下去得

$$I=\iint_{\Omega_2}\mathrm{d}x_n\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{x_{n-1}}\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_0^{x_2} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1,$$

其中 $\Omega_2=\{(x_{n-1},x_n)\mid 0\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n\leqslant 1\}$,最后得

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x_n\int_0^{x_n}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_0^{x_2} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1.$$

(2) 记 $\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):0\leqslant x_n\leqslant t,x_{i+1}\leqslant x_i\leqslant t(i=1,2,\cdots,n-1)\}$,从而可得 $I(t)=\underset{\Omega}{\iint\cdots\int} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 由此即知

$$I(t)=\int_0^t\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^t\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^t f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1.$$

对 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$,首先,可知

$$I(t)=\int_0^t f(x_1)\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1} f(x_2)\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\mathrm{d}x_n.$$

其次,显然有

$$\int_0^{x_{m-2}} f(x_{m-1})\mathrm{d}x_{m-1}\int_0^{x_{m-1}} f(x_m)\mathrm{d}x_m=\frac{1}{2}\int_0^{x_{m-2}}\mathrm{d}\left(\int_0^{x_{m-1}} f(x_m)\mathrm{d}x_m\right)^2=\frac{1}{2!}\left(\int_0^{x_{m-2}} f(s)\mathrm{d}s\right)^2.$$

现在假定

$$\int_0^{x_1} f(x_2)\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{m-1}} f(x_m)\mathrm{d}x_m=\frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^{x_1} f(s)\mathrm{d}s\right)^{m-1},$$

则可得

$$I(t)=\int_0^t\left[\frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^{x_1}f(s)\mathrm{d}s\right)^{m-1}\right]f(x_1)\mathrm{d}x_1$$

$$=\frac{1}{m!}\int_0^t\mathrm{d}\left(\int_0^{x_1}f(s)\mathrm{d}s\right)^m=\frac{1}{m!}\left(\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right)^m.$$

由归纳法即得所证.

(3) 改变累次积分次序,可得

$$I=\int_0^x f(x_m)\mathrm{d}x_m\int_{x_m}^x\mathrm{d}x_{m-1}\int_{x_{m-1}}^x\mathrm{d}x_{m-2}\cdots\int_{x_3}^x\mathrm{d}x_2\int_{x_2}^x\mathrm{d}x_1.$$

易知 $\int_{x_3}^x\mathrm{d}x_2\int_{x_2}^x\mathrm{d}x_1=\frac{(x-x_3)^2}{2}$,现在假定

$$\int_{x_{m-1}}^x\mathrm{d}x_{m-2}\int_{x_{m-2}}^x\mathrm{d}x_{m-3}\cdots\int_{x_3}^x\mathrm{d}x_2\int_{x_2}^x\mathrm{d}x_1=\frac{(x-x_{m-1})^{m-2}}{m-2!},$$

则我们有

$$\int_{x_m}^x\mathrm{d}x_{m-1}\int_{x_{m-1}}^x\mathrm{d}x_{m-2}\cdots\int_{x_2}^x\mathrm{d}x_1=\frac{1}{(m-2)!}\int_{x_m}^x(x-x_{m-1})^{m-2}\mathrm{d}x_{m-1}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!}(x-x_{m-1})^{m-1}\Big|_x^{x_m}=\frac{(x-x_m)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

因此,根据归纳法即知

$$I=\int_0^x f(x_m)\frac{(x-x_m)^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{d}x_m=\int_0^x f(u)\frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{d}u.$$

例 6.3.4 试求 $\mathbf{R}^n$ 中下列立体 Ω 的体积 V:

(1) $\Omega_n(a)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,n),x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a\}$.

(2) $\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_1/a_1+x_2/a_2+\cdots+x_n/a_n\leqslant1,x_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,n)\}$,其中 $a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

(3) $\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2,a>0\}$.

(4) $\Omega:\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2}$ 与 $x_n=a_n$ 所围立体(n维圆锥体).

解 (1) 对 $\Omega_n(a)$的体积 $V_n(a)=\iint\limits_{\Omega_n(a)}\cdots\int\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 作变量替换:$x_i=a\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$,易知 $J=a^n$,且 $\Omega_n(a)$变为 $\Omega_n(1)$,故知

$$V_n(a)=\iint\limits_{\Omega_n(1)}\cdots\int J\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n=a^nV_n(1).\quad(V_n(1)\text{是 }\Omega_n(1)\text{ 的体积})$$

注意到 $\Omega_n(1)=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n):\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n\leqslant1,\xi_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,n)\}$,我们令 $\Omega_{n-1}(1-\xi_n)=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}):\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{n-1}\leqslant1-\xi_n\}$,以及它的体积记为 $V_{n-1}(1-\xi_n)$.则可得

$$V_n(1)=\iint\limits_{\Omega_n(1)}\cdots\int\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n=\int_0^1\mathrm{d}\xi_n\left[\iint\limits_{\Omega_{n-1}(1-\xi_n)}\cdots\int\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_{n-1}\right]$$

$$=\int_0^1V_{n-1}(1-\xi_n)\mathrm{d}\xi_n=\int_0^1(1-\xi_n)^{n-1}V_{n-1}(1)\mathrm{d}\xi_n$$

$$=V_{n-1}(1)\int_0^1(1-\xi_n)^{n-1}\mathrm{d}\xi_n=V_{n-1}(1)/n.$$

从而作逐次递推后,我们有

$$V_n(1)=V_{n-1}(1)/n=V_{n-2}(1)/n(n-1)=\cdots=V_1(1)/n!=1/n!,$$

$$V_n(a)=a^n/n!.$$

(2) 化成累次积分可得

$$V=\int_0^{a_1}\mathrm{d}x_1\int_0^{a_2(1-x_1/a_1)}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{a_n(1-x_1/a_1-\cdots-x_{n-1}/a_{n-1})}\mathrm{d}x_n.$$

作变量替换 $x_i=a_it_i(i=1,2,\cdots,n)$,则 $J=a_1\cdot a_2\cdots a_n$,且知

$$\begin{aligned}V&=a_1\cdots a_n\int_0^1\mathrm{d}t_1\int_0^{1-t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_0^{1-t_1-\cdots-t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\\&=a_1a_2\cdots a_n\int_0^1\mathrm{d}t_1\cdots\int_0^{1-t_1-\cdots-t_{n-2}}[1-(t_1+t_2+\cdots+t_{n-1})]\mathrm{d}t_{n-1}\\&=a_1a_2\cdots a_n\int_0^1\mathrm{d}t_1\cdots\int_0^{1-t_1-\cdots-t_{n-3}}[1-(t_1+\cdots+t_{n-1})]^2/2\Big|_{1-(t_1+\cdots+t_{n-2})}^{0}\mathrm{d}t_{n-2}\\&=\frac{a_1\cdots a_n}{2!}\int_0^1\mathrm{d}t_1\cdots\int_0^{1-t_1-\cdots-t_{n-3}}[1-(t_1+\cdots+t_{n-2})]^2\mathrm{d}t_{n-2}\\&=\frac{a_1\cdots a_n}{3!}\int_0^1\mathrm{d}t_1\cdots\int_0^{1-t_1-\cdots-t_{n-4}}[1-(t_1+\cdots+t_{n-3})]^3\mathrm{d}t_{n-3}\\&=\cdots=\frac{a_1\cdots a_n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t_1)^{n-1}\mathrm{d}t_1=\frac{a_1\cdots a_n}{n!}.\end{aligned}$$

(3) 对积分 $V=\underset{\Omega}{\int\int\cdots\int}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 采用极坐标变换,可知

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_1\int_0^{\pi}\sin\varphi_2\mathrm{d}\varphi_2\int_0^{\pi}\sin^2\varphi_3\mathrm{d}\varphi_3\cdots\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\varphi_{n-1}\mathrm{d}\varphi_{n-1}\int_0^a r^{n-1}\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi a^n}{n}\prod_{i=2}^{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^{i-1}\varphi_i\mathrm{d}\varphi_i.\end{aligned}$$

注意到 $\int_0^{\pi/2}\sin^{i-1}\varphi_i\mathrm{d}\varphi_i=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{i}{2},\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)\Big/2\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)$,故得

$$\prod_{i=1}^{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^{i-1}\varphi_i\mathrm{d}\varphi_i=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-2}\frac{\Gamma(1)\Gamma(3/2)\cdots\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(2)\cdots\Gamma(n/2)}=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-2}\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

$$V=\frac{2\pi^{n/2}a^n}{n\Gamma(n/2)}.$$

(4) 对积分 $\underset{\Omega}{\int\int\cdots\int}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 采用变量替换

$$\begin{cases}x_1=a_1r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2},\\x_j=a_jr\cos\varphi_{j-1}\prod\limits_{i=j}^{n-2}\sin\varphi_i\quad(j=2,3,\cdots,n-2),\\x_{n-1}=a_{n-1}r\cos\varphi_{n-2},\\x_n=x_n.\end{cases}$$

此时易知 $J=a_1a_2\cdots a_{n-1}r^{n-2}\prod\limits_{j=1}^{n-2}\sin^{j-1}\varphi_j$,故可得

$$V=a_1a_2\cdots a_{n-1}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_1\int_0^{\pi}\sin\varphi_2\mathrm{d}\varphi_2\cdots\int_0^{\pi}\sin^{n-3}\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\int_0^1 r^{n-2}\mathrm{d}r\int_{a_nr}^{a_n}\mathrm{d}x_n$$

$$= \frac{2\pi}{n(n-1)} a_1 a_2 \cdots a_n \cdot 2^{n-3} \prod_{j=2}^{n-2} \int_0^{\pi/2} \sin^{j-1} \varphi_j \mathrm{d}\varphi_j$$

$$= \frac{2\pi}{n(n-1)} a_1 a_2 \cdots a_n \cdot 2^{n-3} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{n-3} \Big/ \Gamma\left(\frac{n-1}{2} \right) = \frac{\pi^{(n-1)/2} a_1 \cdots a_n}{n\Gamma((n+1)/2)}.$$

例 6.3.5 解答下列问题：

(1) 设 $\Omega_n(a): x_1 + \cdots + x_n \leqslant a, x_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，求积分

$$I_n(a) = \iint\limits_{\Omega_n(a)} \cdots \int x_1 x_2 \cdots x_n \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n .$$

(2) 设 $f \in C([0,1])$，且 $\int_0^1 f(x) \mathrm{d}x = A$，求 $(k \leqslant n)$ 积分

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{x_1 + x_2 + \cdots + x_k + \cdots + x_n} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n .$$

(3) 设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$f \in C(\mathbf{R}^1)$，并令

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) : \| x \|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant a^2 \right\},$$

试将 $I = \iint\limits_{\Omega} \cdots \int f(\| x \|) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$ 化为一重积分．

解 (1) 采用变量替换 $x_i = at_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $\Omega_n(a)$ 变为 $\widetilde{\Omega}_n: t_1 + t_2 + \cdots + t_n \leqslant 1$，且 $I_n(a) = a^{2n} I_n(1)$．对 $n \geqslant 2$，我们有

$$I_n(1) = \int_0^1 x_1 \mathrm{d}x_1 \iint\limits_{x_2 + \cdots + x_n < 1 - x_1} \cdots \int x_2 \cdots x_n \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n .$$

$$= I_{n-1}(1) \int_0^1 x_1 (1 - x_1)^{2n-2} \mathrm{d}x_1 = I_{n-1}(1) \Gamma(2) \Gamma(2n-1) / \Gamma(2n+1).$$

因为 $I_1(1) = \int_0^1 x \mathrm{d}x = 1/2$，所以 $I_n(1) = \Gamma(3)/2\Gamma(2n+1) = 1/(2n)!$．最后我们有 $I_n(a) = a^{2n}/(2n)!$．

(2) 记 $I_i = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_i}{x_1 + \cdots + x_n} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$，则

$$I = \sum_{i=1}^k I_i = kI_1 \quad (\text{由对称性知 } I_i = I_1 (i = 1, 2, \cdots, n)).$$

$$nI_1 = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n ,$$

$$= \left(\int_0^1 f(x_1) \mathrm{d}x_1 \right) \left(\int_0^1 f(x_2) \mathrm{d}x_2 \right) \cdots \left(\int_0^1 f(x_n) \mathrm{d}x_n \right) = A^n .$$

由此即知 $I_1 = A^n / n$，从而 $I = kA^n / n$．

(3) 采用极坐标系统

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{n-1}, \quad 0 \leqslant r \leqslant a, \\ x_j = r\sin\varphi_{j-1} \prod\limits_{i=j}^{n-1} \sin\varphi_i \quad (j = 2, 3, \cdots, n-1), \quad 0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi, \\ x_n = r\cos\varphi_{n-1}, \quad 0 \leqslant \varphi_j \leqslant \pi (j = 2, 3, \cdots, n-1), \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots x_n)}{\partial(r, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \sin^{j-1} \varphi_j .$$

从而可得

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\varphi_2\,\mathrm{d}\varphi_2\int_0^{\pi}\sin^2\varphi_3\,\mathrm{d}\varphi_3\cdots\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-1}\int_0^a f(r)r^{n-1}\mathrm{d}r$$

$$=2^{n-1}\pi\prod_{j=2}^{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^{j-1}\varphi_j\,\mathrm{d}\varphi_j\int_0^a f(r)r^{n-1}\mathrm{d}r.$$

对上述乘积中的每个积分,用替换 $\sin\varphi_j=x_j^{1/2}$,则有

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{j-1}\varphi_j\,\mathrm{d}\varphi_j=\frac{1}{2}\int_0^1 t_j^{j/2-1}(1-t_j)^{-1/2}\mathrm{d}t_j=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{j}{2},\frac{j}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(j/2)}{\Gamma((j+1)/2)},$$

$$\prod_{j=2}^{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^{j-1}\varphi_j\,\mathrm{d}\varphi_j=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{\Gamma(1)\Gamma(3/2)\cdots\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(3/2)\Gamma(2)\cdots\Gamma(n/2)}=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{n-2}\Big/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

$$I=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^a f(r)r^{n-1}\mathrm{d}r=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^a f(r)r^{n-2}\mathrm{d}r^2$$

$$\xlongequal{t=r^2}\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\int_0^{a^2}f(\sqrt{t})t^{n/2-1}\mathrm{d}t.$$

例 6.3.6 计算下列积分:

(1) $I=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\cos^2\left[\frac{\pi}{2n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\right]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

(2) 记$[0,1]^n=[0,1]\times[0,1]\times\cdots\times[0,1]$,

(i) $I=\underset{[0,1]^n}{\iint\cdots\int}\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

(ii) $I=\underset{[0,1]^n}{\iint\cdots\int}\min\{x_1,x_2\cdots,x_n\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

解 (1) 作变换 $x_k=1-y_k(k=1,2,\cdots,n)$,则有

$$I=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\cos^2\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)\right]\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n$$

$$=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\sin^2\left[\frac{\pi}{2n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)\right]\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n.$$

由此可知 $2I=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=1$,即 $I=\frac{1}{2}$.

(2) 利用区域的对称性,以及被积函数关于变量置换的对称性,我们有

(i) $I=n\int_0^1 x_1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}\mathrm{d}x_n=\frac{n}{n+1}$.

(ii) $I=n\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_n\mathrm{d}x_n=\frac{1}{n+1}.$

6.4 反常重积分(以二重积分为例)

定义 6.4.1 设 D 为一区域,$\{D_n\}$为一有界闭区域列,满足:

(1) $D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset\cdots\subset D$;

(2) 对 D 内任一有界闭区域 F,存在 m,使 $F\subset D_m$.

则称$\{D_n\}$为区域 D 的一个穷竭列.

定义 6.4.2 设 D 为一区域，$f(x,y)$在 D 上内闭可积(即在 D 内任一有界闭区域上可积)，$\{D_n\}$是 D 的任一穷竭列.若极限

$$\lim_{x\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I$$

存在(I 与穷竭列的取法无关)，则称反常积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛.反之，则称为发散.

若反常积分$\iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛，则称反常积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛.

定理 6.4.1 反常积分$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛的充要条件是:存在一个穷竭列$\{D_n\}$ 和常数 M，使对一切 n，有$\iint_{D_n} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant M$.

定理 6.4.2 设 $\widetilde{D}$，D 为平面区域，变换 $T: x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$\widetilde{D}\to D$ 为同胚变换，且 $T\in C^{(2)}(\widetilde{D})$，则下式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\widetilde{D}} f[x(u,v),y(u,v)]|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

中有一反常积分收敛，另一反常积分也收敛，且等式成立.

例 6.4.1 试证明下列命题:

(1) 设 D:$1\leqslant x,y<+\infty$;$f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$.且令

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_1=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y,\quad I_2=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x,$$

则 I 发散，I_1 与 I_2 收敛($I_1=-\pi/4$，$I_2=\pi/4$).

(2) 积分 $I=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散.

(3) 积分 $I=\iint_D \sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 不存在，D:$0\leqslant x,y<\infty$.

(4) 设 $f(x,y)=2(x-y)/(x+y+a)^3$ ($x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$a>0$)，令

$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad (D\text{ 是第一象限}),$$

$$F(\xi,\eta)=\int_0^{\xi}\mathrm{d}x\int_0^{\eta} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\eta}\mathrm{d}y\int_0^{\xi} f(x,y)\mathrm{d}x,$$

则 I 发散;$I_1=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=-1$，$I_2=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=1$.又有

$$\lim_{\xi\to+\infty}\lim_{\eta\to+\infty} F(\xi,\eta)=-1,\quad \lim_{\eta\to+\infty}\lim_{\xi\to+\infty} F(\xi,\eta)=1.$$

但极限$\lim\limits_{\xi,\eta\to+\infty} F(\xi,\eta)$不存在.

(5) 设 $a>0$，且令

$$f(x,y)=\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{y+a}\right)\cos x\cos y-\frac{1}{(x+a)^2}\sin x\cos y-\frac{1}{(y+a)^2}\cos x\sin y,$$

$$I_1=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,\quad I_2=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x,$$

则 I_1,I_2 发散,但 $I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$($D$ 是第一象限).

(6)设 $f(x,y)=(2-xy)xye^{-xy}$,D:$0\leqslant x\leqslant 1$,$0\leqslant y<\infty$,令

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_1=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y,\quad I_2=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x,$$

则 I 存在,$I_1=0$,$I_2=1$.

证明 (1)考察其绝对值的积分,我们有($D_n=\{(x,y):1\leqslant x,y\leqslant n\}$)

$$I=\iint\limits_{D_n}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^n\mathrm{d}x\int_1^x|f(x,y)|\mathrm{d}y+\int_1^n\mathrm{d}x\int_x^n|f(x,y)|\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^n\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\Big|_1^x\mathrm{d}x+\int_1^n\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\Big|_n^x\mathrm{d}x\to+\infty\ (n\to\infty).$$证毕.

对累次积分的计算,我们有

$$I_1=\int_1^{+\infty}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\Big|_1^{+\infty}\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\frac{\pi}{4},$$

$$I_2=\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\Big|_{+\infty}^1\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\pi}{4}.$$

(2)考察 $|f(x,y)|$ 的积分,我们有

$$I=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}|\sin x|\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}e^{-xy}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x=+\infty.$$

由此即得所证.

注 累次积分是存在且相等:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},\quad\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$$

(3)令 $D_R=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0,x^2+y^2\leqslant R^2\}$,则可得

$$I_R=\iint\limits_{D_R}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\sin r^2\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}(1-\cos R^2).$$

由此可知,极限 $\lim\limits_{R\to+\infty}I_R$ 不存在.注意,其累次积分存在相等(用三角公式):

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}.$$

(4)(i)取正实数列 $\{k_n\}$:$\lim\limits_{n\to\infty}k_n=+\infty$,并记($n=1,2,\cdots$)

$$D_n=\{(x,y):x+y\leqslant k_n,x\geqslant 0,y\geqslant 0\},$$

以及 $I_n=\iint\limits_{D_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则可知

$$I_n=\int_0^{k_n}\mathrm{d}x\int_0^{k_n-x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{k_n}\mathrm{d}x\left\{\frac{y-x}{(x+y+a)^2}\Big|_0^{k_n-x}-\int_0^{k_n-x}\frac{\mathrm{d}y}{(x+y+a)^2}\right\}$$

$$=\int_0^{k_n}\left\{\frac{k_n-2x}{(k_n+a)^2}+\frac{x}{(x+a)^2}+\frac{1}{k_n+a}-\frac{1}{x+a}\right\}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{k_n^2}{(k_n+a)^2}-\frac{k_n^2}{(k_n+a)^2}+\frac{k_n}{k_n+a}-\int_0^{k_n}\frac{a\mathrm{d}x}{(x+a)^2}=\frac{k_n}{k_n+a}+\frac{a}{k_n+a}-\frac{a}{a}=0.$$

由此知 $I_n\to 0(n\to\infty)$.

另一方面,令 $D_n'=\{(x,y):x\geqslant 0,y\geqslant 0,\alpha>0,\beta>0,x/\alpha+y/\beta\leqslant k_n\}$,

$$J_n=\iint\limits_{D_n'}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\alpha k_n}\mathrm{d}x\int_0^{\beta(k_n-x/\alpha)}f(x,y)\mathrm{d}y,$$

因为我们有

$$\int_0^{\beta(k_n-x/\alpha)}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{y-x}{(x+y+a)^2}\Bigg|_0^{\beta(k_n-x/\alpha)}-\int_0^{\beta(k_n-x/\alpha)}\frac{\mathrm{d}y}{(x+y+a)^2}$$

$$=-\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2}\frac{1}{x+\alpha(\beta k_n+a)/(\alpha-\beta)}$$

$$+\frac{\alpha^2[a(\alpha+\beta)+2\alpha\beta k_n]}{(\alpha-\beta)^3[x+\alpha(\beta k_n+a)/(\alpha-\beta)]^2}-\frac{\alpha}{(x+a)^2},$$

所以得到

$$J_n=-\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2}\ln\frac{\alpha k_n+a}{\beta k_n+a}+\frac{\alpha\beta k_n[2a+(\alpha+\beta)k_n]}{(\alpha-\beta)(a+\alpha k_n)(a+\beta k_n)},$$

$$\lim_{n\to\infty}J_n=-\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2}\ln\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

这就有 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n\neq\lim\limits_{n\to\infty}J_n$,即 I 发散.

(ii) 对于 I_1,I_2 的计算,我们有

$$I_1=\lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi}\left(\lim_{\eta\to+\infty}\int_0^{\eta}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi}\lim_{\eta\to+\infty}\left(\frac{\eta-x}{(x+\eta+a)^2}+\frac{x}{(x+a)^2}+\frac{1}{x+\eta+a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi}\frac{-a}{(x+a)^2}\mathrm{d}x=\lim_{\xi\to+\infty}\left(\frac{a}{\xi+a}-1\right)=-1;$$

$$I_2=\lim_{\eta\to+\infty}\int_0^{\eta}\left(\lim_{\xi\to+\infty}\int_0^{\xi}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{\eta\to+\infty}\int_0^{\eta}\lim_{\xi\to+\infty}\left(\frac{y-\xi}{(\xi+y+a)^2}-\frac{y}{(y+a)^2}-\frac{1}{\xi+y+a}+\frac{1}{y+a}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{\eta\to+\infty}\int_0^{\eta}\frac{a\mathrm{d}y}{(y+a)^2}=\lim_{\eta\to+\infty}\left(1-\frac{a}{\eta+a}\right)=1.$$

(iii) 我们有 $F(\xi,\eta)=\xi\eta(\xi-\eta)/(\xi+a)(\eta+a)(\xi+\eta+a)$,则当沿着 $\xi=\eta$ 而 $\xi\to+\infty,\eta\to+\infty$ 时,知 $F(\xi,\eta)$ 趋于 0;当沿着 $\xi=2\eta$ 而 $\xi\to+\infty,\eta\to+\infty$ 时,知

$F(\xi,\eta)$趋于 1/3 .这说明极限 $\lim\limits_{\substack{\xi\to+\infty\\ \eta\to+\infty}} F(\xi,\eta)$不存在 .不过 ,我们有

$$\lim_{\xi\to+\infty}\lim_{\eta\to+\infty} = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{-\xi}{\xi+a} = -1,\quad \lim_{\eta\to+\infty}\lim_{\xi\to+\infty} F(\xi,\eta) = \lim_{\eta\to+\infty}\frac{\eta}{\eta+a} = 1.$$

(5) 由 $a>0$ 可知 $f\in C(D)$,且因为有

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{y+a}\right)\sin x\sin y\right) = f(x,y),$$

所以得到($Y>0$)

$$\begin{aligned}\int_0^Y f(x,y)\mathrm{d}y &= \left[\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{y+a}\right)\cos x\sin y - \frac{\sin x\sin y}{(x+a)^2}\right]\Bigg|_0^Y \\ &= \left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{Y+a}\right)\cos x\sin Y - \frac{\sin x\sin Y}{(x+a)^2}.\end{aligned}$$

从而积分$\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 不存在 .类似地可证$\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 也不存在 .但是由

$$\begin{aligned}\left|\int_0^X\int_0^Y f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| &= \left|\left(\frac{1}{X+a}+\frac{1}{Y+a}\right)\sin X\sin Y\right| \leqslant \left|\frac{1}{X+a}+\frac{1}{Y+a}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{X+a}\right| + \left|\frac{1}{Y+a}\right| \to 0 \quad (X\to+\infty, Y\to+\infty),\end{aligned}$$

可知 $I=0$.

(6) 注意到 $f(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}(xy^2\mathrm{e}^{-xy})$,故知对 $0\leqslant x\leqslant 1$,积分$\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=0$.从而有 $I_1=0$.因为对 $y\geqslant 0$,有 $f(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2y\mathrm{e}^{-xy})$,故知

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x = y\mathrm{e}^{-y},\quad I_2 = \int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y = 1.$$

(这说明反常积分收敛不一定能交换积分次序 .)

例 6.4.2　求下列非负函数的反常积分:

(1) 设 $D: x\geqslant 0, y\geqslant 0, I=\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y)^3}$.

(2) 设 $D: x\geqslant 0, y\geqslant x, xy\leqslant 1, I=\iint\limits_D \dfrac{y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+xy)^2(1+y^2)}$.

(3) 设 $D: y\geqslant x^2+1, I=\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

解　(1) $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^3} = \int_0^{+\infty}\left(\dfrac{-1}{2(1+x+y)^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1+x}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

(2) 分解 D 为 D_1 ,D_2 两个区域 ,I 分解为 I_1+I_2 :

$$D_1: 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant y, \quad D_2: 0 \leqslant x \leqslant 1, 1 \leqslant y \leqslant 1/x.$$

$$I_1 = \iint_{D_1} \frac{y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+xy)^2(1+y^2)} = \int_0^1 \frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2}\int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{(1+xy)^2},$$

$$I_2 = \iint_{D_2} \frac{y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+xy)^2(1+y^2)} = \int_1^{+\infty} \frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2}\int_0^{1/y} \frac{\mathrm{d}x}{(1+xy)^2}.$$

经计算可得

$$I_1 = \int_0^1 \frac{y^2\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2} = \left[\arctan y - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{1+y^2} + \arctan y\right)\right]\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{y}{1+y^2}\left(-\frac{1}{y(1+xy)}\right)\Bigg|_0^{1/y} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

$$I = I_1 + I_2 = (\pi - 1)/4.$$

(3) 令 $D_n = \{(x, y): -n < x < n, -n < y < n\}$，$\widetilde{D}_n = D \cap D_n$，则

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n, \quad I_n = \iint_{\widetilde{D}_n} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^4 + y^2}.$$

因为我们有

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{-\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n-1}} \mathrm{d}x \int_{1+x^2}^{n} \frac{\mathrm{d}y}{x^4 + y^2} = 2\int_0^{\sqrt{n-1}} \frac{\arctan(y/x^2)}{x^2}\Bigg|_{1+x^2}^{n} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\sqrt{n-1}} \frac{1}{x}\left[\arctan\left(\frac{n}{x^2}\right) - \arctan\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)\right]\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{x}\left(\arctan\left(\frac{n}{x^2}\right) - \arctan\frac{1+x^2}{x^2}\right)\right]_{\sqrt{n-1}}^{0} \\
&\quad + 4\int_0^{\sqrt{n-1}} \left(\frac{1}{2x^4 + 2x^2 + 1} - \frac{n}{x^2 + n^2}\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

又注意到 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n-1}} \frac{n\mathrm{d}x}{x^4 + n^2} < \frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n-1}} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{n-1}}{n}$，所以得出

$$I = \lim_{n\to\infty} 4\int_0^{\sqrt{n-1}} \frac{\mathrm{d}x}{2x^4 + 2x^2 + 1} = \lim_{n\to\infty} 2\int_0^{\sqrt{n-1}} \frac{\mathrm{d}x}{x^4 + x^2 + 1/2}$$

$$\begin{aligned}
(\text{分部积分}) = \lim_{n\to\infty}\Bigg\{ &\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{\sqrt{2}-1}\,x + 1/\sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{\sqrt{2}-1}\,x + 1/\sqrt{2}} \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}}\left[\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}\right)\right. \\
&\left.+ \arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}\right)\right]\Bigg\}\Bigg|_0^{\sqrt{n-1}} \\
= \pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}.&
\end{aligned}$$

例 6.4.3 求下列非负函数的反常积分:

(1) $I=\iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-[x^2+(y-x)^2+y^2]}dxdy$. (2) $I=\iint\limits_{x,y\geqslant 0}\dfrac{dxdy}{e^x+e^y}$.

解 (1) 化为累次积分,可知

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3y^2/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2/2}dx\right)dy$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3y^2/2}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2(x-y/2)^2}dx.$$

作变量替换 $t=\sqrt{2}(x-y/2)$,$dt=\sqrt{2}dx$,我们有

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3y^2/2}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3y^2/2}dy=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(2) 化为累次积分,再作变量替换 $t=e^x$,我们有

$$I=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^y}=\int_0^{+\infty}dy\int^{+\infty}\frac{dt}{t(t+e^y)}$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{dy}{e^y}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+e^y}\right)dt=\int_0^{+\infty}e^{-y}\left(\ln\frac{t}{t+e^y}\right)\Bigg|_1^{+\infty}dy$$
$$=\int_0^{+\infty}e^{-y}\ln(1+e^y)dy=2\ln 2.$$

例 6.4.4 试用反常二重积分计算下列积分:

(1) $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos u^2du$. (2) $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos\lambda x dx$ $(a,b>0)$.

(3) 设 $f\in C^{(1)}([0,\infty))$,$f'(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$.计算 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{f(bx)-f(ax)}{x}dx$.

解 (1) 作变量替换 $u^2=x$,则 $I=\int_0^{+\infty}\cos x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$.注意到积分等式 $1/\sqrt{x}=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2x}dt$,则又得到

$$I=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\cos x\cdot\left(\int_0^{+\infty}e^{-t^2x}dt\right)dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}\cos xe^{-t^2x}dx.$$

因为我们有

$$\int_0^{+\infty}\cos xe^{-t^2x}dx=-\frac{1}{t^2}\left(\cos xe^{-t^2x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-t^2x}\sin x dx\right)$$
$$=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}\int_0^{+\infty}\sin x d(e^{-t^2x})=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}\int_0^{+\infty}e^{-t^2x}\cos x dx,$$

所以(对上式移项)可推出 $\int_0^{+\infty}\cos xe^{-t^2x}dx=\dfrac{t^2}{1+t^4}$.从而得到

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos u^2\,\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\ln\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\arctan\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\arctan\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\Bigg|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

注 同理可证$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin u^2\,\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(2) 应用积分等式$\dfrac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t(x>0)$,可得

$$I=\int_0^{+\infty}\cos\lambda x\left(\int_a^b\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$$

$\left(\text{注意积分}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x\text{ 关于 }t\in[a,b]\text{一致收敛}\right)$.由此知

$$I=\int_a^b\frac{t\mathrm{d}t}{t^2+\lambda^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+\lambda^2}{a^2+\lambda^2}.$$

(3) 应用积分等式$\dfrac{f(bx)-f(ax)}{x}=\int_a^b f'(yx)\mathrm{d}y$,可知

$$I=\int_0^{+\infty}\left(\int_a^b f'(yx)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

由题设易得 $f'(x)\to 0(x\to+\infty)$.从而知 $f'(x)$非负递减或 $f'(x)$非正递增.不妨假定 $f'(x)$非负递减,此时有 $f'(yx)\leqslant f'(ax)(x\geqslant 0,y\in[a,b])$,故积分$\int_0^{+\infty}f'(yx)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[a,b]$一致收敛.因此,我们有

$$I=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}f'(yx)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{l-f(0)}{y}\mathrm{d}y=[l-f(0)]\ln\frac{b}{a}.$$

例 6.4.5 试判别下列积分的敛散性:

(1) 设 $D:x^2+y^2\geqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,\varphi\in C(D)$且 $m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M(x,y)\in D$.
$I=\iint\limits_D\dfrac{\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p}$.

(2) 设 $f(x,y)=(y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2$,且令区域

$$D_1:0\leqslant x\leqslant 1,1\leqslant y<+\infty;D_2:1\leqslant x\leqslant y,1\leqslant y<+\infty;$$
$$D_3:1\leqslant x<+\infty,1\leqslant y<+\infty.$$

$$I_1=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\quad I_2=\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;\quad I_3=\iint\limits_{D_3}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 设 $D:x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\geqslant 1,I=\iint\limits_D\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+x^q}(p,q>0)$.

(4) 设 $D:x+y\geqslant 1,I=\iint\limits_D\dfrac{\sin x\cdot\sin y}{(x+y)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(5) 设 $D: x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^{\alpha}+y^{\beta}\geqslant 1, I=\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^{\alpha}+y^{\beta})^{m}}(\alpha,\beta>0)$.

解 (1) 只需考察积分 $J=\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^{2}+y^{2})^{p}}$,对此,采用极坐标变换,可得

$$J=\int_{0}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{+\infty}\frac{r\mathrm{d}r}{r^{2p}}=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-1}}.$$

从而知当 $2p-1>1$ 即 $p>1$ 时,I 收敛.

(2) I_1 收敛.I_2 发散.I_3 发散.

(3) 令 $x=r^{1/p}\cos^{2/p}\theta, y=r^{1/q}\sin^{2/q}\theta$,则得

$$I=\frac{2}{pq}\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2/q-1}\theta\cdot\cos^{2/p-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_{1}^{+\infty}r^{1/p+\frac{1}{q}-2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)\cdot\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2-1/p-1/q}}.$$

由此即知在 $1/p+1/q<1$ 时 I 收敛.

(4) 令 $u=(x+y)/\sqrt{2}, v=(x-y)/\sqrt{2}$,则 D 变为 $D_1: u\geqslant 1/\sqrt{2}, v\in\mathbf{R}^{1}$.故可得

$$I=\frac{1}{2^{1+p/2}}\iint\limits_{D_1}\frac{\cos\sqrt{2}v-\cos\sqrt{2}u}{u^{p}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

注意到被积函数的连续性,转而考察 $D_2: 1\leqslant u\leqslant n, |v|\leqslant n$,我们有

$$\begin{aligned}I_n&=\iint\limits_{D_n}\frac{\cos\sqrt{2}v-\cos\sqrt{2}u}{u^{p}}\mathrm{d}u=\int_{1}^{n}\frac{\mathrm{d}u}{u^{p}}\Big|_{-n}^{n}(\cos\sqrt{2}v-\cos\sqrt{2}u)\mathrm{d}v\\&=\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}n)\int_{1}^{n}\frac{\mathrm{d}u}{u^{p}}-2n\cdot\int_{1}^{n}\frac{\cos\sqrt{2}u}{u^{p}}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

由此即知不存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$,即 I 发散.

(5) 作变量替换 $x=r^{2/\alpha}\cos^{2/\alpha}\theta, y=r^{2/\beta}\sin^{2/\beta}\theta$,易知 $J=r^{2/\alpha+2/\beta-1}\varphi(\theta)$,故 $I=\int_{0}^{\pi/2}\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta\int_{1}^{+\infty}r^{2/\alpha+2/\beta-1}\Big/r^{2m}\mathrm{d}r$.由此知 $-1/\alpha-1/\beta<m$ 时 I 收敛.

例 6.4.6 计算下列积分 I 的值:

(1) 设 $D: x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^{3}+y^{3}\leqslant 1. I=\iint\limits_{D}x^{2}y^{3}\sqrt{1-x^{2}-y^{3}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2) 设 $D=\mathbf{R}^{2}, a>0, ac-b^{2}>0. I=\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(p+ax^{2}+2bxy+cy^{2})^{2}}(p>0)$.

(3) 设 $D: 0\leqslant x\leqslant 1, x+y\geqslant 1. I=\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^{p}}$.

解 (1) 作变量替换 $x^{3}+y^{3}=u, y^{3}=uv$,即 $x=u^{1/3}(1-v)^{1/3}, y=u^{1/3}v^{1/3}$,则 $J=u^{-1/3}v^{-2/3}(1-v)^{-2/3}/9$,且 D 就变成 $\widetilde{D}: 0\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant 1$.从而我们有

$$I=\iint_{\tilde{D}} u^{2/3}(1-v)^{2/3}uv(1-u)^{1/2}\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\frac{1}{9}\int_0^1 u^{7/3-1}(1-u)^{3/2-1}\mathrm{d}u\int_0^1 v^{1/3}\mathrm{d}v=\frac{1}{9}\mathrm{B}\left(\frac{7}{3},\frac{3}{2}\right)\frac{3}{4}$$
$$=\frac{1}{12}\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{7}{3}+\frac{3}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 11\cdot 17}\,\frac{\Gamma^3(1/3)}{3\sqrt{2}\pi}.$$

(2) 选 θ,作转轴变换
$$x=u\cos\theta+v\sin\theta,\quad y=-u\sin\theta+v\cos\theta,$$
使得 $ax^2+2bxy+cy^2=Au^2+Cv^2$,其中判别式 $ac-b^2$ 不变,故 $AC=ac-b^2$.注意到二次式的正定性,且 $A>0$,$C>0$,$J=1$,易知
$$I=\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{(p+Au^2+Cv^2)^2}.$$
令 $u=\sqrt{p/A}\,s$,$v=\sqrt{p/C}\,t$,则有 $I=\dfrac{1}{p\sqrt{AC}}\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{(1+s^2+t^2)^2}$.再作极坐标变换 $s=r\cos\varphi$,$t=r\sin\varphi$,我们有
$$I=\frac{1}{p\sqrt{AC}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}\frac{r\mathrm{d}r}{(1+r^2)^2}=\frac{\pi}{p}\sqrt{AC}.$$

(3) 令 $x+y=u$,$x=v$,则 $J=1$,D 变为 $\tilde{D}$:$0\leqslant v\leqslant 1$,$1\leqslant u<\infty$,且可得
$$I=\int_0^1\mathrm{d}v\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^p}=\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{\mathrm{d}u}{u^p}=\lim_{n\to\infty}(n^{1-p}-1)/(1-p).$$
这说明当 $p>1$ 时,$I=1/(p-1)$;$p\leqslant 1$ 时 I 发散.

例 6.4.7 计算下列积分:

(1) $I=\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2}|ax+by|\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (A=a^2+b^2>0)$.

(2) 设 $0<\alpha<\pi/2$,D 是第一象限.$I=\displaystyle\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(3) 设 $a>0$,$ac-b^2>0$.$I=\displaystyle\iint_{\mathbf{R}^2}\mathrm{e}^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 (1) 选 c,d 作正交变换 $u=(ax+by)/\sqrt{A}$,$v=cx+dy$,则 $x^2+y^2=u^2+v^2$.从而可得
$$I=\iint_{\mathbf{R}^2}|u|\,\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)/2}\sqrt{A}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\sqrt{2A\pi}.$$

(2) 记被积函数为 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-[(x+y\cos\alpha)^2+y^2\sin^2\alpha]}$,并作变量替换 $x+y\cos\alpha=u$,$y\sin\alpha=v$,则 $J=1/\sin\alpha$,且 D 化为 $\tilde{D}$:$0\leqslant v\leqslant u\tan\alpha<+\infty$,再作极坐标变换 $u=r\cos\theta$,$v=r\sin\theta$,我们有

$$I=\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\alpha}{2\sin\alpha}.$$

(3) 取 (x_0,y_0) 满足 $\begin{cases} ax_0+by_0+d=0, \\ bx_0+cy_0+e=0, \end{cases}$ 并作变换:

$$x=x_0+x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y=y_0+x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

$$(b\tan^2\alpha-(c-a)\tan\alpha-b=0).$$

则被积函数变为 $\mathrm{e}^{Ax'^2+Cy'^2+f'}$,其中

$$A=-(a\cos^2\alpha-2b\sin\alpha\cos\alpha+c\sin^2\alpha)<0,$$

$$C=-(a\sin^2\alpha-2b\sin\alpha\cos\alpha+c\cos^2\alpha)<0,$$

$$f'=\Delta/\delta:\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix},\quad \delta=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0$$

$$(AC=ac-b^2=\delta,\quad A+C=a+c).$$

从而得到

$$I=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\mathrm{e}^{Ax'^2+Cy'^2+f'}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=\mathrm{e}^{f'}\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\mathrm{e}^{Ax'^2+Cy'^2}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y',$$

再作变量替换 $x'=\rho\cos\varphi/\sqrt{-A}$, $y'=\rho\sin\varphi/\sqrt{-C}$,则 $J=\rho/\sqrt{AC}$.

$$I=\frac{\mathrm{e}^{f'}}{\sqrt{AC}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}\mathrm{e}^{\frac{\Delta}{\delta}}.$$

***例 6.4.8** 试证明下列命题:

(1) 设 $A(\boldsymbol{x})=A(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的正定二次型,则

$$I=\iint\limits_{\mathbf{R}^n}\cdots\int\mathrm{e}^{-A(x)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\Delta}}\quad (\Delta\text{ 是 }A\text{ 的行列式}).$$

(2) 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\|\boldsymbol{x}\|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, $p>-1$,则

$$I=\iint\limits_{\mathbf{R}^n}\cdots\int|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\rangle|^p\Big/\mathrm{e}^{-\|\boldsymbol{x}\|^2}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=2^{\frac{p+1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

(3) 设 D_n: $1\leqslant x_1,x_2,\cdots,x_n<+\infty$,则 $(\alpha>0)$

$$I=\iint\limits_{D_n}\cdots\int\frac{\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n}{x_1\cdots x_n\cdot[\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)]^{\alpha}}=n!\alpha^{-n}.$$

证明 (1) 可作正交变换,使得 $A(\boldsymbol{x})=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$ $(\lambda_i>0, i=1,2,\cdots,n)$.易知其行列式 $\Delta=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$,从而得

$$I=\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_it^2}\mathrm{d}t=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\Delta}}.$$

(2) 作新坐标系,其一是 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

(3) $I=n!\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}\int_{x_1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2}\cdots\int_{x_{n-1}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x_n}{x_n^{1+\alpha}}=n!\alpha^{-n}$.

例 6.4.9 判别下列积分的敛散性：

(1) 设 D 是由 $y=x^2$，$x^2+y^2=1$ 和 $y=0$ 所围成的区域，$I=\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

(2) 设 D：$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x^\alpha+y^\beta\leqslant 1(\alpha>0,\beta>0)$，$I=\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1-x^\alpha-x^\beta)^m}$.

(3) 设 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，$D$：$0<r^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant 1$，$f\in C(D)$，且 $|f(x,y)|\leqslant M/r^\alpha(\alpha<2)$，$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(4) 设 D：$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x+y\leqslant 1$，$I=\iint\limits_D \dfrac{(x+y)^2\ln(x+y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

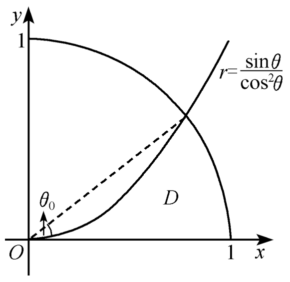


图 6.39

解 (1) 把 D 的边界曲线化为极坐标下的方程：

$$r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta},\quad r=1,\theta=0.$$

令 θ_0 是方程 $\cos^2\theta=\sin\theta$ 的解，则(图 6.39)

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint\limits_{\substack{0<\theta<\theta_0\\ \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}<r<1}}\frac{r\mathrm{d}r}{r^2}=\int_0^{\theta_0}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^1\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$=\int_0^{\theta_0}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta.$$

因 $\ln\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\sim-\ln\theta(\theta\to 0)$，所以反常积分 $\displaystyle\int_0^{\theta_0}\ln\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$ 收敛，故反常积分 I 收敛 .

(2) 作变量替换 $x=r^{2/\alpha}\cos^{2/\alpha}\theta$，$y=r^{2/\beta}\sin^{2/\beta}\theta$，则区域 D 变为 $\widetilde{D}$：$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$，$0\leqslant r\leqslant 1$，$J=\varphi(\theta)r^{2/\alpha+2/\beta-1}$，且可得

$$I=\iint\limits_{\widetilde{D}}\frac{r^{2/\alpha+2/\beta-1}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{(1-r^2)^m}=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r^{2/\alpha+2/\beta-1}\mathrm{d}r}{(1-r^2)^m}.$$

由此即知 $m<1$ 时 I 收敛 .

(3) 采用极坐标 $x-x_0=r\cos\theta$，$y-y_0=r\sin\theta$，则得

$$I=\iint\limits_D|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1|f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)|r\mathrm{d}r\leqslant M2\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{\alpha-1}}.$$

由此即知 $\alpha<2$ 时 I 收敛 .

(4) 将区域 D 扩展到 $\widetilde{D}$：$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x^2+y^2\leqslant 1$，并采用极坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$J=r$.从而知

$$\iint\limits_D\frac{(x+y)^2|\ln(x+y)|}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2|\ln r(\cos\theta+\sin\theta)|}{r^2}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\pi/2}(\cos\theta+\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta\left[\int_0^1|\ln r|r\mathrm{d}r+\int_0^1|\ln(\cos\theta+\sin\theta)|r\mathrm{d}r\right].$$

这说明 I 收敛.

例 6.4.10　试证明下列命题:

(1) 设 D:$0\leqslant x\leqslant 1$,$0\leqslant y\leqslant 1$,则 $I=\iint\limits_D \frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散.

(2) 设 D:$0\leqslant x\leqslant 1$,$0\leqslant y\leqslant 1$;$1\leqslant p<+\infty$,令

$$f(x,y)=1/(xy-1)\quad(xy\neq 1),\quad f(x,y)=0\quad(xy=1),$$

则 $I=\iint\limits_D |f(x,y)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛当且仅当 $1\leqslant p<2$.

证明　(1) 作变量替换 $x+y=u$,$x-y=v$(即 $x=(u+v)/2$,$y=(u-v)/2$),则 $|J|=1/2$,且 D 变为 $\widetilde{D}$:$\{(u,v)$:$0\leqslant u+v\leqslant 2$,$0\leqslant u-v\leqslant 2\}$,$I=\frac{1}{2}\iint\limits_{\widetilde{D}}\frac{v}{u^3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.因为我们有 $\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u\frac{v}{u^3}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{u}=+\infty$,所以 I 发散.

(2) 取 $0<a_1<b_1<1$,$0<a_2<b_2<1$,且对 $\widetilde{I}=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}|f(x,y)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 作变量替换 $x=v$,$y=(1-u)/v$,则 $J=1/v$,且有 $\widetilde{I}=\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{1-b_2v}^{1-a_2v}v^{-1}u^{-p}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v$.

(i) 若 $p=1$,则可得

$$\lim_{\substack{a_2\to 0\\ b_2\to 1}}\widetilde{I}=\lim_{\substack{a_2\to 0\\ b_2\to 1}}\int_{a_1}^{b_1}v^{-1}\ln\left(\frac{1-a_2v}{1-b_2v}\right)\mathrm{d}v=-\int_{a_1}^{b_1}v^{-1}\ln(1-v)\mathrm{d}v$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v^{n-1}}{n}\right)\mathrm{d}v=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_1^2}{n^2}-\frac{a_1^2}{n^2}\right).$$

由此可知 $I=\lim\limits_{\substack{a_1\to 0\\ b_1\to 1}}\lim\limits_{\substack{a_2\to 0\\ b_2\to 1}}\widetilde{I}=\pi^2/6$.

(ii) 若 $p>1$,则可得

$$\widetilde{I}=\int_{a_1}^{b_1}(1-p)^{-1}v^{-1}[(1-a_2v)^{1-p}-(1-b_2v)^{1-p}]\mathrm{d}v.$$

$$\lim_{\substack{a_2\to 0\\ b_2\to 1}}\widetilde{I}=\int_{a_1}^{b_1}(1-p)^{-1}v^{-1}[1-(1-v)^{1-p}]\mathrm{d}v.$$

易知在 $b_1\to 1$ 时,上式积分收敛当且仅当 $-1<1-p$,即 $p<2$;另一方面,当 $v\to 0$ 时,$v^{-1}[1-(1-v)^{1-p}]$ 有界.故当 $a_1\to 0$ 时,$\int_{a_1}^1(1-p)^{-1}v^{-1}[1-(1-v)^{1-p}]\mathrm{d}v$ 有界.

总结上述结论,可知 I 收敛当且仅当 $1\leqslant p<2$.

例 6.4.11　计算下列积分:

(1) 设 D:$x\geqslant 0$,$x\leqslant y\leqslant 1$,$I=\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(2) 设 $D: x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 1$, $I=\iint\limits_D x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (p,q,r>0)$.

(3) 设 $D: y\geqslant 0, x\geqslant y$, $I=\iint\limits_D x^{-3/2}\mathrm{e}^{y-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 (1) $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_0^1[\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]_0^y\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1(\ln(1+\sqrt{2})y-\ln y)\mathrm{d}y=\ln(1+\sqrt{2}).$$

(2) 将积分写成累次积分,我们有

$$I=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y^{q-1}(1-x)^{r-1}\left(1-\frac{y}{1-x}\right)^{r-1}\mathrm{d}y.$$

作变量替换 $y/(1-x)=t$,可得

$$I=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{r-1}\mathrm{d}x\int_0^1(1-x)^{q-1}t^{q-1}(1-t)^{r-1}(1-x)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+r-1}\mathrm{d}x\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{r-1}\mathrm{d}t=\mathrm{B}(p,q+r)\cdot\mathrm{B}(q,r)$$
$$=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q+r)}{\Gamma(p+q+r)}\frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r)}.$$

(另一解法见例 6.4.13(3)).

(3) $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^x x^{-3/2}\mathrm{e}^{y-x}\mathrm{d}y=-2\int_0^{+\infty}(1-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x^{-1/2}$

$$=-2(1-\mathrm{e}^{-x})x^{-1/2}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}x^{-1/2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\pi}.$$

例 6.4.12 解答下列问题:

(1) 设 $f\in C([0,\alpha])$, $D: 0\leqslant y\leqslant x\leqslant \alpha$,求积分 $I=\iint\limits_D\frac{f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(\alpha-x)(x-y)}}$.

(2) 设 $\varphi\in C^{(1)}([0,a])$, $\varphi(0)=0$,试求 $f\in C([0,a])$,使得

$$\varphi(x)=\int_0^x\frac{f(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{x-y}}. \quad ①$$

(3) 设 $f\in C^{(1)}(\mathbf{R}^1)$且 $f'(x)>0\ (x\in\mathbf{R}^1)$, $0<\alpha<1$,试证明

$$I=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{(b-y)^{1-\alpha}}\int_a^y\frac{f'(x)\mathrm{d}x}{(y-x)^\alpha}=\pi[f(b)-f(a)]/\sin(\alpha\pi).$$

解 (1) 易知二重瑕积分存在,故有

$$I=\int_0^\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}\int_0^x\frac{f(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{x-y}}=\int_0^\alpha f(y)\mathrm{d}y\int_y^\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}\sqrt{x-y}}$$

$$=\int_0^{\alpha} f(y)2\arcsin\sqrt{\frac{x-y}{\alpha-y}}\Bigg|_y^{\alpha}\mathrm{d}y=\pi\int_0^{\alpha} f(y)\mathrm{d}y.$$

(2) 在式①两端乘以 $1/\sqrt{\alpha-x}$ 并对 $x\in[0,\alpha]$ 积分，可得(第(1)题)

$$\int_0^{\alpha}\frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}=\int_0^{\alpha}\mathrm{d}x\int_0^{x}\frac{f(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{(\alpha-x)(x-y)}}=\pi\int_0^{\alpha} f(y)\mathrm{d}y.$$

在上式两边对 α 求导，即知

$$f(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\varphi'(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{\alpha-x}}.$$

将其代入式①，我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{x}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x-y}}\int_0^{y}\frac{\varphi'(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{y-t}}=\int_0^{x}\varphi'(t)\mathrm{d}t=\varphi(t).$$

(3) 令 $x=u+a,y=v+a$，则 $J=1$，且知

$$I=\int_0^{b-a}\frac{\mathrm{d}v}{(b-a-v)^{1-\alpha}}\int_0^{v}\frac{f'(u+a)}{(v-u)^{\alpha}}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{b-a} f'(u+a)\mathrm{d}u\int_u^{b-a}(b-a-v)^{\alpha-1}(v-u)^{-\alpha}\mathrm{d}v.$$

注意到 $\int_a^b(t-a)^p(b-t)^q\mathrm{d}t=(b-a)^{p+q+1}\mathrm{B}(p+1,q+1)$，即知

$$\int_u^{b-a}(v-u)^{-\alpha}(b-a-v)^{\alpha-1}\mathrm{d}v=(b-a-u)^{-\alpha+\alpha-1+1}\mathrm{B}(-\alpha+1,\alpha-1+1)$$

$$=\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)/\Gamma(1)=\pi/\sin(\pi\alpha).$$

从而可得

$$I=\int_0^{b-a} f'(u+a)\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}[f(b)-f(a)].$$

例 6.4.13　求下列积分：

(1) 设 $D:x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1,I=\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-(x^2/a^2+y^2/b^2)^2}}$.

(2) 设 $D:x\geqslant 0,y\geqslant 0,(x/a)^A+(y/b)^B\leqslant 1,I=\iint\limits_D x^{p-1}y^{q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y(p,q>0)$.

(3) 设 $D:x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1,I=\iint\limits_D x^{p-1}y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y(p,q,r>0)$.

解　(1) 作替换 $x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta$，则 $|J|=abr$，且有

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{abr\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}}=\pi ab\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{ab}{2}\pi^2.$$

(2) 令 $u=(x/a)^A$, $v=(y/b)^B$, 即 $x=au^{1/A}$, $y=bv^{1/B}$, 则 $J=\dfrac{ab}{AB}u^{1/A-1}v^{1/B-1}$, 且 D 变为 $\widetilde{D}: u\geqslant 0, v\geqslant 0, u+v\leqslant 1$. 由此可知,

$$I=\iint_{\widetilde{D}} a^{p-1}u^{\frac{p-1}{A}}b^{q-1}v^{\frac{q-1}{B}}\frac{ab}{AB}u^{\frac{1}{A}-1}v^{\frac{1}{B}-1}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{a^pb^q}{AB}\iint_{\widetilde{D}} u^{\frac{p}{A}-1}v^{\frac{q}{B}-1}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{a^pb^q}{AB}\frac{\Gamma(p/A)\Gamma(q/B)}{\Gamma(p/A+q/B+1)}.$$

(3) 令 $x+y=u$, $x=uv$, 则 $J=-u$, 且 D 变为 $\widetilde{D}: 0\leqslant u, v\leqslant 1$. 我们有

$$I=\iint_{\widetilde{D}}(uv)^{p-1}\left[u^{q-1}(1-v)^{q-1}(1-u)^{r-1}u\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1 u^{p+q-1}(1-u)^{r-1}\mathrm{d}u\int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}\mathrm{d}v$$

$$=\mathrm{B}(p+q,r)\mathrm{B}(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)/\Gamma(p+q+r).$$

例 6.4.14　试求下列积分 I_δ 在 $\delta\to 0^+$ 时的极限:

(1) 设 $D_\delta=\{(x,y): 0<\delta\leqslant x+y<1, 0\leqslant y\leqslant x/\delta\}$,

$$I_\delta=\iint_{D_\delta}\frac{(x+y)\ln(1+y/x)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中以原点为圆心 r 为半径的圆域. 对 $(x,y)\in D$, 作以 (x,y) 为圆心半径为 δ 的圆周 l, 并记 L 在 D 外部分之长度为 $l(x,y)$, $I_\delta=\dfrac{1}{\delta^2}\displaystyle\iint_D l(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　(1) 作变量替换 $u=x+y$, $v=y/x$, 则 $J=u/(1+v)^2$, 且 D_δ 变为 $\widetilde{D}_\delta: \delta\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant 1/\delta$. 从而可得

$$I_\delta=\iint_{\widetilde{D}_\delta}\frac{u\ln(1+v)}{\sqrt{1-u}}\frac{u}{(1+v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_\delta^1\frac{u^2\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u}}\int_0^{1/\delta}\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\mathrm{d}v.$$

注意到(用分部积分公式) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ln(1+v)/(1+v)^2\mathrm{d}v=1$, 以及

$$\int_0^1\frac{u^2\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u}}=\mathrm{B}\left(3,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3+1/2)}=\frac{16}{5},$$

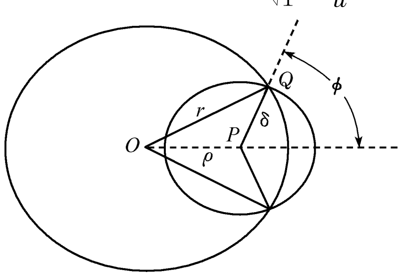


图 6.40

故知 $\lim\limits_{\delta\to 0}I_\delta=16/5$.

(2) 采用极坐标表示: $(x,y)=(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, $l(x,y)=S(\rho)$, 易知 $S(\rho)=0\ (0\leqslant\rho\leqslant r-\delta)$, 以及(图 6.40)

$$S(\rho)=2\delta\varphi=2\delta\arccos\left(\frac{r^2-\rho^2-\delta^2}{2\rho\delta}\right)$$

$$(r-\delta\leqslant\rho\leqslant r).$$

从而可得

$$I_\delta=\frac{1}{\delta^3}\int_0^{2\pi}\int_0^r S(\rho)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\delta^3}\int_0^{2\pi}\int_{r-\delta}^r 2\delta\rho\arccos\left(\frac{r^2-\rho^2-\delta^2}{2\rho\delta}\right)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4\pi}{\delta}\int_{r-\delta}^r\rho\arccos\left(\frac{r^2-\delta^2-\rho^2}{2\rho\delta}\right)\mathrm{d}\rho.$$

作变量替换 $\rho=r-\delta u$,则有

$$I_\delta=4\pi\int_0^1(r-\delta u)\arccos\left(\frac{2ur-\delta(1+u^2)}{2(r-\delta u)}\right)\mathrm{d}u.$$

因为上式中被积函数在 $0\leqslant u\leqslant 1,0\leqslant\delta\leqslant r/2$ 上连续,所以

$$\lim_{\delta\to 0}I_\delta=4\pi\int_0^1\lim_{\delta\to 0}(r-\delta u)\arccos\left(\frac{2ur-\delta(1+u^2)}{2(r-\delta u)}\right)\mathrm{d}u$$

$$=4\pi\int_0^1 r\cdot\arccos u\mathrm{d}u\quad(\text{用分部积分公式})$$

$$=4\pi r(u\cdot\arccos u)\Big|_0^1+4\pi r\int_0^1\frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=4\pi r.$$

例 6.4.15 判别下列积分的敛散性:

(1) 设 $D:|x|+|y|+|z|\geqslant 1$,$I=\iiint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$,其中 $p,q,r>0$.

(2) 设 $D:x^2+y^2+z^2\geqslant 1$,$I=\iiint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha}$.

解 (1) 令 $\widetilde{D}$:第一象限内 $|x|^p+|y|^q+|z|^r\geqslant 1$,易知 I 与积分

$$\widetilde{I}=\iiint\limits_{\widetilde{D}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$$

的敛散性相同.对积分 $\widetilde{I}$,采用变量替换

$$x=\rho^{1/p}\sin^{2/p}\theta\cos^{2/p}\varphi,\quad y=\rho^{1/q}\sin^{2/q}\theta\sin^{2/q}\varphi,\quad z=\rho^{1/r}\cos^{2/r}\theta,$$

易知 $J=\frac{4}{pqr}\rho^{1/p+1/q+1/r-1}\sin^{2/p+2/q-1}\theta\cdot\sin^{2/q-1}\varphi\cdot\cos^{2/p-1}\varphi\cdot\cos^{2/r-1}\theta$,且有

$$\widetilde{I}=\frac{4}{pqr}\int_0^{\pi/2}\sin^{2/p+2/q-1}\theta\cdot\cos^{2/r-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin^{2/q-1}\varphi\cdot\cos^{2/p-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\int_1^{+\infty}\rho^{1/p+1/q+1/r-2}\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{pqr}\mathrm{B}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q},\frac{1}{r}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)\int_1^{+\infty}\rho^{1/p+1/q+1/r-2}\mathrm{d}\rho.$$

从而可知 $\widetilde{I}$(即 I)收敛当且仅当 $1/p+1/q+1/r<1$.

(2) 采用球坐标变换,可得 $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_1^{+\infty}\frac{r^2\mathrm{d}r}{r^\alpha}$.由此知 $\alpha>3$ 时 I 收敛.

例 6.4.16 计算下列积分:

(1) 设 $\Omega: x\geqslant 0, y\geqslant 1, z\geqslant 1, xyz\leqslant 1$, $I=\iiint\limits_{\Omega} x^2 y e^{xyz}\,dx\,dy\,dz$.

(2) 设 $\Omega: 0\leqslant z<+\infty, 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$, $I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\sin(\sqrt{x^2+y^2}\,z)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz$.

(3) 设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)$, $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3)$, $\Omega: \|\boldsymbol{Y}\|^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2\leqslant 1$, $I=\iiint\limits_{\Omega}\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\|^{-1}\,dy_1\,dy_2\,dy_3$.

(4) 设 $\Omega: 0<x, y<1, z>0$, $I_1=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dx\,dy\,dz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$,由此再求 $I_2=\int_0^{+\infty}(\arctan z/z)^2\,dz$.

解　(1) 令 $x=u, y=\dfrac{u+v}{u}, z=\dfrac{u+v+w}{u+v}$,则 $J=\dfrac{1}{u(u+v)}$,且 Ω变为 $\bar{\Omega}: u\geqslant 0, v\geqslant 0, w\geqslant 0, u+v+w\leqslant 1$,从而可得

$$I=\iiint\limits_{\bar{\Omega}} e^{u+v+w}\,du\,dv\,dw=\frac{e}{2}-1.$$

(2) 记 D 为 $\mathbf{R}^2$ 中区域:$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$,且对 D 上积分 $I_1=\iint\limits_{D}\dfrac{\sin(\sqrt{x^2+y^2}\,z)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ 作极坐标变换,可知

$$I_1=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{\sin(rz)}{r}r\,dr=2\pi\int_1^2\sin(rz)\,dr.$$

从而我们有

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{+\infty}dz\iint\limits_{D}\frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2}\,z)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\lim_{R\to+\infty}\int_0^R 2\pi\,dz\int_1^2\sin(rz)\,dr\\
&=\lim_{R\to+\infty}2\pi\int_1^2 dr\int_0^R\sin(rz)\,dz=\lim_{R\to+\infty}2\pi\int_1^2\frac{dr}{r}\int_0^R\sin(rz)\,d(rz)\\
&=\lim_{R\to+\infty}\int_1^2\frac{2\pi}{r}[1-\cos(Rr)]\,dr=2\pi\lim_{R\to+\infty}\left[\ln 2-\int_1^2\frac{\cos(Rr)}{r}\,dr\right]\\
&=2\pi\ln 2-2\pi\lim_{R\to+\infty}\int_R^{2R}\frac{\cos t}{t}\,dt=2\pi\ln 2.
\end{aligned}$$

(3) 不妨假定 $\boldsymbol{X}=(0,0,a)$,则 $\|\boldsymbol{X}\|=a$,采用球坐标变换,可得

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1 r^2\,dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{r^2-2ar\cos\varphi+a^2}}\\
&=\frac{2\pi}{a}\int_0^1 r\sqrt{r^2-2ar\cos\varphi+a^2}\,\Big|_0^{\pi}dr=\frac{2\pi}{a}\int_0^1 r(r+a-|r-a|)\,dr
\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}2\pi-2\pi\|\boldsymbol{X}\|^2/3, & \|\boldsymbol{X}\|\leqslant 1,\\ 4\pi/3\|\boldsymbol{X}\|, & \|\boldsymbol{X}\|\geqslant 1.\end{cases}$$

(4) (i) 将 I 化为累次积分,可得

$$I_1=\iint\limits_{0<x,y<1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$$
$$=\iint\limits_{0<x,y<1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2-y^2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{x^2}{1+x^2z^2}-\frac{y^2}{1+y^2z^2}\right]\mathrm{d}z$$
$$=\frac{\pi}{2}\iint\limits_{0<x,y<1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x+y}=\frac{\pi}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{x+y}=\pi\ln 2.$$

(ii) 将 I_1 的积分序与(i)相反,则可得

$$I_1=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}z\iint\limits_{0<x,y<1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2z^2}\right)^2\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan z}{z}\right)^2\mathrm{d}z.$$

由此知 $I_2=\pi\ln 2$.

例 6.4.17 计算下列积分:

(1) 设 Ω: $2y\geqslant x^2, y\leqslant x, 0\leqslant z\leqslant 1$, $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{zx}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(2) 设 Ω: $0\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^{\alpha}}$ $(\alpha<3)$.

(3) 设 Ω: $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$, $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$.

(4) 设 Ω: $x>0, y>0, z>0, x+y+z<1$, $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x+y+z)^{\alpha}}$ $(\alpha<3)$.

解 (1) 化为累次积分,可得(如图 6.41)

$$I=\int_0^2\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{2y}}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{zx}{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\int_0^2\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{2y}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{2(x^2+y^2)}$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^2[\ln(x^2+y^2)]\Big|_y^{\sqrt{2y}}\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\int_0^2\ln[(y^2+2y)/2y^2]\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^2[\ln[(2+y)/y]-\ln 2]\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{4}[(2+y)\ln(2+y)-y\ln y]\Big|_0^2=\frac{\ln 2}{2}.$$

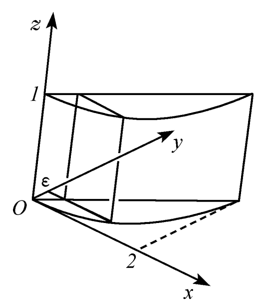


图 6.41

(2) 采用球坐标,我们有

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{r^2\mathrm{d}r}{r^{\alpha}}=4\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{\alpha-2}}=\frac{4\pi}{3-\alpha}.$$

(3) 采用球坐标,我们有

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\frac{r^2\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}=4\pi\left(\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^2}}-\int_0^1\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\right)$$

$$=4\pi\left[\arcsin1-\frac{1}{2}\arcsin1\right]=\pi^2.$$

(4) 作变量替换 $x=u(1-v)$,$y=uv(1-w)$,$z=uvw$,则 $J=u^2v$,且 Ω为变 $\overline{\Omega}$:$0<u<1$,$0<v<1$,$0<w<1$.由此知

$$I=\iiint\limits_{\overline{\Omega}}\frac{u^2v\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w}{u^{\alpha}}=\int_0^1\mathrm{d}w\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^1\frac{u^2v\mathrm{d}u}{u^{\alpha}}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{u^{\alpha-2}}=\frac{1}{2(3-\alpha)}.$$

例 6.4.18　计算下列积分 I:

(1) 设 Ω:$(x/a)^{\alpha}+(y/b)^{\beta}+(z/c)^{\gamma}\leqslant1$($x,y,z>0$;$a,b,c,\alpha,\beta,\gamma>0$).

$$I=\iiint\limits_{\Omega}x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(2) 设 Ω:$0<x,y,z<\pi$.$I=\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1-\cos x\cos y\cos z}$.

解　(1) 作变量替换 $u=(x/a)^{\alpha}$,$v=(y/b)^{\beta}$,$w=(z/c)^{\gamma}$,则 $J=\dfrac{abc}{\alpha\beta\gamma}u^{1/\alpha-1}v^{1/\beta-1}w^{1/\gamma-1}$,且 Ω变为 $\widetilde{\Omega}$:$u+v+w\leqslant1$,$u\geqslant0$,$v\geqslant0$,$w\geqslant0$.从而可得

$$I=\frac{a^pb^qc^r}{\alpha\beta\gamma}\iiint\limits_{\widetilde{\Omega}}u^{p/\alpha-1}v^{q/\beta-1}w^{r/\gamma-1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\frac{a^pb^qc^r}{\alpha\beta\gamma}\frac{\Gamma(p/\alpha)\Gamma(q/\beta)\Gamma(r/\gamma)}{\Gamma(p/\alpha+q/\beta+r/\gamma+1)}.$$

注　当 $p=q=r=1$,且 $\alpha=\beta=\gamma=2$ 时,我们有

$$\text{椭球体体积}=8I=abc\Gamma^3(1/2)/\Gamma(5/2)=\frac{4}{3}\pi abc.$$

(2) 作变换 $u=\tan\dfrac{x}{2}$,$v=\tan\dfrac{y}{2}$,$w=\tan\dfrac{z}{2}$,则得

$$I=4\iiint\limits_{u,v,w>0}\frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w}{u^2+v^2+w^2+u^2v^2w^2}.$$

再采用球极坐标变换,可知

$$I=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}\frac{\sin\theta\mathrm{d}r}{1+r^4\sin^4\theta\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}.$$

又令 $r=t^{1/4}\cos^{-1/2}\theta\cdot\cos^{-1/2}\varphi\cdot\sin^{-1/2}\varphi/\sin\theta$,我们有

$$I=\int_0^{\pi/2}\cos^{-1/2}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\cos^{-1/2}\varphi\cdot\sin^{-1/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}\frac{u^{1/4-1}}{1+u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)}\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/4)}{\Gamma(1/2)}\frac{\pi}{\sin(\pi/4)}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}\frac{\Gamma^3(1/4)}{\Gamma(3/4)}.$$

即 $I=\frac{1}{4}\Gamma^4(1/4)$.

***例 6.4.19** 计算下列 n 重反常积分:

(1) 令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\|\boldsymbol{x}\|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$,

(i) $I=\underset{\|\boldsymbol{x}\|\leqslant 1}{\iint\cdots\int}\|x\|^{-\alpha}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\,(\alpha<n)$.

(ii) $I=\underset{\|\boldsymbol{x}\|\geqslant 1}{\iint\cdots\int}\|x\|^{-\alpha}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\,(\alpha>n)$.

(2) 设 $\Omega_n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_i\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,n);\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leqslant 1\}$,

$$I_n=\underset{\Omega_n}{\iint\cdots\int}x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\quad(p_i>0,i=1,2,\cdots,n).$$

解 (1) 已知 n 维单位球面积 $w_n=2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)$.

(i) $I=w_n\int_0^1\frac{r^{n-1}}{r^{\alpha}}\mathrm{d}r=\frac{w_n}{n-\alpha}$. (ii) $I=w_n\int_1^{+\infty}r^{n-1-\alpha}\mathrm{d}r=\frac{w_n}{\alpha-n}$.

(2) 当 $n=2$ 时,记 $\Omega_2: x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_1+x_2\leqslant 1$,可知

$$I_2=\iint_{\Omega_2}x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_0^1 x_1^{p_1-1}\mathrm{d}x_1\int_0^{1-x_1}x_2^{p_2-1}\mathrm{d}x_2$$

$$=\frac{1}{p_2}\int_0^1 x_1^{p_1-1}(1-x_1)^{p_2}\mathrm{d}x_1=\frac{1}{p_2}\mathrm{B}(p_1,1+p_2)=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1+p_2+1)}.$$

现在假定对 $n-1$,成立等式

$$I_{n-1}=\underset{\Omega_{n-1}}{\iint\cdots\int}x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n-1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)},$$

则对 n,我们有

$$I_n=\int_0^1 x_n^{p_n-1}\mathrm{d}x_n\underset{\tilde{\Omega}_{n-1}}{\iint\cdots\int}x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1},$$

$$\tilde{\Omega}_{n-1}=\{(x_1,\cdots,x_{n-1}):\sum_{i=1}^{n-1}x_i\leqslant 1-x_n, x_i\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,n-1)\}.$$

作变量替换: $x_1=(1-x_n)\xi_1,\cdots,x_{n-1}=(1-x_n)\xi_{n-1}$,则 $\tilde{\Omega}_{n-1}$ 变为

$$\tilde{\tilde{\Omega}}_{n-1}=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-1}):\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i\leqslant 1,\xi_i\geqslant 0\,(i=1,2,\cdots,n-1)\},$$

且 Jacobi 行列式

$$J_{n-1}=(1-x_n)^{n-1}x_1^{p_1-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}=\xi_1^{p_1-1}\cdots\xi_{n-1}^{p_{n-1}-1}(1-x_n)^{p_1+\cdots+p_n-n+1},$$

从而我们有

$$\underset{\tilde{\Omega}_{n-1}}{\iint\cdots\int}x_1^{p_1-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}$$

$$= (1-x_n)^{p_1+\cdots+p_{n-1}} \underset{\tilde{\tilde{\Omega}}_{n-1}}{\iint\cdots\int} \xi_1^{p_1-1}\cdots\xi_{n-1}^{p_{n-1}-1}\,d\xi_1\cdots d\xi_{n-1}$$

$$= (1-x_n)^{p_1+\cdots+p_{n-1}} \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}.$$

从而可得

$$I=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}\int_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)^{p_1+\cdots+p_{n-1}}\,dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}\mathrm{B}(p_n,p_1+\cdots+p_{n-1}+1)$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}\frac{\Gamma(P_n)\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}.$$

依据归纳法,即证出 $I=\dfrac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)}$.

第 7 章　曲线积分与曲面积分

7.1　第一型曲线积分

定义 7.1.1　设 L 是平面可求长曲线，$f(x,y)$在 L 上定义，设 L 的两端点为 A，B，依此用分点$A=A_0$，A_1，…，$A_n=B$ 将 L 剖分成 n 小段，记为 ΔL_1，ΔL_2，…，ΔL_n，ΔL_i 的弧长记为 Δs_i（$i=1,2,\cdots,n$）.在 ΔL_i 上任取一点 $P_i(\xi,\eta)$，当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}\to 0$ 时，若和式$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi,\eta)\Delta s_i$ 的极限存在，且不依赖于 P_i 的取法和曲线 L 的分法，则称这一极限值为 $f(x,y)$在曲线 L上的第一型曲线积分，记作

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \text{或} \int_{AB} f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi,\eta)\Delta s_i .$$

若 L 为闭曲线时，有时也记作$\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$.$\int_L \mathrm{d}s$是曲线 L 的弧长.

由定义不难看出积分具有一般的线性性质以及关于积分曲线的可加性.此外，公式

$$\int_{BA} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{AB} f(x,y)\mathrm{d}s$$

表明积分与曲线定向无关(对 $y=f(x)$，$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$).

称 L 为一光滑曲线，若其参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$($a\leqslant t\leqslant b$)满足 $x(t)$，$y(t)\in C^{(1)}[a,b]$，且 $x'^2(t)+y'^2(t)>0$(端点理解为单侧导数).光滑曲线一定是可求长曲线.称 L 为逐段光滑曲线，若曲线 L 可分成有限段，每段为光滑曲线.

定理 7.1.1　设 L 是逐段光滑曲线，函数 $f(x,y)$在 L 上连续，L 的参数方程为 $x=x(t)$，$y=y(t)$($a\leqslant t\leqslant b$)，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x(t),y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

例 7.1.1　求下列指定曲线段 L 的弧长 s.

(1) L:曲线 $y=\ln(1-x^2)$　($0\leqslant x\leqslant 1/2$).

(2) L:曲面$(x-y)^2=a(x+y)$与 $x^2-y^2=9z^2/8$($a>0$)之交线段:点(0,0,0)到(x_0，y_0，z_0).

(3) L:曲面 $x^2+y^2=cz$ 与 $y/x=\tan(z/c)$($c>0$)之交线段:点(0,0,0)到(x_0，y_0，z_0).

解　(1) 由 $y'=-2x/(1-x^2)$可知 $\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$，故有

$$s=\int_0^{1/2}\frac{1+x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{1/2}\left(\frac{2}{1-x^2}-1\right)\mathrm{d}x=\ln 3-\frac{1}{2}.$$

(2) 作变换 $x+y=t(x-y)$,则该曲线表示为

$$x-y=at,\quad x+y=at^2,\quad 9z^2/8=a^2t^2;$$

$$x=a(t^2+t)/2,\quad y=a(t^2-t)/2,\quad |z|=2\sqrt{2}at^{3/2}/3.$$

而点(0,0,0)对应于 $t=0$,点(x_0,y_0,z_0)对应于 $t_0=(3/a)^{2/3}z_0^{2/3}/2$.从而可知

$$s=\int_L \mathrm{d}s=\int_0^{t_0}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}a\int_0^{t_0}\left(t+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\frac{3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{3z_0^4/a}+2\sqrt[3]{az_0^2/3}\right).$$

(3) 引入变量替换 $x=r\cos\theta$,$y=r\sin\theta$,则有

$$r^2=cz,\quad \tan\theta=\tan(z/c);\qquad z=c\theta,\quad r^2=c^2\theta.$$

而曲线可表示为($0\leqslant\theta\leqslant z_0/c$)

$$x=c\sqrt{\theta}\cos\theta,\quad y=c\sqrt{\theta}\sin\theta,\quad z=c\theta,$$

且 $\mathrm{d}s=c(\sqrt{\theta}+1/2\sqrt{\theta})\mathrm{d}\theta$.因此易知弧长为

$$s=\int_L \mathrm{d}s=c\int_0^{z_0/c}\left(\sqrt{\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\right)\mathrm{d}\theta=\sqrt{cz_0}(2z_0/3c+1).$$

例 7.1.2　解答下列问题:

(1) 求曲面 $y=x^2/2a$,$z=x^3/6a^2$ 之交线 L 从原点(0,0,0)到 L 上点(x,y,z)之弧段长 s.

(2) 试证明:在椭圆 L:$x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的离心率 e 之值较小时,L 的长度 s 有近似式 $s=\pi(a+b)+\pi ae^4/32$.

(3) 设球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 之交线 L 的长度为 s,试证明 s 等于其半轴长为 $\sqrt{2}a$、离心率为 $1/\sqrt{2}$ 的椭圆周长.

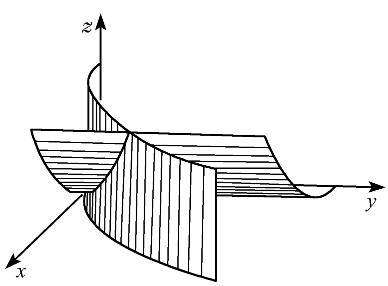


图 7.1

解　(1) 取曲线以 x 为参变量(图 7.1),易知有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{a}$,$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2}{2a^2}$,且可得

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}=1+\frac{x^2}{2a^2}.$$

从而我们有

$$s=\int_0^x\left(1+\frac{x^2}{2a^2}\right)\mathrm{d}x=x+\frac{x^3}{6a^2}=x+z.$$

(2) 将 L 用参数式表示为 $x=a\cos\theta$,$y=b\sin\theta$,则知

$$s=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4a\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{e^2\cos^2\theta}{2}-\frac{e^4\cos^4\theta}{2\cdot 4}-\cdots-\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\cos^{2n}\theta-\cdots\right)d\theta.$$

记上述级数之通项为 $u_n(\theta)$,易得

$$|u_n(\theta)|\leqslant\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}e^{2n},\quad \left|\frac{u_n(\theta)}{u_{n+1}(\theta)}\right|=\frac{2(n+1)}{2n-1}\frac{1}{e^2}\to\frac{1}{e^2}<1\quad(n\to\infty).$$

依据 M 判别法,该级数一致收敛,故可进行逐项积分运算:

$$s=4a\left(\frac{\pi}{2}-\frac{e^2}{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{e^4}{8}\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\frac{\pi}{2}-\cdots\right)=2\pi a\left(1-\frac{e^2}{4}-\frac{3e^4}{64}-\cdots\right).$$

又由 $b=a\sqrt{1-e^2}=a(1-e^2/2-e^4/8-\cdots)$,可知

$$\pi(a+b)=2\pi a(1-e^2/4-e^4/16-\cdots).$$

从而我们有

$$s-\pi(a+b)=2\pi a\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{64}\right)e^4+\cdots=\frac{\pi}{32}ae^4+o(e^4)\quad(e\to 0^+).$$

(3) 用圆柱坐标(r,θ,z)表示 L 上的点(x,y,z),如图 7.2,则由 $r=a\cos\theta$可知其为

$$x=r\cos\theta=a\cos^2\theta,\quad y=r\sin\theta=a\cos\theta\sin\theta,$$
$$z=a\sin\theta.$$

从而可得 $dx^2+dy^2+dz^2=a^2(1+\cos^2\theta)d\theta^2$,以及

$$\frac{s}{4}=\int_0^{\pi/2}a\sqrt{1+\cos^2\theta}\,d\theta=\sqrt{2}a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{2}}\,d\theta.$$

$$s=4\sqrt{2}a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{2}}\,d\theta.$$

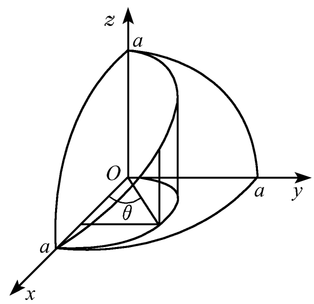


图 7.2

而上式右端就是半长轴为$\sqrt{2}a$、离心率为 $1/\sqrt{2}$的椭圆周长(参见上题).

例 7.1.3　计算下列一型线积分 I:

(1) 设 $L: x^2+y^2=ax(a>0)$, $I=\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds$.

(2) 设 $L: x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}(a>0)$, $I=\int_L(x^{4/3}+y^{4/3})ds$.

* (3) (单层对数位势)设 $L:\xi^2+\eta^2=a^2(a>0)$, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$,

$$I=I(x,y)=\int_L\ln\left(\frac{1}{r}\right)ds.$$

解　(1) 令 $x=a\cos^2\varphi, y=a\cos\varphi\sin\varphi(-\pi/2\leqslant\varphi\leqslant\pi/2)$,则 $\sqrt{x^2+y^2}=a\cos\varphi$,且 $ds=a\,d\varphi$.从而可知

$$I=\int_L ds=a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi=2a^2.$$

(2) 作替换：$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，则 $ds=3a|\sin t\cos t|dt$. 可知

$$I=\int_0^{2\pi}3a^{7/3}(\cos^4 t+\sin^4 t)|\sin t\cdot\cos t|\,dt$$
$$=12a^{7/3}\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t+\sin^4 t)\sin t\cos t\,dt=4a^{7/3}.$$

* (3) 作新坐标系 $\xi'O\eta'$，使得原点仍与坐标系 $\xi O\eta$ 的原点相同，而点 (x,y) 位于 $O\xi'$ 轴上，此时我们有 $\left(r'=\sqrt{(\xi'-\rho)^2+(\eta')^2}, \rho=\sqrt{x^2+y^2}\right)$

$$I(x,y)=\int_{L'}\ln\left(\frac{1}{r'}\right)ds\quad(L':(\xi')^2+(\eta')^2=a^2).$$

采用圆的参数方程式表示：

$$\xi'=a\cos\varphi,\quad \eta'=a\sin\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi);\qquad ds=a\,d\varphi.$$
$$I(x,y)=-\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\ln(a^2-2a\rho\cos\varphi+\rho^2)d\varphi$$
$$=-2\pi a\ln a-\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\ln\left(1-\frac{2\rho}{a}\cos\varphi+\frac{\rho^2}{a^2}\right)d\varphi.$$

令 $\rho/a=\alpha$，以及 $J(\alpha)=\int_0^{2\pi}\ln(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)d\varphi$，则（其中 $z=\alpha e^{i\varphi}, \bar{z}=\alpha e^{-i\varphi}$）

$$J'(\alpha)=2\int_0^{2\pi}\frac{(\alpha-\cos\varphi)d\varphi}{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{2z\bar{z}-(z+\bar{z})}{(1-z)(1+\bar{z})}d\varphi.$$

若 $\alpha<1$，则得

$$J'(\alpha)=-\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(\frac{z}{1-z}+\frac{\bar{z}}{1-\bar{z}}\right)d\varphi$$
$$=-\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}(z+z^2+\cdots+z^n+\cdots+\bar{z}+\bar{z}^2+\cdots+\bar{z}^n+\cdots)d\varphi$$
$$=-\frac{2}{\alpha}\int_0^{2\pi}(\alpha\cos\varphi+\alpha^2\cos(2\varphi)+\cdots+\alpha^n\cos(n\varphi)+\cdots)d\varphi=0$$

（积分号下之级数一致收敛，可作逐项积分）. 故 $J(\alpha)=C, C=J(0)=0$，且得

$$I(x,y)=-2\pi a\ln a=2\pi a\ln(1/a)\quad(\rho<a).$$

若 $\rho>a$，则 $\alpha>1$，我们有

$$J'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{1-1/z}+\frac{1}{1-1/\bar{z}}\right)d\varphi$$
$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(2+\frac{1}{z}+\cdots+\frac{1}{z^n}+\cdots+\frac{1}{\bar{z}}+\cdots+\frac{1}{\bar{z}^n}+\cdots\right)d\varphi$$
$$=\frac{2}{\alpha}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{\cos\varphi}{\alpha}+\frac{\cos(2\varphi)}{\alpha^2}+\cdots+\frac{\cos(n\varphi)}{\alpha^n}+\cdots\right)d\varphi=\frac{4\pi}{\alpha}.$$

由此知 $J(\alpha)=4\pi\ln\alpha+C, C=J(1)=0$. 从而 $J(\alpha)=4\pi\ln\alpha$，且知

$$I(x,y)=-2\pi a\ln a-2\pi a\ln\frac{\rho}{a}=2\pi a\ln(1/\rho).$$

例 7.1.4 求下列一型线积分：

(1) 设 L 是曲面 $x^2+y^2=z^2$ 与 $y^2=ax(a>0)$ 交线上从点 $(0,0,0)$ 到 $(a,a,a\sqrt{2})$ 之弧段，$I=\int_L z\,\mathrm{d}s$.

(2) 设 L 是曲面 $x^2/a^2+y^2/b^2+2z^2/(a^2+b^2)=1(x,y,z>0)$ 与 $x/a+y/b=1$ 之交线，$I=\int_L\left(\frac{xy}{ab}+\frac{\sqrt{2}yz}{b\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\sqrt{2}zx}{a\sqrt{a^2+b^2}}\right)\mathrm{d}s$.

(3) 设 L 是平面 $x+y+z=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之交圆.

(i) $I=\int_L x^2\,\mathrm{d}s$.

(ii) $I=\int_L(xy+xz+yz)\mathrm{d}s$.

解 (1) 视 x 为参变量，则 L 可写为方程

$$x=x,\quad y=\sqrt{ax},\quad z=\sqrt{x^2+ax}\ (0\leqslant x\leqslant a).$$

由此知 $\mathrm{d}z=(2x+a)/2\sqrt{x^2+ax}\,\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y=\sqrt{a/x}/2\,\mathrm{d}x$. 从而得

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int_0^a\sqrt{8x^2+9ax+2a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^a\sqrt{\left(2\sqrt{2}x+\frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)^2-\frac{17}{32}a^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\left(2\sqrt{2}x+\frac{9a}{4\sqrt{2}}\right)\sqrt{8x^2+9ax+2a^2}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{17}{32}a^2\ln\left(2\sqrt{2}x+\frac{9a}{4\sqrt{2}}+\sqrt{8x^2+9ax+2a^2}\right)\right]\Bigg|_0^a\\
&=\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right).
\end{aligned}$$

(2) 以 $x=a(1-y/b)$ 代入另一式，可得交线的表示式为

$$\left(y-\frac{b}{2}\right)^2\Big/\left(\frac{b}{2}\right)^2+z^2\Big/\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2=1.$$

令 $y=\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\cos\theta$，$z=\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta/2$，则 $x=a(1-\cos\theta)/2$. 从而有

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\sin\theta}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\cos\theta)\sin\theta+\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\cos\theta)\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta\\
&=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin\theta}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

(3) (i) 解法一 曲线 L 如图 7.3 所示，为求其参数方程，作正交变换

$$\xi=\frac{x-y}{\sqrt{2}},\quad \eta=\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}},\quad \zeta=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}},$$

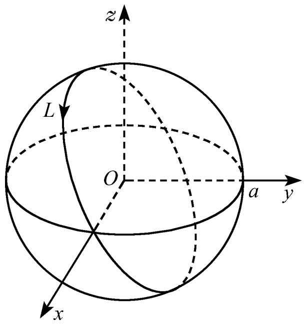


图 7.3

则它在坐标系 $O_{\xi\eta\zeta}$ 中的参数方程为

$$\xi = a\cos t,\quad \eta = a\sin t,\quad \zeta = 0\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

而在 O_{xyz} 坐标系中 L 的参数方程为

$$x = \frac{a\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{a\sin t}{\sqrt{6}},\quad y = -\frac{a\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{a\sin t}{\sqrt{6}},$$

$$z = -\frac{2a\sin t}{\sqrt{6}}(0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

从而我们有 $I = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t\right)^2 a\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\pi a^3$.

解法二　由对称性可知积分等式 $\int_L x^2\mathrm{d}s = \int_L y^2\mathrm{d}s = \int_L z^2\mathrm{d}s$.从而得到

$$I = \frac{1}{3}\int_L (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\int_L \mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

(ii) 由 $x + y + z = 0$ 可知 $\int_L (x + y + z)^2\mathrm{d}s = 0$.由依题设可得 $xy + yz + xz = -a^2/2$,从而我们有

$$I = -\int_L \frac{a^2}{2}\mathrm{d}s = -\frac{a^2}{2}2\pi a = -\pi a^3.$$

注　用第一型线积分可求非负函数 $f(x,y)$在曲线AB上曲边柱形之曲面积 S,其理由类似定积分理论.例如求 $x^2 + y^2 = ax$ 被球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所截下部分的曲面积 S.

解　由对称性,只需求柱面在第一象限部分的面积,然后乘 4 即成.记 $L: x^2 + y^2 = ax(y \geqslant 0)$,所以面积 S 为

$$S = 4\int_L \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}s = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - ax}\frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}}\mathrm{d}x = 2a\sqrt{a}\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 4a^2.$$

7.2　第二型曲线积分

定义 7.2.1　设AB是一平面连续曲线,函数 $P(x,y)$在AB上定义.由 A 至 B 依次用分点

$$A = A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \cdots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), A_n(x_n, y_n) = B$$

将AB剖分成 n 小段,记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{diam}(\overset{\frown}{A_{i-1}A_i})$,在每小段$\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$上任取一点 $M_i(\xi,\eta)$,当 $\lambda \to 0$ 时,若和式

$$\sum_{i=1}^n P(\xi,\eta)\Delta x_i\quad \left(\sum_{i=1}^n P(\xi,\eta)\Delta y_i\right)$$

极限存在,且不依赖于点 M_i 的取法和AB的分法,则称极限值为 $P(x,y)$在AB上关于 x(关于 y)的第二型曲线积分,记作

$$\int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi,\eta)\Delta x_i\quad \left(\int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi,\eta)\Delta y_i\right).$$

通常总是把函数 $P(x,y)$关于 x 的第二型曲线积分和函数 $Q(x,y)$关于 y 的第二型曲线积分合在一起讨论,记作

$$\int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{AB} Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

积分具有线性性质以及关于积分曲线的可加性.但第二型曲线积分与曲线定向有关,即

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{BA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

定理 7.2.1　设AB是连续曲线,且由 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$给出,$A(a,f(a))$,$B(b,f(b))$为起点和终点.若 $P(x,y)$在AB上连续,则 $P(x,y)$在AB上(关于 x 的)存在第二型曲线积分,且有

$$\int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b P(x,f(x))\mathrm{d}x \quad (定积分).$$

定理 7.2.2　若AB是逐段光滑曲线:$x=x(t)$,$y=y(t)(a\leqslant t\leqslant b)$.且 $A=(x(a),y(a))$,$B=(x(b),y(b))$.若 $P(x,y)$在AB上连续,则 $P(x,y)$在AB上的第二型曲线积分存在,且有

$$\int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b P[x(t),y(t)]x'(t)\mathrm{d}t,\quad \int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b P[x(t),y(t)]y'(t)\mathrm{d}t.$$

注 1　若又有 $Q(x,y)$在AB上连续,则结合 $P(x,y)$可写成

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)]\mathrm{d}t.$$

注 2　设 D 是由一条简单闭曲线 L 围成的区域,则其面积为 $S=\dfrac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$.

注 3　第一型与第二型线积分之间的联系.给定光滑曲线AB,其参数方程为 $x=x(t)$,$y=y(t)(a\leqslant t\leqslant b)$,$t=a$对应于 A 点,$t=b$对应于 B 点.

(i) 由曲线的方向决定曲线上每点(x,y)处单位切向量 τ的方向.τ的方向余弦记为 $\cos\langle\tau,\boldsymbol{x}\rangle$,$\cos\langle\tau,\boldsymbol{y}\rangle$,其中$\langle\tau,\boldsymbol{x}\rangle\langle\tau,\boldsymbol{y}\rangle$分别表示向量 τ与坐标向量 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 的内积,用参数表示有

$$\cos\langle\tau,\boldsymbol{x}\rangle = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\quad \cos\langle\tau,\boldsymbol{y}\rangle = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}.$$

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{AB} [P\cos\langle\tau,\boldsymbol{x}\rangle + Q\cos\langle\tau,\boldsymbol{y}\rangle]\mathrm{d}s.$$

这就把被积函数为 P,Q 的第二型曲线积分,化为被积函数为 $P\cos\langle\tau,\boldsymbol{x}\rangle + Q\cos\langle\tau,\boldsymbol{y}\rangle$的第一型曲线积分.

(ii) 曲线上点(x,y)处的单位法向量记作 $\boldsymbol{n}$,且使 $\boldsymbol{n}$,τ成右手系.由图 7.4 看出

$$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle = \cos\langle\tau,\boldsymbol{y}\rangle,\quad \cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{y}\rangle = -\cos\langle\tau,\boldsymbol{x}\rangle.$$

因此,第二型曲线积分也可化成如下的第一型曲线积分

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{AB} [Q\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}\rangle - P\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{y}\rangle]\mathrm{d}s.$$

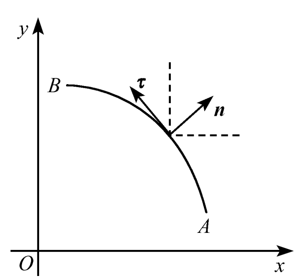


图 7.4

类似有

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{AB} [P\cos\langle \tau, \boldsymbol{x}\rangle + Q\cos\langle \tau, \boldsymbol{y}\rangle + R\cos\langle \tau, \boldsymbol{z}\rangle]\mathrm{d}s.$$

例 7.2.1　计算下列二型曲线积分 I：

(1) $I = \int_{OA} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + 4xy\mathrm{d}y$，如图 7.5(a).

(i) OA 为上半圆周：$x^2 + y^2 = ax (y \geqslant 0)$；

(ii) OA 为 x 轴上线段 $\overline{OA}$.

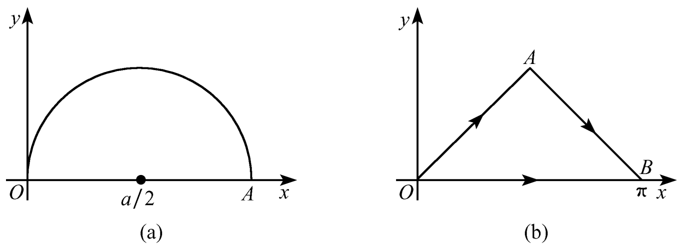


图 7.5

(2) $I = \int_L \mathrm{e}^x \cos y\mathrm{d}x - \mathrm{e}^x \sin y\mathrm{d}y$，其中 L 为(i)折线 OAB；(ii)直线段 $\overline{OB}$.如图 7.5(b).

(3) $I = \int_L \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}[\cos(2xy)\mathrm{d}x + \sin(2xy)\mathrm{d}y]$，其中 L 是 $x^2 + y^2 = 1$ 逆时针方向.

(4) $I = \int_L \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x^2 + y^2)^\alpha}$，其中 L：$x^2 + xy + y^2 = R^2$ 逆时针.

解　(1)(i) OA 的参数方程为 $x = x, y = \sqrt{ax - x^2} (0 \leqslant x \leqslant a)$，且起点 O 对应于 $x = 0$，终点 A 对应于 $x = a$.从而可知

$$I = \int_0^a [ax + 2x(a - 2x)]\mathrm{d}x = \int_0^a (3ax - 4x^2)\mathrm{d}x = \frac{a^3}{6}.$$

若取 OA 的参数方程为 $x = \dfrac{a}{2}(1 + \cos t), y = \dfrac{a}{2}\sin t (0 \leqslant t \leqslant \pi)$，起点对应 $t = \pi$，终点对应 $t = 0$.从而可知

$$\begin{aligned} I &= \int_{OA} ax\mathrm{d}x + 4xy\mathrm{d}y \\ &= \int_\pi^0 \left[\frac{a^2}{2}(1 + \cos t)\left(-\frac{a}{2}\sin t\right) + a^2(1 + \cos t)\sin t\left(\frac{a}{2}\cos t\right)\right]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$=\frac{a^3}{4}\int_{\pi}^{0}(\sin t-2\sin t\cos^2 t)\mathrm{d}t=\frac{a^3}{6}.$$

(ii) 直线段$\overline{OA}$的参数方程为 $x=x, y=0(0\leqslant x\leqslant a)$,所以

$$I=\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x=\frac{a^3}{3}.$$

注　此例说明,曲线积分的值不仅与被积数函数有关,还与路径有关.

(2) (i) 折线 OAB 的方程为 $y=\begin{cases} x & \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right), \\ \pi-x & \left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\right). \end{cases}$ 从而可知

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{e}^x[\cos(\pi-x)+\sin(\pi-x)]\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^x\cos x\Big|_0^{\pi/2}+\mathrm{e}^x\cos(\pi-x)\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\mathrm{e}^{\pi}-1.$$

(ii) $\overline{OB}$的参数方程为 $x=x, y=0(0\leqslant x\leqslant\pi)$,从而得 $I=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\pi}-1$.

注　上例说明,某些线积分的值只与被积函数和路径的起、终点有关,与路径无关.

(3) 注意到函数 $\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\cos(2xy)$在上半平面与下半平面的值相同,但 $\mathrm{d}x$ 却取相反符号,故知$\int_L\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\cos(2xy)\mathrm{d}x=0$.

类似地可知$\int_L\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\sin(2xy)\mathrm{d}y=0$.综合之,$I=0$.

(4) 先作旋转变换 $x=(u-v)/\sqrt{2}, y=(u+v)/\sqrt{2}$,将 L 表示为 L_1: $u^2\Big/\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)^2+v^2/(\sqrt{2}R)^2=1$,积分 I 为

$$I=\int_{L_1}\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{(u^2+v^2)^{\alpha}}.$$

再将 L_1 用极坐标参数表示:$u=\sqrt{2/3}R\cos t, v=\sqrt{2}R\sin t$.

例 7.2.2　解答下列问题:

(1) 设 $P(x,y), Q(x,y)$是光滑弧段AB上的连续函数,$\overline{AB}$的长度记为 l,则

$$\left|\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant lM\ \left(M=\max_{(x,y)\in AB}\{\sqrt{P^2+Q^2}\}\right).$$

(2) 设 $L: x^2+y^2=R^2$, $I_R=\int_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}$,则 $I_R\to0(R\to+\infty)$.

(3) 设 L 是曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上从$(0,0)$到$(1,1)$之线段,用第二型线积分证明

$$I=\int_L[y\sqrt{2x-x^2}+x(1-x)]\mathrm{d}s=1.$$

解　(1) 注意到(Cauchy)不等式

$$|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\leqslant(P^2+Q^2)^{1/2}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^{1/2}=\sqrt{P^2+Q^2},$$

$$I\leqslant\left|\int_{AB}(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_{AB}|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\,\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_{AB}\sqrt{P^2+Q^2}\,\mathrm{d}s\leqslant M\cdot\int_{AB}\mathrm{d}s=Ml.$$

(2) 由 $P(x,y)=y/(x^2+xy+y^2)^2$，$Q(x,y)=-x/(x^2+xy+y^2)^2$，可知 $\sqrt{P^2+Q^2}=\sqrt{x^2+y^2}/(x^2+xy+y^2)^2$. 采用极坐标($x=R\cos\varphi,y=R\sin\varphi$)，又得

$$\sqrt{P^2+Q^2}=\frac{R}{(R^2+xy)^2}=\frac{1}{R^3(1+\sin\varphi\cos\varphi)^2}=\frac{1}{R^3}\frac{4}{(2+\sin 2\varphi)^2}.$$

由此知 $M=\max\limits_{(x,y)\in L}\{\sqrt{P^2+Q^2}\}\leqslant 4/R^3$. 引用题(1)，我们有

$$|I_R|\leqslant 2\pi R\cdot\frac{4}{R^3}=\frac{8\pi}{R^2}\to 0\quad(R\to+\infty).$$

(3) 因为 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}x/\sqrt{2x-x^2}$，所以有

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\sqrt{2x-x^2},\quad\cos\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=1-x.$$

$$I=\int_L(y\cos\alpha+x\cos\beta)\mathrm{d}s=\int_L y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y.$$

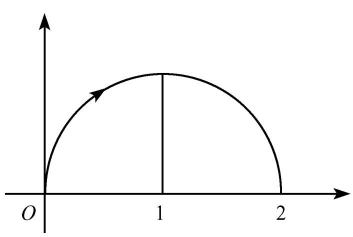


图 7.6

将曲线 $L:y^2+(x-1)^2=1$ 用参数式表示，即我们令 $x=1+\cos t$，$y=\sin t$，则 L 定向如图 7.6 所示. 从而可得

$$I=\int_0^{\pi/2}[-\sin^2 t+(1+\cos t)\cos t]\mathrm{d}t$$

$$=-\pi/4+1+\pi/4=1.$$

例 7.2.3　应用面积公式 $S=\dfrac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ 解答下列问题：

(1) 设 L 是一简单闭曲线，记其所围区域面积为 S，则

$$I=\oint_L[x\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+y\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})]\mathrm{d}s=2S,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 L 的外法线方向的单位向量.

(2) 求曲线 $L:y^2(a+x)=x^2(a-x)(a>0)$的一个圈所围区域的面积 S.

(3) 设 $a,b,c>0$，求由曲线 $L:(x/a)^{2n+1}+(y/b)^{2n+1}=c(x/a)^n(y/b)^n$ 围成的区域面积 S.

* (4) 设 $a,b,c>0$，求由曲线 $L:(x/a)^n+(y/b)^n=(x/a)^{n-1}+(y/b)^{n-1}$ 以及坐标轴所截出

的区域面积 S.

解 (1) 应用公式 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})=\cos(\tau,\boldsymbol{y}),\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})=-\cos(\tau,\boldsymbol{x})$,其中 τ 单位切向量.从而可得

$$I=\int_L[x\cos(\tau,\boldsymbol{y})-y\cos(\tau,\boldsymbol{x})]\mathrm{d}s=\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2S.$$

(2) (i) 在公式 $S=\dfrac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$ 中,令 $y=xt$,则 $\mathrm{d}y=t\mathrm{d}x+x\mathrm{d}t$,且可得公式(图 7.7)

$$S=\frac{1}{2}\oint_L(xt\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}t-xt\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}\int x^2\mathrm{d}t.$$

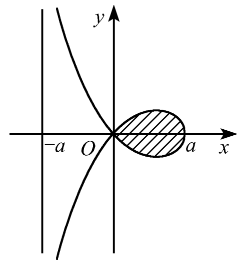


图 7.7

(ii) 对曲线 L,令 $y=xt$,则有表示式

$$x=a(1-t^2)/(1+t^2),\quad y=a(1-t^2)t/(1+t^2).$$

从而可知(由(i))

$$S=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{a^2(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t=a^2\int_0^1\left[1-\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\right]\mathrm{d}t.$$

作变换 $t=\tan\theta$,我们有

$$\int_0^1\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=\int_0^{\pi/4}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right).$$

$$S=\left\{1-2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}a^2=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)a^2.$$

(3) 令 $x=ar\cos^{\frac{2n}{2n+1}}\theta,y=br\sin^{\frac{2n}{2n+1}}\theta$,则曲线有表示式

$$r=c\cos^{\frac{2n}{2n+1}}\theta\cdot\sin^{\frac{2n}{2n+1}}\theta\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$$

(θ从 0 变到 $\pi/2$ 时,曲线从原点绕圈回到原点).曲线的参数方程(参数为 θ)为

$$\begin{cases}x=ac\cos^{\frac{2n+2}{2n+1}}\theta\cdot\sin^{\frac{2n}{2n+1}}\theta,\\ y=bc\cos^{\frac{2n}{2n+1}}\theta\cdot\sin^{\frac{2n+2}{2n+1}}\theta,\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

从而又得知 $y/x=(b/a)\tan^{\frac{2}{2n+1}}\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$.因此有

$$\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{2b}{a(n+1)}\sin^{\frac{2}{2n+1}-1}\theta\mathrm{d}\theta/\cos^{\frac{2}{2n+1}-1}\theta,$$

$$\frac{1}{2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{abc^2}{2n+1}\cos\theta\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$

$$S=\frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{abc^2}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\cdot\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{abc^2}{2(2n+1)}.$$

* (4) 首先,作出曲线 L 的参数方程.为此令

$$x=ar\cos^{2/n}\theta,\quad y=br\sin^{2/n}\theta\quad(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2).$$

且代入 L 的方程,可知在广义极坐标系下,L 的方程为 $r=\cos^{2-2/n}\theta+\sin^{2-2/n}\theta$.由此即得 L 的参数方程:

$$\begin{cases} x = a(\cos^2\theta\sin^{2/n}\theta + \sin^2\theta\cos^{2/n}\theta)\big/\sin^{2/n}\theta, \\ y = b(\cos^2\theta\sin^{2/n}\theta + \sin^2\theta\cdot\cos^{2/n}\theta)\big/\cos^{2/n}\theta. \end{cases}$$

其次,如上题所示,有$(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)/2 = x^2\mathrm{d}(y/x)/2$,故在这里也来算出 $\mathrm{d}(y/x)$,而注意到 $y/x = b\tan^{2/n}\theta/a(0<\theta<\pi/2)$,则

$$\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2b}{na}\left(\sin^{2/n-1}\theta/\cos^{2/n+1}\theta\right)\mathrm{d}\theta.$$

从而可知$(0<\theta<\pi/2)$

$$\frac{1}{2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) = \frac{ab}{n}(\sin^{2/n-1}\theta\cos^{3-2/n}\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^{3-2/n}\theta\cos^{2/n-1}\theta)\mathrm{d}\theta.$$

因为在坐标轴上有 $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$,以及

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2/n-1}\theta\cdot\cos^{3-2/n}\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\cos^{2/n-1}\theta\cdot\sin^{3-2/n}\theta\mathrm{d}\theta,$$

所以我们有

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_L x^2\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{2ab}{n}\left[\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi/2}\sin^{2/n-1}\theta\cdot\cos^{3-2/n}\theta\mathrm{d}\theta\right] \\ &= \frac{ab}{n}\left[\sin^2\theta\Big|_0^{\pi/2} + \mathrm{B}\left(\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \frac{ab}{n}\left[1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\pi\Big/\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]. \end{aligned}$$

例 7.2.4　计算下列三维空间的二型线积分 I:

(1) $I = \int_L (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1(x, y, z \geqslant 0)$与三个坐标平面之交线(图 7.8,右手坐标系).

(2) $I = \int_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$,其中 L 是曲面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ 与平面 $x/a + z/c = 1$ 之交线在第一象限中的线段(x 正向,逆时针).

(3) $I = \int_L y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$,其中 L 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x^2 + y^2 = ax(a>0)$之交线(从 $x>a$ 看去,走向逆时针).

(4) $I = \int_L (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$,其中 L 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $y = x\tan\alpha$之交线(按 x 轴向逆时针).

(5) $I = \int_L (y^2 + z^2)\mathrm{d}x + (z^2 + x^2)\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2bx(z\geqslant 0, a>b>0)$之交线(从原点出发依 $y>0$ 方向绕一周).

(6) $I = \int_L (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$,其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线(从 z 轴正向看 L 取逆时针方向).

解 (1) 如图 7.8 示将 L 依所在平面分为三个弧段：$\gamma_i(i=1,2,3)$，其中每个 γ_i 都是中心在原点半径为 1 的圆周的 1/4. 显然，在 γ_1 上的积分中 $z=0$ 且 $\mathrm{d}z=0$. 从而其被积函数为 $\omega=y^2\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y$，因此采用极坐标，$\gamma_1$ 可表示为

$$x=\cos\varphi,\quad y=\sin\varphi\quad(0<\varphi<\pi/2).$$

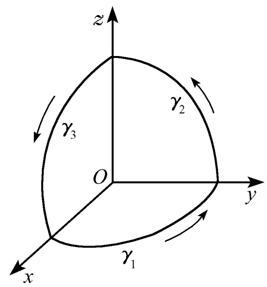


图 7.8

由此可知 I 在 γ_1 上的线积分为

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}\omega&=\int_{\gamma_1}y^2\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=-\int_0^{\pi/2}(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&=-2\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi=-\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

类似地有 $\int_{\gamma_3}\omega=\int_{\gamma_2}\omega=\int_{\gamma_1}\omega=-\frac{4}{3}$，最后得 $I=3\cdot\int_{\gamma_1}\omega=-4$.

(2) 易知交线为 $(x-a/2)^2/(a/2)^2+y^2/(b/\sqrt{2})^2=1$，且是从点 $(a,0,0)$ 到点 $(0,0,c)$ 弧段. L 的参数表示为

$$x=a/2+a\cos\theta/2,\quad y=b\sin\theta/\sqrt{2},$$

由此可得 $z=c/2-c\cos\theta/2$. 从而我们有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}\sin\theta\frac{a}{2}\sin\theta+\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\cos\theta\right)\frac{b}{\sqrt{2}}\cos\theta+\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta\right)\frac{c}{2}\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{ab}{2\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}+0-\frac{bc}{2\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}+\frac{ac}{4}\cdot2+0=\frac{ac}{2}-\frac{b\pi}{4\sqrt{2}}(a+c).\end{aligned}$$

(3) 采用极坐标 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta(-\pi/2<\theta<\pi/2)$，则原曲面为 $r=a\cos\theta$，$z=\sqrt{a^2-r^2}=a|\sin\theta|$. 从而曲线 L 有参数式

$$x=a\cos^2\theta,\quad y=a\sin\theta\cos\theta,\quad z=a|\sin\theta|\quad(\theta\neq0).$$

而且 $\mathrm{d}x=-2a\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}y=a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}z=\mathrm{sgn}\,\theta(a\cos\theta)\mathrm{d}\theta$.

$$y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z=a^3(-2\sin^3\theta\cos^3\theta+\sin^2\theta-2\sin^4\theta+\mathrm{sgn}\,\theta\cdot\cos^5\theta)\mathrm{d}\theta.$$

注意到 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-2\sin^3\theta\cos^3\theta+\mathrm{sgn}\,\theta\cdot\cos^5\theta)\mathrm{d}\theta=0$，我们有

$$\begin{aligned}I&=a^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin^2\theta-2\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta=a^3\left[\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)-2\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)\right]\\&=a^3(\pi/2-3\pi/4)=-\pi a^3/4.\end{aligned}$$

(4) 引入角 φ: $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$(图 7.9)，则交线之参数方程为

$$z=a\sin\varphi,\quad y=a\sin\alpha\cos\varphi,\quad x=a\cos\alpha\cos\varphi,$$

从而可知

$$I=a^2\int_0^{2\pi}(\cos\alpha-\sin\alpha)\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\pi a^2\sin(\pi/4-\alpha).$$

(5) 对 I 作分解：$I=I_1+I_2$，其中 I_1 位于 $y>0$，I_2 位于 $y<0$(图 7.10).

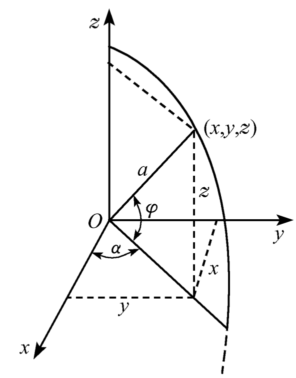


图 7.9

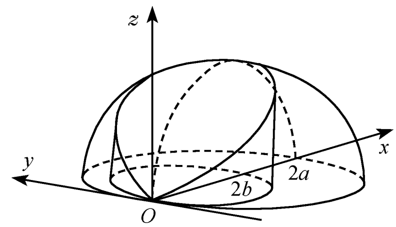


图 7.10

（i）对 $y>0$，有 $y=\sqrt{2bx-x^2}$，$z=\sqrt{2(a-b)x}$. 从而可知

$$I_1=\int_0^{2b}(2ax-x^2)\mathrm{d}x+\int_0^{2b}(2ax-2bx+x^2)\frac{b-x}{\sqrt{2bx-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$+\int_0^{2b}2bx\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x.$$

（ii）对 $y<0$，我们有

$$I_2=\int_{2b}^{0}(2ax-x^2)\mathrm{d}x+\int_{2b}^{0}(2ax-2bx+x^2)\frac{-(b-x)}{\sqrt{2bx-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$+\int_{2b}^{0}2\mathrm{b}x\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x.$$

从而可得

$$I=I_1+I_2=2\int_0^{2b}\frac{(x^2+2ax-2bx)(b-x)}{\sqrt{2bx-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{b^2\sin^2\theta+2ab+2ab\sin\theta-b^2}{b\cos\theta}(-b\sin\theta)b\cos\theta\mathrm{d}\theta\quad(x-b=b\sin\theta)$$
$$=-2b\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\{b^2\sin^2\theta+(2ab-b^2)\sin\theta+2ab\sin^2\theta\}\mathrm{d}\theta=-2\pi ab^2.$$

（6）解法一　取 L 的参数方程为 $x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{6}}\sin t$，以及

$$y=-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{a}{\sqrt{6}}\sin t,\quad z=-\frac{2a}{\sqrt{6}}\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

因此我们有

$$I=\int_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{3a}{\sqrt{6}}\sin t\right)\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t+\frac{a}{\sqrt{6}}\cos t\right)\right.$$

$$+\left(-\frac{3a}{\sqrt{6}}\sin t-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t+\frac{a}{\sqrt{6}}\cos t\right)$$

$$+\left(\frac{2a}{\sqrt{2}}\cos t\right)\left(-\frac{2a}{\sqrt{6}}\cos t\right)\Bigg]\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{2\pi}a^2(\sqrt{3}\sin^2 t+\sqrt{3}\cos^2 t)\mathrm{d}t=-2\sqrt{3}\pi a^2.$$

解法二　为求 L 单位的切向量 τ,先求出平面与球面的法向量,即 $\boldsymbol{N}_1=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{N}_2=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}$.从而 L 的切向量 $\boldsymbol{T}$ 为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2=(z-y)\boldsymbol{i}+(x-z)\boldsymbol{j}+(y-x)\boldsymbol{k},$$

由图 7.3 可看出 $\boldsymbol{T}$ 的方向与 L 的定向一致,由此得

$$\tau=\frac{(z-y)\boldsymbol{i}+(x-z)\boldsymbol{j}+(y-x)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(z-y)^2+(x-z)^2+(y-x)^2}}.$$

于是有

$$I=\int_L[(y-z)\cos\langle\tau,\boldsymbol{x}\rangle+(z-x)\cos\langle\tau,\boldsymbol{y}\rangle+(x-y)\cos\langle\tau,\boldsymbol{z}\rangle]\mathrm{d}s$$

$$=-\int_L\frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{\sqrt{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}}\mathrm{d}s$$

$$=-\int_L\sqrt{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}\mathrm{d}s$$

$$=-\int_L\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2}\mathrm{d}s=-\int_L\sqrt{3}a\mathrm{d}s=-2\sqrt{3}\pi a^2.$$

在介绍第三种解法前,注意到若定向曲线 L 位于曲面 $z=f(x,y)$上,记 L 在 xOy 平面上的定向投影曲线为 L_1,则空间曲线积分可化为平面曲线积分:

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_{L_1}P[x,y,f(x,y)]\mathrm{d}x+Q[x,y,f(x,y)]\mathrm{d}y$$

$$+\int_{L_1}R[x,y,f(x,y)]\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right).$$

事实上,设 L_1 的参数方程为 $x=x(t)$,$y=y(t)$,$(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,则 L 的参数方程为 $x=x(t)$,$y=y(t)$,$z=f[x(t),y(t)](\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$.用曲线积分计算公式即知等式成立.

解法三　因曲线 L 位于平面的 $z=-x-y$ 上,所以

$$I=\int_{L_1}(y+x+y)\mathrm{d}x+(-x-y-x)\mathrm{d}y+(x-y)(-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$$

$$=\int_{L_1}3y\mathrm{d}x-3x\mathrm{d}y=-6\cdot\frac{1}{2}\int_{L_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=-6\times L_1\text{ 所围区域的面积}$$

$$=-6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\pi a^2=-2\sqrt{3}\pi a^2.$$

例 7.2.5(物理应用)　解答下列问题：

(1) 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一象限与三个坐标平面的交线(质量均匀分布且线密度为 1)的重心.

(2) 求质量均匀分布(密度为 1)的星形线 $L: x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}\ (x, y\geqslant 0)$对坐标轴的力距 M_x, M_y.

(3) 有三个力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3$ 作用在点 $P(x, y, z)$上,且 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{F}_3|=1$ 方向分别为$\overline{M_1P}, \overline{M_2P}, \overline{M_3P}$,其中 $M_1(1,0,0), M_2(0,1,0), M_3(0,0,1)$.若点 P 由原点 $O(0,0,0)$沿直线运动到点 $M(1,1,1)$试求力所做的功.

(4) 一质点 P 沿着以$\overline{AB}$为直径的半圆周,从点 $A(1,2)$运动到点 $B(3,4)$的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 作用,$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP,且与 y 轴正向的夹角小于 $\pi/2$,求 $\boldsymbol{F}$ 对 P 所做的功.

(5) 设在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+zy\boldsymbol{k}$ 的作用下,一质点在原点沿直线运动到椭球面 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 在第一象限上的点 $M(\xi, \eta, \zeta)$,试问当 ξ, η, ζ 取何值时,$\boldsymbol{F}$ 所做的功 W 最大? 并求出 W 的值.

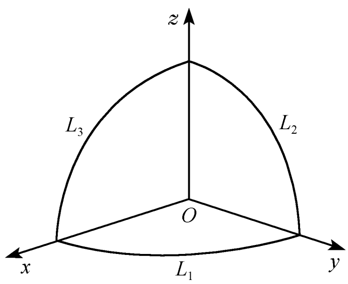


图 7.11

解　(1) 记曲线在坐标平面 xOy, yOz, zOx 内的弧段分别为 L_1, L_2, L_3(图 7.11),则根据重心的计算公式可知(记曲线重心坐标为 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$)

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int_{L_1+L_2+L_3} x\mathrm{d}s,\quad \bar{y}=\frac{1}{m}\int_{L_1+L_2+L_3} y\mathrm{d}s,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\int_{L_1+L_2+L_3} z\mathrm{d}s,$$

其中 $m=\int_{L_1}\rho\mathrm{d}s+\int_{L_2}\rho\mathrm{d}s+\int_{L_3}\rho\mathrm{d}s$(曲线弧 L_1, L_2, L_3 质量之和).

由 L_1 的方程 $y=\sqrt{R^2-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant R)$以及 $\rho=1$,可得

$$\int_{L_1}\rho\mathrm{d}s=\int_0^R\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=R\int_0^R\frac{\mathrm{d}(x/R)}{\sqrt{1-(x/R)^2}}=\frac{\pi R}{2}.$$

利用对称性又有$\int_{L_2}\rho\mathrm{d}s=\int_{L_3}\rho\mathrm{d}s=\pi R/2$.从而 $m=3\pi R/2$.

另一方面,因为我们有等式

$$\int_{L_1}x\mathrm{d}s=\int_0^R x\frac{R\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}}=-\frac{R}{2}\int_0^R\frac{\mathrm{d}(R^2-x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}}=R^2,$$

$$\int_{L_2}x\mathrm{d}s=\int_{L_2}0\mathrm{d}s=0,\quad \int_{L_3}x\mathrm{d}s=R^2,$$

所以导出 $\bar{x}=\frac{1}{m}\left(\int_{L_1}x\mathrm{d}s+\int_{L_2}x\mathrm{d}s+\int_{L_3}x\mathrm{d}s=\frac{4}{3\pi R}(R^2+0+0)\right)=\frac{4R}{3\pi}$.

又根据对称性,可知 $\bar{y}=\bar{z}=\bar{x}$.总之,重心为$\left(\dfrac{4R}{3\pi},\dfrac{4R}{3\pi},\dfrac{4R}{3\pi}\right)$.

(2) 用参数方程 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t(0\leqslant t\leqslant\pi/2)$表示该星形线,则可得

$$M_x=\int_L y\mathrm{d}s=3a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos t\mathrm{d}t=\frac{3}{5}a^2.$$

$$M_y=\int_L x\mathrm{d}s=3a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin t\mathrm{d}t=\frac{3}{5}a^2.$$

(3) 根据题意,有

$$\boldsymbol{F}_1=\frac{(x-1)\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}},\quad \boldsymbol{F}_2=\frac{x\boldsymbol{i}+(y-1)\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+(y-1)^2+z^2}},$$

$$\boldsymbol{F}_3=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+(z-1)\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}}.$$

因为 $\boldsymbol{F}_1$ 沿直线从(0,0,0)到点 $M(1,1,1)$做的功是(注意直线 OM 的参数方程是 $x=t,y=t,z=t(0\leqslant t\leqslant 1)$)

$$W_1=\int_{\overline{OM}}\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\overline{OM}}\frac{(x-1)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}$$

$$=\int_0^1\frac{(3t-1)\mathrm{d}t}{\sqrt{3t^2-2t+1}}=\sqrt{3t^2-2t+1}\Big|_0^1=\sqrt{2}-1.$$

同理可以计算 $\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 沿直线从(0,0,0)点到(1,1,1)做的功分别是

$$W_2=\int_{\overline{OM}}\boldsymbol{F}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\sqrt{2}-1,\quad W_3=\int_{\overline{OM}}\boldsymbol{F}_3\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\sqrt{2}-1.$$

据根叠加原理知,$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$ 沿直线从(0,0,0)到点(1,1,1)做的功

$$W=W_1+W_2+W_3=3(\sqrt{2}-1).$$

(4) 依题意可知变力为 $\boldsymbol{F}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}$,而该圆弧的参数方程为

$$x=2+\sqrt{2}\cos\theta,\quad y=3+\sqrt{2}\sin\theta\quad(-3\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/4).$$

从而可得其所做之功为(图 7.12)

$$W=\int_{AB}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{AB}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}[\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta+\sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=2(\pi-1).$$

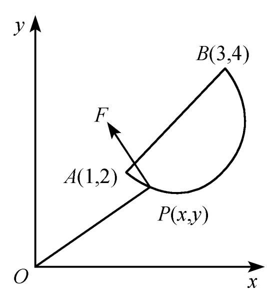


图 7.12

(5) 由题设可知,直线段$\overline{OM}$的参数方程为

$$x=\xi t,\quad y=\eta t,\quad z=\zeta t\quad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

因此力 $\boldsymbol{F}$ 沿$\overline{OM}$所做的功为

$$W=\int_{\overline{OM}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{\overline{OM}}yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=3\int_0^1\xi\eta\zeta t^2\mathrm{d}t=\xi\eta\zeta.$$

从而为求 W 之最大值,就是在约束条件

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0\quad(\xi,\eta,\zeta>0)$$

下求 $f(\xi,\eta,\zeta)=\xi\eta\zeta$ 的最大值.

作辅助函数 $F(\xi,\eta,\zeta)=\xi\eta\zeta+\lambda\varphi(\xi,\eta,\zeta)$,并求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\xi}=\eta\zeta+2\lambda\xi/a^2=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial\eta}=\xi\zeta+2\lambda\eta/b^2=0,\quad \dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}-1=0.\\ \dfrac{\partial F}{\partial\zeta}=\xi\eta+2\lambda\zeta/c^2=0,\end{cases}$$

可得 $\dfrac{\xi^2}{a^2}=\dfrac{\eta^2}{b^2}=\dfrac{\zeta^2}{c^2}=-\dfrac{\xi\eta\zeta}{2\lambda}$,$\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}=-\dfrac{3}{2}\dfrac{\xi\eta\zeta}{\lambda}=1$.最后知当 $\xi=a/\sqrt{3}$,$\eta=b/\sqrt{3}$,$\zeta=c/\sqrt{3}$时 W 最大.

7.3 曲 面 面 积

1. 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界闭区域,而曲面 Σ由方程

$$z=f(x,y)((x,y)\in D),\quad f\in C^{(1)}(D)$$

给出.则称 Σ为光滑曲面.若令 $p(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}$,$q(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}$,则 Σ上每点均有切平面存在,其法向量为 $\boldsymbol{n}=-p\boldsymbol{i}-q\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,且曲面面积 S 为

$$S=\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad S=\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{z}\rangle|}.$$

2. 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界闭区域,而曲面 Σ是由参数方程

$$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),\quad(u,v)\in D$$

表示的光滑曲面,且令

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

则 Σ的法向量为 $\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$,曲面积 S 为

$$S=\iint_\Sigma\mathrm{d}S=\iint_D\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad \mathrm{d}S=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

特别,对 $x=\sin\varphi\cos\theta,y=\sin\varphi\sin\theta,z=a\cos\varphi$,有 $\mathrm{d}S=a^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$.

3. 在上述 2 的条件下,若记(Gauss 系数)$E=(x_u')^2+(y_u')^2+(z_u')^2$,且

$$G=(x_v')^2+(y_v')^2+(z_v')^2,\quad F=x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v',$$

则又得曲面面积公式 $S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

注 若曲面以 $r=r(\varphi,\theta)$表示,且 $r\in C^{(1)}(D)$,则 $\sqrt{EG-F^2}=r\sqrt{(r^2+r_\varphi'^2)\sin^2\varphi+r_\theta'^2}$.

例 7.3.1 求下列曲面 Σ的面积 S:

(1) $x^2+y^2+z^2=R^2$.　　(2) $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

(3) $(x^2+y^2+z^2)^2=2a^2xy$.　　(4) $(x^2+y^2+z^2)^2=x^2-y^2$.

解 (1) 球面 Σ的参数方程为

$$x=R\cos\theta\sin\varphi,\quad y=R\sin\theta\sin\varphi,\quad z=R\cos\varphi,$$
$$D=\{(\theta,\varphi):0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}.$$

由此可知

$$\boldsymbol{r}_\theta=(-R\sin\theta\sin\varphi,R\cos\theta\sin\varphi,0),$$
$$\boldsymbol{r}_\varphi=(R\cos\theta\cos\varphi,R\sin\theta\cos\varphi,-R\sin\varphi).$$
$$E=R^2\sin^2\varphi,\ F=0,\ G=R^2.$$
$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\iint_D R^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=4\pi R^2.$$

(2) 椭球面 Σ的参数方程为

$$x=a\cos\theta\sin\varphi,\quad y=b\sin\theta\sin\varphi,\quad z=c\cos\varphi,$$
$$D=\{(\theta,\varphi):0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}.$$

由此可知

$$\boldsymbol{r}_\theta=(-a\sin\theta\sin\varphi,b\cos\theta\sin\varphi,0),\quad \boldsymbol{r}_\varphi=(a\cos\theta\cos\varphi,b\sin\theta\cos\varphi,-c\sin\varphi).$$
$$A=-bc\cos\theta\sin^2\varphi,\ B=-ac\sin\theta\sin^2\varphi,\ C=-ab\cos\varphi\sin\varphi.$$
$$S=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)c^2\sin^2\varphi+a^2b^2\cos^2\varphi}\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

当 a,b,c 两两不等时,这个积分积不出来(即无初等原函数表示).

当 $a=b$ 时可求出面积 S

$$S=\begin{cases}2\pi a\left(a+\dfrac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right), & a>c,\\[2ex] 2\pi a\left(a+\dfrac{c^2}{\sqrt{c^2-a^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}\right), & a<c.\end{cases}$$

(3) 采用球坐标,则曲面 Σ有表示 $r=a\sin\varphi\sqrt{\sin 2\theta}$.从而知

$$\sqrt{EG-F^2}=r\sqrt{(r^2+r_\varphi'^2)\sin^2\varphi+r_\theta'^2}=a^2\sin^2\varphi,$$
$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}a^2\sin^2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\pi^2a^2.$$

(4) 采用球坐标系统,则 Σ为 $r^2=\sin^2\theta\cos 2\varphi$.由对称性可知,只需计算 Σ位于第一象限部分之面积 S_1 ($S=8S_1$).应用公式 $\mathrm{d}S^2=E\mathrm{d}\theta^2+2F\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi+G\mathrm{d}\varphi^2$,而现在

有 $\mathrm{d}S^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$，其中由 $r=\sin\theta\sqrt{\cos 2\varphi}$ 可知

$$r\mathrm{d}r=\sin\theta\cos\theta\cos 2\varphi\mathrm{d}\theta-\sin^2\theta\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

$$\mathrm{d}r=\cos\theta\sqrt{\cos 2\varphi}\mathrm{d}\theta-\sin\theta\sin 2\varphi/\sqrt{\cos 2\varphi}\mathrm{d}\varphi,$$

$$\mathrm{d}r^2=\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}r=\cos^2\theta\cos 2\varphi\mathrm{d}\theta^2-2\sin\theta\cos\theta\sin 2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$+\sin^2\theta\sin^2(2\varphi)\mathrm{d}\varphi^2/\cos 2\varphi.$$

从而得到 $E=\cos 2\varphi$，$F=-\sin\theta\cos\theta\cos 2\varphi$，以及

$$G=\sin^2\theta[\sin^2(2\varphi)+\sin^2\theta\cos^2(2\varphi)]/\cos 2\varphi.$$

因此有 $EG-F^2=\sin^4\theta$．记 $D:0<\theta<\pi/2,0<\varphi<\pi/4$，则

$$S_1=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\iint_D\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi^2}{16},\quad S=\frac{\pi^2}{2}.$$

例 7.3.2 解答下列问题：

(1) 设有半径为 a 的两个直圆柱，其中心轴正交，试求其相交处的侧面面积 S．

(2) 设有半径为 a 的三个直圆柱，其中心轴正交，试求其相交处的侧面面积 S．

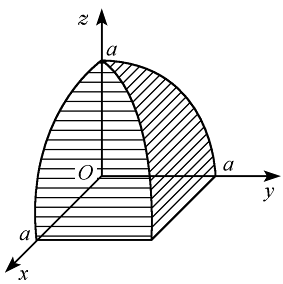


图 7.13

解 (1) 设这两个直圆柱的中心轴为 x，y 轴，建立三维坐标系，它们有表示式 $x^2+z^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$．易知只需计算其位于第一象限之部分曲面积 S_1（图 7.13）．

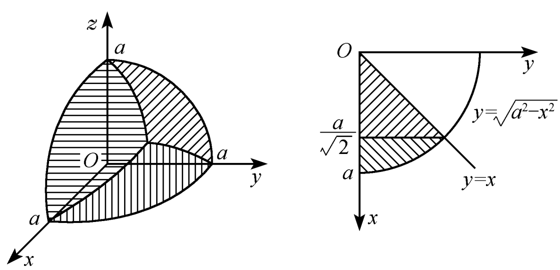
因为 $x=y$ 平面正好将其公共部分二等分，所以得出

$$z=\sqrt{a^2-x^2},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$S_1=2\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y=\int_0^a\frac{ax\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=a^2,\quad S=16a^2.$$

(2) 注意到上题的情形，这里就相当于增加了一个直圆柱 $x^2+y^2=a^2$．类似地，只要看第一象限中的部分曲面如图 7.14(a)，且记其 1/3 为 S_1，我们有



(a) (b)

图 7.14

$$S_1=\int_0^{a/\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^x\frac{a\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int_{a/\sqrt{2}}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(图 7.14(b))$$

$$=2(1-1/\sqrt{2})a^2,\quad S=48(1-1/\sqrt{2})a^2.$$

例 7.3.3 解答下列问题：

(1) 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 位于圆柱体 $x^2+y^2=ax$ 内的部分曲面面积 S.

(2) 求球面 $x^2+y^2+z^2=cz\,(c>0)$ 位于椭圆抛物面 $z=ax^2+by^2\,(a,b>0)$ 内的部分曲面面积 S.

(3) 求 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 位于锥面 $\sqrt{x^2+y^2}=z\tan\alpha\,(0<\alpha<\pi/2)$ 内的部分曲面面积 S.

(4) 求球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 位于椭球面 $4x^2+3y^2+z^2=2z$ 内的部分曲面面积 S.

解 (1) 只需考察位于第一象限内的部分曲面面积 S_1. 因为有 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $z_x'=-x/z$, $z_y'=-y/z$, $\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}=a/z$, 所以(用极坐标)

$$S_1=\iint_{D_1}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1'}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=a\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2-r^2}}=a\int_0^{\pi/2}(a-a\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2.$$

由此知 $S=4S_1=2(\pi-2)a^2$.

(2) 采用球坐标，则原球面为 $r=c\cos\theta$，且有

$$\frac{\partial r}{\partial\theta}=-c\sin\theta,\quad\frac{\partial r}{\partial\varphi}=0,\quad\sqrt{[r^2+(r_\theta')^2]\sin^2\theta+(r_\varphi')^2}=c\sin\theta.$$

此外，椭圆抛物面的表示式为(图 7.15)

$$r(a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi)\sin^2\theta=\cos\theta,$$

由此知两曲面之交线为

$$c\sin^2\theta_1=1/(a\cos^2\varphi_1+b\sin^2\varphi_1).$$

从而可得

$$\frac{S}{4}=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\theta_1}c\sin\theta\cdot c\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{c^2}{2}\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta)\Big|_0^{\theta_1}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{c}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi}=\frac{c}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{a+bt^2}=\frac{\pi c}{4\sqrt{ab}}.$$

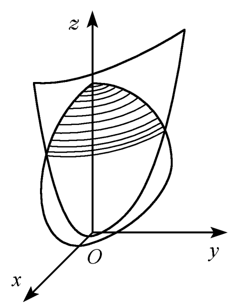


图 7.15

最后 $S=\pi c/\sqrt{ab}$.

(3) 采用球坐标，可知 $\mathrm{d}S=a^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，故有

$$S=\iint_D\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2(1-\cos\alpha).$$

(4) 采用球坐标 $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$，则椭球面与球面的表

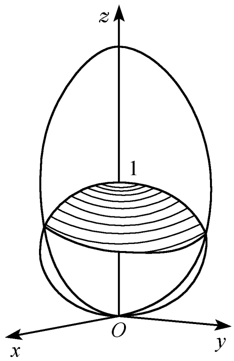


图 7.16

示式为

$$r\{\sin^2\theta(2+\cos^2\varphi)+1\}=2\cos\theta,\quad r=\cos\theta.$$

易知其相交曲线为 $\sin^2\theta_1(2+\cos^2\varphi_1)=1$,如图 7.16 .故得

$$S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_1\int_0^{\theta_1}\sqrt{[r^2+(r'_\theta)^2]\sin^2\theta+(r'_\varphi)^2}\,r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_1\int_0^{\theta_1}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta_1/2\mathrm{d}\varphi_1$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi_1}{2+\cos^2\varphi_1}=2\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1}{3+2\tan^2\varphi_1}$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{3+2t^2}=2\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}\right]\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

例 7.3.4　解答下列问题：

(1) 求曲面 $z=(x^2-y^2)/2$ 被平面 $x-y=\pm1$ 与 $x+y=\pm1$ 切下部分之曲面面积 S.

(2) 求曲面 $z^2=2xy$ 被平面 $x+y=1,x=0,y=0$ 截下部分之曲面面积 S.

解　(1) 依对称性可知,该曲面的 1/4 部分在 xOy 平面上的投影为区域 D：$0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1-x$.因为我们有 $\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}$,所以得知

$$S=4\iint_D\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作坐标变换 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,即知

$$S=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{1/\sqrt{2}\sin(\pi/4+\theta)}r\sqrt{1+r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\left[\left(1+\frac{1}{2\sin^2(\theta+\pi/4)}\right)^{3/2}-1\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\left[1+\csc^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)/2\right]^{3/2}\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\left[3+\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]^{3/2}\mathrm{d}\theta.$$

再用变量替换 $t=\cot(\pi/4+\theta)$,易知

$$S=-\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3\sqrt{2}}I\quad\left(I=\int_{-1}^{1}\frac{(3+t^2)^{3/2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$I=\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{2}{1+t^2}\right)\sqrt{3+t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\sqrt{3+t^2}\,\mathrm{d}t+2\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{3+t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\left[\frac{t}{2}\sqrt{3+t^2}+\frac{3}{2}\ln(t+\sqrt{3+t^2})\right]_{-1}^{1}$$

$$+2\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3+t^2}}+4\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}}$$

$$=2+\frac{7}{2}\ln 3+4J\quad\left(J=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\sqrt{3+t^2}}\right).$$

对 J,作变量替换 $t=\sqrt{3}\tan u$,又得

$$J=\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{\cos u\cdot\mathrm{d}u}{\cos^2 u+3\sin^2 u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\sin u)}{1+(\sqrt{2}\sin u)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sin u)\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6}=\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

最后,我们有

$$S=-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{7}{4}\ln 3\right)+\frac{8}{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(2) 由 $z^2=2xy$ 可知,$z\mathrm{d}z=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$.从而可得

$$z'_x=y/z,\quad z'_y=x/z,\quad 1+(z'_x)^2+(z'_y)^2=(x+y)^2/z^2=(x+y)^2/2xy.$$

注意到该曲面上的点关于平面 xOy 对称,且其上半部分在平面 xOy 上的投影为区域 D:$0\leqslant x\leqslant 1$,$0\leqslant y\leqslant 1-x$.从而有

$$S=2\iint_D\frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x^{1/2}y^{-1/2}+x^{-1/2}y^{1/2})\mathrm{d}y$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^1\left[x^{1/2}(1-x)^{1/2}+\frac{1}{3}x^{-1/2}(1-x)^{3/2}\right]\mathrm{d}x=\frac{\Gamma^2(1/2)}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

例 7.3.5 解答下列问题:

(1) 求圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内之部分曲面面积 S.

(2) 求双曲抛物面 $az=xy$ 被柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 截下部分之曲面面积 S.

(3) 求锥面 $x^2+y^2=z^2/3$ 被平面 $x+y+z=2a$ $(a>0)$所界部分之曲面面积 S.

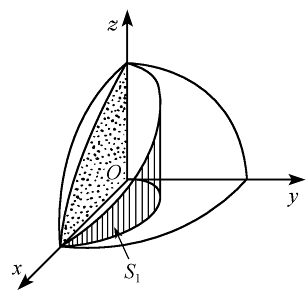


图 7.17

解 (1) 记其位于第一象限部分之曲面面积为 S_1,如图 7.17,则 $S_1=S/4$.取 x,z 为独立参数,则它在第一象限的积分区域为 D:$z^2\leqslant a^2-ax$,且柱面方程为 $y=\sqrt{ax-x^2}$.从而有

$$S_1=\iint_D\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-ax}}\sqrt{1+\left(\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-ax}}\frac{a\mathrm{d}z}{2\sqrt{ax-x^2}}=\frac{a}{2}\int_0^a\sqrt{\frac{a^2-ax}{ax-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{a\sqrt{a}}{2}\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=a^2.$$

由此知 $S=4a^2$.

(2) 易知 $z'_x = y/a, z'_y = x/a$,且记柱面底为 D,则

$$S = \iint_D \sqrt{1 + y^2/a^2 + x^2/a^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \left(\text{令}\begin{matrix} x = ar\cos\theta \\ y = ar\sin\theta \end{matrix}\right)$$

$$= \iint_{r^2 = a^2\sin 2\theta} \sqrt{1 + r^2}\, a^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = a^2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} \sqrt{1 + r^2}\, r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2a^2}{3}\int_0^{\pi/2}[(1 + \sin 2\theta)^{3/2} - 1]\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}a^2\left(\frac{10}{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$

(3) 易知锥面与平面之交线在 xOy 平面上的投影为

$$x^2 + y^2 - xy + 2ax + 2ay - 2a^2 = 0.$$

作转轴 $\theta = \pi/4$(因 $\cot 2\theta = (A - C)/B = (1-1)/(-1) = 0$).即令 $x = (x' - y')/\sqrt{2}$,$y = (x' + y')/\sqrt{2}$,则交线变为$(x' + 2\sqrt{2}a)^2/12a^2 + (y')^2/4a^2 = 1$.由此知积分区域 D 为$(x' + 2\sqrt{2}a)^2/12a^2 + (y')^2/4a^2 \leqslant 1$.

例 7.3.6　解答下列问题:

(1) 求由半球面 $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$ 与旋转抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 所围立体的表面积 S.

(2) 求椭圆抛物面 $z = x^2/2a + y^2/2b$ 被柱面 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = c^2$ 所割下的部分的曲面 Σ 之面积 S.

(3) 设有半径为 R 的球面 Σ,其球心在另一定球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,(a > 0)$上.试问 $R = ?$ 会使 Σ 位于此定球面内部分的曲面面积 S_1 最大.

解　(1) 易知两该曲面之交线为 $z = 1, x^2 + y^2 = 2$.它在 xOy 平面上的投影为 $x^2 + y^2 = 2$,故其所围平面区域为 $D: x^2 + y^2 \leqslant 2$.不难得知表面积 S 应分为上、下两部分求出 $S = S_1 + S_2$.应用面积公式$\iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,我们有

$$S_1 = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{3 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{3 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{3 - x^2 - y^2}}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{3 - r^2}} = (3 - \sqrt{3})2\pi.$$

$$S_2 = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + r^2}\, r\mathrm{d}r = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right)2\pi.$$

(2) 易知 $z'_x = x/a, z'_y = y/b, \mathrm{d}s = \sqrt{1 + (x/a)^2 + (y/b)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,且曲面 Σ 在 xOy 平面之投影区域就是 $D: x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqslant c^2$.从而对 $S = \iint_D \mathrm{d}S$ 采用极坐标,可得

$$S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{c} \sqrt{1 + r^2}\, abr\mathrm{d}r = \frac{2ab\pi}{3}[(1 + c^2)^{3/2} + 1].$$

(3) 不妨设 Σ 的球心位于(0,0,0)处,则此两球面之交线为

$$\begin{cases} z = a - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} z = a - R^2/2a, \\ x^2 + y^2 = R^2(1 - R^2/4a^2). \end{cases}$$

易知 $R \leqslant 2a$,且此交线在平面 xOy 上投影所围区域 $D: x^2 + y^2 \leqslant R^2(1 - R^2/4a^2)$.从而我们有

$$S_1 = \iint_\Sigma \mathrm{d}, \quad S = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{R\sqrt{1-R^2/4a^2}} \frac{R r \mathrm{d}r}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{\pi R^2}{a}(2a - R).$$

因为 $S'(R) = \pi R(4a - 3R)/a = 0$,可解出 $R_1 = 4a/3$,且 $S''(R_1) < 0$,所以当 $R = 4a/3$ 时,面积 S_1 的最大值为 $32a^2\pi/27$.

例 7.3.7 解答下列问题:

(1) 求锥面 $y^2 + z^2 = x^2$ 位于柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 内的部分曲面面积 S.

(2) 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 位于经度 $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ 和纬度 $\psi_1 < \psi < \psi_2$ 部分之曲面面积 S.

(3) 求螺旋曲面 $x = u\cos v, y = u\sin v, z = cv$ 被柱面 $x^2 + y^2 = a^2$,平面 $z = 0$, $z = 2\pi c$ 所割部分($0 \leqslant v \leqslant 2\pi$)之曲面面积 S.

(4) 求二维环面

$$\begin{cases} x = (b + a\cos\theta)\cos\varphi, \\ y = (b + a\cos\theta)\sin\varphi, \quad (b > a, 0 \leqslant \varphi < 2\pi, 0 \leqslant \theta < 2\pi) \\ z = a\sin\theta \end{cases}$$

之曲面面积 S.

解 (1) 注意到所求部分曲面关于上、下,左、右共 8 块均对称,且有 $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{2}x/\sqrt{x^2 - y^2}$,故可得

$$S = 8\sqrt{2}\int_0^{R/\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 2\pi R^2.$$

(2) 采用参数表示($\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2, \psi_1 \leqslant \psi \leqslant \psi_2$):

$$x = a\cos\varphi\cos\psi, \quad y = a\cos\psi\sin\varphi, \quad z = a\sin\psi,$$

则得 $E = (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 + (z'_\varphi)^2 = a^2\cos^2\psi, G = (x'_\psi)^2 + (y'_\psi)^2 + (z'_\psi)^2 = a^2, F = 0$.

由此知 $\sqrt{EG - F^2} = a^2\cos^2\psi$,从而有

$$S = a^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathrm{d}\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos\psi \mathrm{d}\psi = a^2(\varphi_2 - \varphi_1)(\sin\psi_2 - \sin\psi_1).$$

(3) 易知 $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{u^2 + c^2}$,故可得

$$S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}v\int_0^a\sqrt{u^2+c^2}\,\mathrm{d}u=2\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2+c^2}+\frac{c^2}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right).$$

(4) 由 $x'_\varphi=-(b+a\cos\theta)\sin\varphi, y'_\varphi=(b+a\cos\theta)\cos\varphi, z'_\varphi=0$；$x'_\theta=-a\sin\theta\cos\varphi$, $y'_\theta=-a\sin\theta\sin\varphi, z'_\theta=a\cos\theta$,可知

$$E=(b+a\cos\theta)^2,G=a^2,F=0;\quad \sqrt{EG-F^2}=a(b+a\cos\theta).$$

从而我们有

$$S=\iint_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}a(b+a\cos\theta)\mathrm{d}\theta=4\pi^2ab.$$

例 7.3.8　解答下列问题：

(1) 设有光滑曲面 $\Sigma: x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v), (u,v)\in D$.若存在变换 $u=u(u^*,v^*), v=v(u^*,v^*)$,将 D 变成 D^*, Σ 变成光滑曲面 $x=x^*(u^*,v^*), y=y^*(u^*,v^*), z=z^*(u^*,v^*)$, 试证明 Σ 的面积为 $\left(A^*=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u^*,v^*)}, B^*=\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u^*,v^*)}, C^*=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u^*,v^*)}\right)$, $S=\displaystyle\iint_{D^*}\sqrt{A^{*2}+B^{*2}+C^{*2}}\,\mathrm{d}u^*\mathrm{d}v^*$.

(2) 设曲面 Σ 是由隐函数方程 $F(x,y,z)=0$ 表示,其中 $F(x,y,z)$ 连续可微,且 $F'_z\neq 0$,以及 Σ 可一对一地投影到 xOy 平面区域 D,试证明

$$S=\iint_D\frac{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}{|F'_z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解　(1) 易知对变换 $(u^*,v^*)\to(u,v)$,其 Jacobi 行列式 $J=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u^*,v^*)}$.注意到 $S=\displaystyle\iint_D\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 中,

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

故可知 $AJ=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u^*,v^*)}=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u^*,v^*)}=A^*$, $BJ=B^*$, $CJ=C^*$.从而有

$$\begin{aligned}S&=\iint_D\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{D^*}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,|J|\,\mathrm{d}u^*\mathrm{d}v^*\\&=\iint_{D^*}\sqrt{(AJ)^2+(BJ)^2+(CJ)^2}\,\mathrm{d}u^*\mathrm{d}v^*=\iint_{D^*}\sqrt{A^{*2}+B^{*2}+C^{*2}}\,\mathrm{d}u^*\mathrm{d}v^*.\end{aligned}$$

(2) Σ 表示：$z=z(x,y)((x,y)\in D)$, $z'_x=F'_x/F'_z$, $z'_y=F'_y/F'_z$.从而可得

$$\begin{aligned}S&=\iint_D\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{1+(F'_x/F'_z)^2+(F'_y/F'_z)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_D\frac{\sqrt{F'^2_z+F'^2_x+F'^2_y}}{|F'_z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

7.4 第一型曲面积分

定义 7.4.1 设 Σ是可求面积的连续曲面,$f(x,y,z)$在 Σ上定义.$\Delta=\{\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n\}$是 S 的一个分法(记号 ΔS_i 也表示集合的面积),在每一个 ΔS_i 上任取一点 $M_i(\xi,\eta,\zeta_i)(i=1,2,\cdots,n)$,令 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\mathrm{diam}(\Delta S_i)\}$,若下述极限存在:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi,\eta,\zeta)\Delta S_i = I,$$

且不依赖于点 M_i 的取法和 Σ的分法,则称 I是 $f(x,y,z)$在 Σ上的第一型曲面积分,记作

$$I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

此时,也称 $f(x,y,z)$在 Σ上可积.

特别地,若 $f(x,y,z)\equiv 1$,$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$就是曲面 Σ的面积.若 $f(x,y,z)$为 Σ的面密度,则$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$就是 S 的质量.

此外,易知积分具有线性性质以及对积分区域(曲面)的可加性.

定理 7.4.1 设 Σ是光滑曲面,其参数方程为

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v),\quad (u,v)\in D.$$

又设 $f(x,y,z)$在 Σ上连续,则积分$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$存在,且($A,B,C$见 7.3.1 节第 2 条)

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D} f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

定理 7.4.2 若光滑曲面 Σ由表示式 $z=z(x,y)((x,y)\in D)$给出,则$\left(p=\frac{\partial z}{\partial x},q=\frac{\partial z}{\partial y}\right)$有公式

$$S=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 7.4.1 计算下列曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$,

(1) $f(x,y,z)=z$,Σ:曲面 $x^2+z^2=2az$ 被 $z=\sqrt{x^2+y^2}$所截出的部分曲面.

(2) $f(x,y,z)=|z|$,Σ:柱体 $x^2+y^2\leqslant ax(a>0)$与球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 相截部分立体之表面.

(3) $f(x,y,z)=x+y+z$,Σ:$x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$.

解 (1) 由对称性可知,只需计算在第一象限的部分 Σ 上的积分 I_1($I=4I_1$),且 Σ 在平面 xOy 上的投影区域为 D_1:$x^2+y^2=2a\sqrt{x^2+y^2}$,而 Σ 为 $z=a+\sqrt{a^2-x^2}$.因为 $z_x'=-x/\sqrt{a^2-x^2}$,$z_y'=0$,$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=a/\sqrt{a^2-x^2}$,所以

$$I=4I_1=4\iint_{D_1}(a+\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=7\pi a^2/\sqrt{2}.$$

(2) 易知该立体分上、下以及正 x 轴左、右共四部分,由于 $f(x,y,z)=|z|$,故又只需计算其 1/4 的第一象限部分曲面 Σ,且 Σ 又分为柱面部分 $\Sigma_{1,1}:y=\sqrt{ax-x^2}$;球面部分 $\Sigma_{1,2}:z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,其中 $\Sigma_{1,1}$ 在平面 xOz 上的投影为 D_1:$0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-ax}$,$\mathrm{d}S=(a/2\sqrt{ax-x^2})\mathrm{d}z\mathrm{d}x$;$\Sigma_{1,2}$ 在平面 xOy 上的投影 D_2:$0\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant a)$,$\mathrm{d}S=(a/\sqrt{a^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.从而我们有

$$I=4\left(\iint_{\Sigma_{1,1}}+\iint_{\Sigma_{1,2}}\right)z\mathrm{d}S=4\left(\iint_{D_1}\frac{az\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{2\sqrt{ax-x^2}}+\iint_{D_2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\frac{a\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)$$

$$=4\left(\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-ax}}\frac{az\mathrm{d}z}{2\sqrt{ax-x^2}}+a\iint_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=4\left(\frac{\pi}{8}a^3+\frac{\pi}{8}a^3\right)=\pi a^3.$$

(3) 易知 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=(a/\sqrt{a^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,且 Σ 在平面 xOy 上的投影为 $D:x^2+y^2\leqslant a^2$.从而可得

$$I=\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=a\iint_{D}\left(\frac{x+y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

采用极坐标:$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,我们有(注意,$\int_0^{2\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta=0$)

$$I=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\left[\frac{r(\sin\theta+\cos\theta)}{\sqrt{a^2-r^2}}+1\right]r\mathrm{d}r=\pi a^3.$$

例 7.4.2　计算下列曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

(1) $f(x,y,z)=z^2$,$\Sigma:x^2+y^2+z^2=a^2$.

(2) $f(x,y,z)=1/z$,Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 所截之(顶)部分.

(3) $f(x,y,z)=xy+yz+zx$,Σ 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱体 $x^2+y^2=2ax$ 所截之部分.

(4) $f(x,y,z)=(1-x^2-y^2-z^2)$,Σ 是 $x^2+y^2+z^2=1$ 被平面 $x+y+z=t\,(|t|<\sqrt{3})$ 所截之部分.

解　(1) 解法一　由对称性可知 $\iint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S$,故有

$$I=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{a^2}{3}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\pi a^4.$$

解法二　易知 Σ 的参数式可写为

$$x=a\cos\theta\sin\varphi,\quad y=a\sin\theta\sin\varphi,\quad z=a\cos\varphi,$$
$$D=\{(\theta,\varphi):0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}.$$

由此可知 $E=a^2\sin^2\varphi,F=0,G=a^2$,以及

$\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=a^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, $I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}a^2\cos^2\varphi\cdot a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\dfrac{4}{3}\pi a^4$.

(2) 易知 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,投影区域 $D: x^2+y^2\leqslant a^2-h^2$,且有

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$I=\iint_S\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_D\frac{a}{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

(3) 易知 Σ 在平面 xOy 上之投影为 $D:(x-a)^2+y^2\leqslant a^2$,且有 $\mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.从而可得

$$I=\sqrt{2}\iint_D\left[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

采用极坐标,则 D 变 $D:-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2,0\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta$.我们有

$$I=\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

(4) 作正交变换 $(u,v,w)\to(x,y,z)$,其中 $u=(x+y+z)/3$,则 Σ 变成为 Σ: $u^2+v^2+w^2\leqslant 1, u=t/\sqrt{3}$.从而可得

$$\begin{aligned}I&=\iint_\Sigma[1-(u^2+v^2+w^2)]\mathrm{d}S=\iint_{v^2+w^2\leqslant 1-t^2/3}\left(1-\frac{t^2}{3}-v^2-w^2\right)\mathrm{d}S\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1-t^2/3}}r\left(1-\frac{t^2}{3}-r^2\right)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2.\end{aligned}$$

例 7.4.3 计算下列曲面积分 $I=\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

(1) $f(x,y,z)=xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$, $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (x,y,z\geqslant 0)$.

(2) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2/a^4+y^2/b^4+z^2/c^4}\,\mathrm{d}S$, $\Sigma: x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

(3) $f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2},\end{cases}$ $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$.

解 (1) 易知 Σ 在平面 xOy 上之投影为 $D: x^2+y^2\leqslant a^2\ (x,y\geqslant 0)$.若记 z 轴与 Σ 上点 (x,y,z) 处之法向量夹角(锐角)余弦为 γ,则 $\cos\gamma=z/a$.由 $\mathrm{d}S\cdot\cos\gamma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,可知 $z\mathrm{d}S=a\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.且由轮换对称可知

$$\iint_\Sigma xy^3z^3\mathrm{d}S=\iint_\Sigma x^3yz^3\mathrm{d}S=\iint_\Sigma x^3y^3z\mathrm{d}S,$$

从而我们有

$$I=3\iint_\Sigma x^3y^3z\mathrm{d}S=3a\iint_D x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3a\iint_D r^3\cos^3\theta\cdot r^3\sin^3\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3a}{8}\int_0^{\pi/2}\sin^3(2\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^a r^7\mathrm{d}r=\frac{a^9}{32}.$$

(2) 引入：$x=a\sin\varphi\cos\theta, y=a\sin\varphi\sin\theta, z=c\cos\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，则知

$$\mathrm{d}S=abc\sqrt{\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$

$$f(x,y,z)=\sqrt{\sin^2\varphi\cos^2\theta/a^2+\sin^2\varphi\sin^2\theta/b^2+\cos^2\varphi/c^2}.$$

注意到对称性，且记 Σ 在第一象限部分为 Σ_1，我们有

$$I=8\iint_{\Sigma_1}f(x,y,z)\mathrm{d}S=8abc\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin^2\varphi\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\sin^2\theta}{b^2}+\frac{\cos^2\varphi}{c^2}\right)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

(3) 记 Σ_1：$x^2+y^2+z^2=a^2, z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$，则可得

$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S=a\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2/2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

采用极坐标：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2, 0\leqslant r\leqslant a/\sqrt{2})$，又有

$$I=4a\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a/\sqrt{2}}\frac{r^3\mathrm{d}r}{\sqrt{a^2-r^2}}=a\pi\int_0^{a/\sqrt{2}}\frac{r^2\mathrm{d}r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}=\frac{\pi}{6}(8-5\sqrt{2})a^4.$$

例 7.4.4　试证明下列问题：

(1) 记椭球面 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 的表面积为 S，则

$$S=I\quad\left(I=\iint_{\Sigma}\sqrt{b^2c^2\xi^2+a^2c^2\eta^2+a^2b^2\zeta^2}\mathrm{d}S,\quad\Sigma:\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1\right).$$

(2)（第一型曲面积分在正交变换下其形式不变）设有定义在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的光滑曲面 Σ：

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),$$

$f\in C(\Sigma)$，作正交变换 A，使得

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\\\tilde{z}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A\boldsymbol{X}.$$

且将 Σ 变为 $\tilde{\Sigma}$：$\tilde{x}=\tilde{x}(u,r), \tilde{y}=\tilde{y}(u,v), \tilde{z}=\tilde{z}(u,v)$，则

$$\iint_{\Sigma}f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}f(A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\mathrm{d}S.$$

(3)（Poisson 公式）设 Σ：$x^2+y^2+z^2=1, f\in C(\Sigma)$，记 $k=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，则

$$I=\iint_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1}f(ku)\mathrm{d}u.$$

(4) 设点 $X_0=(x_0,y_0,z_0)\in\mathbf{R}^3$，$\Sigma$ 是以 X_0 为中心，$r>0$ 为半径的球面．$u(X)=u(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上有连续二阶偏导数，则 $\left(I(r)=\iint\limits_{\Sigma_r}u(x,y,z)\mathrm{d}S/4\pi r^2\right)$

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{r^2}[I(r)-u(X_0)]=\frac{1}{6}[u''_{x^2}(X_0)+u''_{y^2}(X_0)+u''_{z^2}(X_0)].$$

证明　(1) 对积分 I 采用球坐标变换 $\xi=\sin\varphi\cos\theta,\eta=\sin\varphi\sin\theta,\zeta=\cos\varphi$，则得 $(D:0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$

$$I=\iint\limits_D\sqrt{(b^2c^2\cos^2\theta+c^2a^2\sin^2\theta)\sin^2\varphi+a^2b^2\cos^2\varphi}\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

上式左端就是椭球面 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 表面积 S 在极坐标变换 $x=a\sin\varphi\cos\theta,y=b\sin\varphi\sin\theta,z=c\cos\varphi$ 下的积分公式．证毕．

注 1　上题中的椭球表面积 $S\geqslant4\pi(ab+ac+bc)/3$．这是因为由 Cauchy 不等式可知 $(\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1)$

$$\begin{aligned}bc\xi^2+ac\eta^2+ab\zeta^2&=(bc\xi)\xi+(ac\eta)\eta+(ab\zeta)\zeta\\&\leqslant(b^2c^2\xi^2+a^2c^2\eta^2+a^2b^2\zeta^2)^{1/2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^{1/2}\\&=\sqrt{b^2c^2\xi^2+a^2c^2\eta^2+a^2b^2\zeta^2},\end{aligned}$$

所以在两端作 Σ 上的积分可得 $S=I\geqslant\iint\limits_\Sigma(bc\xi^2+ac\eta^2+ab\zeta^2)\mathrm{d}S$．注意到变量的轮换对称性，以及（$\Sigma$ 的面积为 4π）

$$\iint\limits_\Sigma bc\xi^2\mathrm{d}S=bc\iint\limits_\Sigma\xi^2\mathrm{d}S=\frac{bc}{3}\iint\limits_\Sigma(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\mathrm{d}S=\frac{bc}{3}4\pi,$$

我们有 $S\geqslant4\pi(bc+ab+ac)/3$．证毕．

注 2　记上题中椭球 Ω' 的体积为 $V'(4\pi abc/3)$．若有某球体 Ω 之体积 V 满足 $V=V'$，则 Ω' 的表面积 S' 大于等于 Ω 之表面积 S：$S'\geqslant S$．证明如下：

设 Ω 之半径为 R，则由 $4\pi abc/3=4\pi R^3/3$ 可知，$R=(abc)^{1/3}$．从而 Ω 的表面积为

$$S=4\pi(abc)^{2/3}=4\pi(a^2b^2c^2)^{1/3}.$$

依据上题之结果 $S'\geqslant4\pi(ab+bc+ca)/3$，以及不等式

$$\frac{ab+bc+ca}{3}\geqslant(ab\ bc\ ca)^{1/3}=(a^2b^2c^2)^{1/3},$$

即得 $S'\geqslant S$．

(2) 因为 A 是正交变换，所以有 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=I$．又注意到在正交变换下，向量长度和内积均不变，以及

$$\frac{\partial\widetilde{X}}{\partial u}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\tilde{x}}{\partial u}\\[2mm]\dfrac{\partial\tilde{y}}{\partial u}\\[2mm]\dfrac{\partial\tilde{z}}{\partial u}\end{pmatrix}=A\cdot\frac{\partial X}{\partial u}=A\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}\\[2mm]\dfrac{\partial y}{\partial u}\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial u}\end{pmatrix},$$

可知$\left\|\dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}\right\|^2=\left\|\dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}\right\|^2$，$\left\|\dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}\right\|^2=\left\|\dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}\right\|^2$，$\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}\right)\cdot\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}\right)=\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}\right)\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}\right)$.从而可得

$\left(\sum_{i,j}^{m}(x_iy_j-x_jy_i)=\sum_{i}^{m}x_i^2-\sum_{i}^{m}y_i^2-\left(\sum_{i}^{m}x_iy_i\right)^2\right)$

$$A^2+B^2+C^2=\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2$$
$$=\left\|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}\right\|^2\left\|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}\right\|^2-\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}\right)\right]^2=\left\|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}\right\|^2\left\|\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}\right\|^2-\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial v}\right)\right]^2$$
$$=\left[\frac{\partial(\tilde{y},\tilde{z})}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(\tilde{z},\tilde{x})}{\partial(u,v)}\right]^2+\left[\frac{\partial(\tilde{x},\tilde{y})}{\partial(u,v)}\right]^2=A^2+B^2+C^2.$$

由此我们有

$$\iint_{\Sigma}f(\boldsymbol{X})\mathrm{d}S=\iint_{D}f[\boldsymbol{X}(u,v)]\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$=\iint_{D}f[A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(u,v)]\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{\Sigma}f(A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\mathrm{d}S.$$

(3) 作正交变换$(u,v,w)\to(x,y,z)$,其中 v,w 位于平面 $ax+by+cz=0$，$w=(ax+by+cz)/k$,使得 Σ变为 Σ：$u^2+v^2+w^2=1$.从而得到

$$I=\iint_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=\iint_{\tilde{\Sigma}}f(kw)\mathrm{d}S. \qquad ①$$

作变量替换 $u/\sqrt{1-w^2}=\cos\varphi$,$v/\sqrt{1-w^2}=\sin\varphi$($|w|\leqslant1$,$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$)，则 Σ的参数方程式为$u=\sqrt{1-w^2}\cos\varphi$,$v=\sqrt{1-w^2}\sin\varphi$,$w=w$.由此知其 Gauss 系数为

$$E=1/(1-w^2),\quad G=1-w^2,\quad F=0;\quad \mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}w\,\mathrm{d}\varphi.$$

最后导出

$$I=\iint_{\Sigma}f(kw)\mathrm{d}S=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}w\int_{0}^{2\pi}f(kw)\mathrm{d}\varphi=2\pi\int_{-1}^{1}f(kw)\mathrm{d}w.$$

注 1 Poisson 公式也可写成

$$J=\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{2\pi}f(a\sin\varphi\cos\theta+b\sin\varphi\sin\theta+c\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\theta$$
$$=2\pi\int_{0}^{\pi}f(k\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

实际上,对 J用替换 $x=\sin\varphi\cos\theta$,$y=\sin\varphi\sin\theta$,$z=\cos\varphi$,则 $\mathrm{d}S=\sin\theta\mathrm{d}\theta$,故 $J=\iint_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S$.

其次,对上①式右端用替换 $w=\cos\varphi$,$u=\sin\varphi\cos\theta$,$v=\sin\varphi\sin\theta$,则 Jacobi 行列式为 $J=\sin\varphi$.从而可得

$$I=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\pi}f(k\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=2\pi\int_{0}^{\pi}f(k\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

注 2(Poisson 公式的应用)　记 D:$0\leqslant x\leqslant 2\pi$,$0\leqslant y\leqslant \pi$,则

$$I=\iint_D \sin y\mathrm{e}^{(\cos x-\sin x)\sin y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}})\pi.$$

证明对 $f(x)=\mathrm{e}^x$,$a=1$,$b=-1$,$c=0$($k=\sqrt{2}$),引用 Poisson 公式,可知

$$I=2\pi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sqrt{2}\cos y}\sin y\mathrm{d}y=\sqrt{2}(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}})\pi.$$

注 3　计算 $I=\iint_{\Sigma}(x+y+z)^2\mathrm{d}S$,$\Sigma$:$x^2+y^2+z^2=1$.

解　引用 Poisson 公式,我们有($k=\sqrt{3}$)

$$I=2\pi\int_{-1}^{1}(\sqrt{3}w)^2\mathrm{d}w=4\pi.$$

(4)将 $u(x,y,z)$在 $\boldsymbol{X}_0=(x_0,y_0,z_0)$处作 Taylor 展式:

$$u(\boldsymbol{X})=u(\boldsymbol{X}_0)+\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial}{\partial z}\right]u(\boldsymbol{X}_0)$$
$$+\frac{1}{2}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}+(z-z_0)\frac{\partial}{\partial z}\right]^2u(\boldsymbol{X}_0)+o(\rho^2)\quad(\rho\to 0)$$

($\rho=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{1/2}$).注意到

$$\iint_{\Sigma_r}(x-x_0)\mathrm{d}S=0=\iint_{\Sigma_r}(y-y_0)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_r}(z-z_0)\mathrm{d}S,$$

$$\iint_{\Sigma_r}(x-x_0)(y-y_0)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_r}(x-x_0)(z-z_0)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_r}(y-y_0)(z-z_0)\mathrm{d}S=0,$$

$$\iint_{\Sigma_r}(x-x_0)^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_r}(y-y_0)^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_r}(z-z_0)^2\mathrm{d}S$$
$$=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma_r}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]\mathrm{d}S=\frac{r^2}{3}\cdot 4\pi r^2,$$

故知

$$I(r)-u(\boldsymbol{X}_0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{\Sigma_r}[u(\boldsymbol{X})-u(\boldsymbol{X}_0)]\mathrm{d}S$$
$$=\frac{r^2}{6}[u''_{x^2}(\boldsymbol{X}_0)+u''_{y^2}(\boldsymbol{X}_0)+u''_{z^2}(\boldsymbol{X}_0)].$$

由此即得所证.

例 7.4.5(物理应用)　解答下列问题:

(1)在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上取三点:$A(1,0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$为顶点的球面三角形块 Σ(AB,BC,CA为圆弧),面密度 $\rho=x^2+z^2$,求 Σ的质量 m.

(2)设有半径为 R 之球面 Σ,其上之点密度 ρ等于该点到中心铅垂直径之距离,试求 Σ的质量 m.

(3)求质量均匀分布(密度 $\rho=1$)的曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$被圆柱 $x^2+y^2=ax$ 所

截部分 Σ 的重心 x_c, y_c, z_c.

(4) 求均匀球(层)面(密度 ρ 为常数)对一个质点的引力 $\boldsymbol{F}=(F_x, F_y, F_z)$.

解　(1) 若以 Σ 表示球面三角块, D 表示 Σ 面在 xOz 平面上的投影区域, 注意到极坐标下有 $D: 0\leqslant\rho\leqslant 1, \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, 则所求的质量

$$m=\iint_D (x^2+z^2)\mathrm{d}S=\iint_D (x^2+z^2)\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-z^2}+\frac{z^2}{1-x^2-z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$=\iint_D (x^2+z^2)\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+z^2)}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\lim_{\rho\to 1-0}\iint_D \frac{\rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$=\lim_{\rho\to 1-0}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a \frac{\rho^3\mathrm{d}\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{\pi}{6}.$$

(2) 作坐标系以球心为坐标原点, 并令

$$x=R\sin\varphi\cos\theta,\quad y=R\sin\varphi\sin\theta,\quad z=R\cos\varphi,$$

则 $\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta, \rho=\sqrt{x^2+y^2}=R\sin\varphi$. 从而得

$$m=\iint_\Sigma \rho\mathrm{d}S=R^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi=\pi^2R^3.$$

(3) 易知 $z'_x=x/\sqrt{x^2+y^2}, z'_y=y/\sqrt{x^2+y^2}, \mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Σ 的投影区域为 $D: x^2+y^2\leqslant ax$. 从而可得

$$m=\iint_\Sigma \mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}a^2;$$

$$x_c=\frac{1}{m}\iint_\Sigma x\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{2}}{m}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\sqrt{2}a^3}{3m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\sqrt{2}a^3}{3m}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{2}.$$

$$y_c=\frac{1}{m}\iint_\Sigma y\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{2}}{m}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r^2\mathrm{d}r=0.$$

$$z_c=\frac{\sqrt{2}}{m}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2}}{m}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r^2\mathrm{d}r=\frac{\sqrt{2}}{3m}a^2\mathrm{B}\left(2,\frac{1}{2}\right)=\frac{16a}{9\pi}.$$

(4) 设球心在原点, 半径为 R, 质点在 Oz 轴上点 $(0,0,a)$ 处, 则

$$F_z=\iint_\Sigma \frac{z-a}{r^3}\rho\mathrm{d}S,\quad \Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2\quad (F_x=F_y=0).$$

采用球坐标: $x=R\sin\varphi\cos\theta, y=R\sin\varphi\sin\theta, z=R\cos\varphi; \mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$,

$$F'_z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{(R\cos\varphi-a)\rho R^2\sin\varphi}{(R^2+a^2-2Ra\cos\varphi)^{3/2}}\mathrm{d}\varphi.$$

再作变量替换 $t^2=R^2+a^2-2Ra\cos\varphi$,可得

$$F_z=\frac{\pi R}{a^2}\rho\int_{|R-a|}^{R+a}\left(\frac{R^2-a^2}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t=-\frac{\pi R^2}{a^2}\rho\left(2R-\frac{R^2-a^2}{|R-a|}-|R-a|\right)$$

$$=\begin{cases}0, & a<R,\\ -4\pi R^2\rho/a^2, & a>R.\end{cases}$$

例 7.4.6 解答下列问题:

(1) 求半径为 R,面密度为 ρ 的均匀球层面 Σ 对任意一点 A 的位势 W.

(2) 求均匀(密度 ρ 为常数)圆锥面 Σ:$x^2/a^2+y^2/a^2-z^2/b^2=0$,$0\leqslant z\leqslant b$ 关于直线 L:$x/1=y/0=(z-b)/0$ 的惯性矩 I_L.

(3) 设 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in\Sigma$,π 为 Σ 在点 P 处的切平面.$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离,求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

解 (1) 取球心为坐标原点,z 轴过 A 点,设 A 点的坐标为 $(0,0,a)$($0<a<R$ 或 $a>R$),所以 A 点的单层位势为

$$W(0,0,a)=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\rho\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}.$$

Σ 的参数方程为 $x=R\cos\theta\sin\varphi$,$y=R\sin\theta\sin\varphi$,$z=R\cos\varphi$,以及投影区域 $D=\{(\theta,\varphi):0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$,$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$,

$$W(0,0,a)=\rho R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{R^2-2Ra\cos\varphi+a^2}}$$

$$=2\pi\rho R^2\left[\frac{1}{2aR}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(R^2-2Ra\cos\varphi+a^2)}{\sqrt{R^2-2Ra\cos\varphi+a^2}}\right]$$

$$=\frac{2\pi\rho R}{a}\sqrt{R^2-2Ra\cos\varphi+a^2}\,\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2\pi R}{a}\rho[R+a-|R-a|]=\begin{cases}4\pi R\rho, & 0<a<R,\\ \dfrac{4\pi R^2}{a}\rho, & a\geqslant R.\end{cases}$$

注 1 上述结果表明:在均匀球层里面,它的位势为一常数;在球层外面,相当于把球层的全部质量集中于球心时所产生的位势一样.

求球层对 $A(0,0,a)$ 点的引力.由对称性知 $F_x=F_y=0$,

$$F_z=\frac{\partial W(0,0,\zeta)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=a}=\begin{cases}0, & 0<a<R,\\ -\dfrac{4\pi R^2\rho}{a^2}, & a>R.\end{cases}$$

注 2 上述结果还表明:在球层里面的单位质量,都不受到球层的任何引力;在球层外面的单位质量,相当于把球层的质量集中到球心时所受到的引力一样.

利用均匀球层的位势，我们来求均匀的球体的位势．设体密度为 1 的均匀球 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，求它在 $(0,0,h)$ 点的单层位势 $W(0,0,h)$．已知质量为 m，半径为 R 的均匀球层在 $(0,0,a)$ 点的位势 $W(0,0,a)$：

$$W(0,0,a)=\begin{cases}\dfrac{m}{R}, & 0<a<R,\\[2mm] \dfrac{m}{a}, & a\geqslant R.\end{cases}$$

从而知，当 $h>1$ 时，有

$$W(0,0,h)=\int_0^1\frac{4\pi r^2\,\mathrm{d}r}{h}=\frac{4\pi}{3h};$$

当 $0<h\leqslant 1$ 时，

$$W(0,0,h)=\int_0^h\frac{4\pi r^2\,\mathrm{d}r}{h}+\int_h^1\frac{4\pi r^2\,\mathrm{d}r}{r}=\frac{4}{3}\pi h^2+2\pi(1-h^2)=2\pi\left(1-\frac{h^2}{3}\right).$$

（2）易知直线 L 平行于 Ox 轴，位于平面 xOz 上且截 Oz 轴一段长为 b 之线段．令 Σ 上点 $P(x,y,z)$，它到 L 上的距离的平方为 $r^2=x^2+y^2+(b-z)^2$．从而其惯性矩为

$$I_L=\rho\iint_{\Sigma}[x^2+y^2+(b-z)^2]\,\mathrm{d}S.$$

注意到 $z=b\sqrt{x^2+y^2}/a\,(D:x^2+y^2\leqslant a^2)$，$\mathrm{d}S=(\sqrt{a^2+b^2}/a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故得

$$I_L=\frac{\rho\sqrt{a^2+b^2}}{a}\iint_D\left[x^2+y^2+b^2\left(1-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

采用极坐标替换，我们有

$$\begin{aligned}I_L&=\frac{\rho\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\left[r^2+b^2\left(1-\frac{r}{a}\right)^2\right]\mathrm{d}r\\&=2\pi\rho\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\int_0^a\left[r^3\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)+b^2r-\frac{2b^2r^2}{a}\right]\mathrm{d}r\\&=2\pi\rho\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\left[\frac{a^4}{4}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)+\frac{a^2b^2}{2}-\frac{2}{3}a^2b^2\right]\\&=\frac{\pi\rho a}{6}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+b^2).\end{aligned}$$

（3）设 (X,Y,Z) 是 π 上任一点，则 π 的方程和距离为

$$\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1,\quad \rho(x,y,z)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2\right)^{-1}.$$

由 $z=\sqrt{1-(x^2/2)-(y^2/2)}$，可知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{1-(x^2/2+y^2/2)}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-(x^2/2+y^2/2)}},$$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$
$$=\sqrt{4-x^2-y^2}/2\ \sqrt{1-(x^2/2+y^2/2)}\,dxdy.$$

从而得到(采用极坐标变换)

$$I=\frac{1}{4}\iint_D(4-x^2-y^2)dxdy=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)rdr=\frac{3}{2}\pi.$$

7.5　第二型曲面积分

定义 7.5.1　设 Σ 是双侧曲面,如果指定 Σ 法向量的一个方向,则称曲面 Σ 的点集连同指定的法向量为曲面的一个定侧.

光滑曲面 Σ 由方程 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 给出,法向量 $\boldsymbol{n}=\pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}-\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right)$.

若指定 Σ 为上侧,则上式括号前取“+”号;若指定 Σ 为下侧,则上式括号前取“−”号.又如双侧曲面 Σ 由参数方程 $x=x(u,v),y=(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D$ 给出,令

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

则 Σ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\pm(A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k})$.

怎么根据 Σ 指定的侧来决定上式“±”号选取呢?事实上只要考察 Σ 上一点,如果该点指定的法向量向上,则该点 C 值大于零时取“+”号,该点 C 值小于零时取“−”号;如果该点指定的法向量向下,则该点 C 值大于零时取“−”号,该点 C 值小于零时取“+”号.

定义 7.5.2　设 Σ 是一双侧曲面,取定 Σ 的一侧 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,$R(x,y,z)$ 为 S 上有界函数,对 Σ 作分法 $\Delta=\{\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n\}$.记定侧曲面 ΔS_i 在 xOy 平面上的有向投影为 $\Delta\sigma_i$,$\Delta\sigma_i$ 的符号规定如下:若在 ΔS_i 上方向余弦 $\cos\gamma$ 为正,则投影面积取正号,即 $\Delta\sigma_i>0$;若在 ΔS_i 上方向余弦 $\cos\gamma$ 为负,则投影面积取负号,即 $\Delta\sigma_i<0$;若在 ΔS_i 上有一点方向余弦为零,则投影面积约定为零,即 $\Delta\sigma_i=0$(图 7.18),在每一 ΔS_i 上任取一点 $M_i(\xi,\eta,\zeta)(i=1,2,\cdots,n)$ 作和 $\sum_{i=1}^{n}R(\xi,\eta,\zeta)\Delta\sigma_i$.当 $\|\Delta\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\operatorname{diam}\{\Delta S_i\}\to 0$ 时,若极限

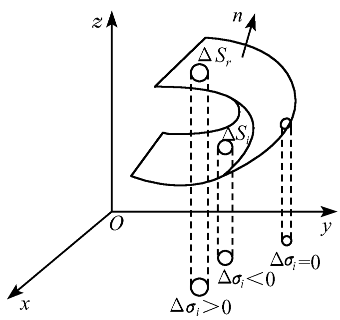


图 7.18

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi,\eta,\zeta)\Delta\sigma_i=I$$

存在,且不依赖分法 Δ 和点 M_i 的取法,则称 I 是函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 选定侧上关于 xOy 平面的第二型曲面积分,记作

$$I=\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy\quad\left(\iint_\Sigma R(x,y,z)dx\wedge dy\right).$$

这里 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 象征曲面元素在 xOy 平面上的有向投影,所以它是有向面积微元,不同于二重积分里的面积微元.记号没有反映出曲面取的是哪一侧,必须另加说明.由定义看出,当曲面的一侧换成另一侧时,积分值相差一符号.

若把曲面元素 ΔS_i 投影到 yOz 平面或 zOx 平面上,则可得另外两个第二型曲面积分:

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

应用中常常是把三个不同的函数关于三个坐标面的三个积分结合一起,记作

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 P,Q,R 是 x,y,z 的函数.

定理 7.5.1　设 D 是平面闭区域,曲面 Σ 由方程 $z=f(x,y)((x,y)\in D)$ 给定,$f\in C^{(1)}(D)$.若 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续,则 R 在 Σ 上侧的面积分存在,且有(取+号)

$$\iint R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D} R[x,y,f(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若取定曲面的下侧,则上式右端取负号.

定理 7.5.2　设 Σ 为双侧光滑曲面,取定法向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续,则积分存在,且

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma\mathrm{d}s.$$

同理可证($P\in C(\Sigma),Q\in C(\Sigma)$)

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha\mathrm{d}S,\quad \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta\mathrm{d}S.$$

把上述三个第二型曲面积分合起来可写成:

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

因为我们有公式(±号的选取由指定的法向量决定)

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

所以由第一型面积分计算公式可导出第二型面积分的计算公式:

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D}(PA+QB+RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

这里 P,Q,R 中的 x,y,z 是 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v)((u,v)\in D)$.

例 7.5.1　计算下列积分 I:

(1) 设 Σ 是顶点为 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 的三角形的下侧,

$$I=\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 设 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧,

$$I=\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 设 Σ为圆柱面 $x^2+y^2=a^2(x\geqslant 0,0\leqslant z\leqslant 1)$外侧,

$$I=\iint_{\Sigma}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

(4) 设 Σ是 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$的上侧,

$$I=\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(5) 设 Σ是椭球面 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 的外侧,

$$I=\iint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 (1) 由轮换变量的对称性可知

$$I=3\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\x+y\leqslant 1}}(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-3\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-x-y)\mathrm{d}x=-\frac{3}{2}\int_0^1(1-y)^2\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}.$$

(2) 记 Σ_+,Σ_-为球面 Σ的上方与下方,则

$$I_1=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_+}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_-}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}z_+\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D}z_-\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $z_+=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,$z_-=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$,$D:x^2+y^2\leqslant a^2$.从而可得

$$I_1=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\mathrm{d}r=\frac{4}{3}\pi a^3.\quad I=3I_1=4\pi a^3.$$

(3) 记 $D_1:0\leqslant x\leqslant a,-\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{a^2-x^2}$,注意到在 Σ上曲面的法线方向与 Oz 轴正交,故有

$$\iint_{\Sigma}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(z+1)\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})\mathrm{d}S=0.$$

为计算$\iint_{\Sigma}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}z$,依方程 $y=\sqrt{a^2-x^2}$与 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$将 Σ分为两部分:Σ_1,Σ_2,在 Σ_1 上其外法线方向与 Oy 轴形成锐角;在 Σ_2 上则是钝角.记 $D_2:0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant z\leqslant 1$,从而我们有

$$\iint_{\Sigma}xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma_1}xy\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}xy\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_2}x\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z-\iint_{D_2}x(-\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}a^3.$$

最后得 $I=2a^3/3$.

(4) 因为 Σ 是关于 yOz 平面对称的上半球面,所以 Σ 上关于 yOz 平面对称的元素 ΔS_i 在 yOz 平面上的有向投影 $\Delta\sigma_i$ 正好抵消.又被积函数关于 x 是偶函数,直接由定义可得 $\iint\limits_{\Sigma} x^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.同理得 $\iint\limits_{\Sigma} y^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$.从而知

$$I=\iint\limits_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(R^2-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R(R^2-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}R^4.$$

(5) Σ 的参数方程为 $x=a\cos\theta\sin\varphi, y=b\sin\theta\sin\varphi, z=c\cos\varphi$,参数变化区域 $D=\{(\theta,\varphi):0\leqslant\theta\leqslant2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$.Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} -a\sin\theta\sin\varphi & b\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ a\cos\theta\cos\varphi & b\sin\theta\cos\varphi & -c\sin\varphi \end{pmatrix},$$

由此求出 $A=-bc\cos\theta\sin^2\varphi, B=-ac\sin\theta\sin^2\varphi, C=-ab\sin\varphi\cos\varphi$.

因为上半椭球面上一点的法向量的第三个分量大于零和 $C<0$,所以计算公式前应取“$-$”号.从而可得

$$\begin{aligned}I=&\iint\limits_{D}[a^2\cos^3\theta\sin^3\varphi\cdot bc\cos\theta\sin^2\varphi+b^3\sin^3\theta\sin^3\varphi\cdot ac\sin\theta\sin^2\varphi\\&+c^3\cos^3\varphi\cdot ab\sin\varphi\cos\varphi]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\=&abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}[a^2\cos^4\theta\sin^5\varphi+b^2\sin^4\theta\sin^5\varphi+c^2\cos^4\varphi\sin\varphi]\mathrm{d}\varphi\\=&8abc\left(a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\mathrm{d}\varphi+b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\mathrm{d}\varphi+\frac{\pi}{2}c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\\=&\frac{4}{5}\pi abc(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

例 7.5.2　计算下列第二型曲面积分 I:

(1) $I=\iint\limits_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是圆锥面 $x^2+y^2=z^2\ (0\leqslant z\leqslant h)$ 外侧.

(2) $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}+\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{y}+\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$,$\Sigma$ 是 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 之外侧.

(3) 设 $f(x), g(x), h(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上的连续函数,

$$I=\iint\limits_{\Sigma}f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是长方体 $[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$ 表面外侧.

解　(1) 易知 Σ 在 xOy 平面上的投影区域是 $D: x^2+y^2\leqslant h^2$.令 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,$

$\cos\beta,\cos\gamma)$是 Σ 准线上点的法向量,$\boldsymbol{n}$ 与 Oz 轴形成钝角,且 $z=z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$,故知

$$\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},\quad \cos\alpha=\frac{z_x'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{z_y'}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}.$$

由 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可得

$$I=\iint_D\{[y-z(x,y)]z_x'+[z(x,y)-x]z_x'+y-x\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_D(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}(\sin\varphi-\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi\int_0^h r^2\mathrm{d}r=0.$$

(2) 采用极坐标表示,则 Σ 有表示式

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\quad y=b\sin\theta\sin\varphi,\quad z=c\cos\theta.$$

$$D=\{(\theta,\varphi):0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant2\pi\}.$$

依定向曲面积分定义,我们有

$$I=\iint_\Sigma\left(\frac{\cos\alpha}{x}+\frac{\cos\beta}{y}+\frac{\cos\gamma}{z}\right)\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha=\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\cos\beta=\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\cos\gamma=\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

以及 $A=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)},B=\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\varphi)},C=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)}$.即

$$A=bc\sin^2\theta\cos\varphi,\quad B=ac\sin^2\theta\sin\varphi,\quad C=ab\sin\theta\cos\varphi.$$

注意到 $\mathrm{d}S=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$,得出

$$I=\iint_D\left(\frac{A}{x(\theta,\varphi)}+\frac{B}{y(\theta,\varphi)}+\frac{C}{z(\theta,\varphi)}\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=\iint_D\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=4\pi\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)=4\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

(3) 记 $\Sigma_1:x=0,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c;\Sigma_2:x=a,0\leqslant y\leqslant b,0\leqslant z\leqslant c$,则

$$\iint_\Sigma f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma_1}f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma_2}f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-f(0)\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+f(a)\iint_{\Sigma_2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{[f(a)-f(0)]}{a}abc.$$

类似地有

$$\iint_{\Sigma} g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{g(b)-g(0)}{b}abc;\quad \iint_{\Sigma} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{h(c)-h(0)}{c}abc.$$

从而可得

$$I=abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right].$$

例 7.5.3　计算下列第二型曲面积分 I：

(1) $I=\iint_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx(0<r<R)$ 所截且位于 $z\geqslant 0$ 之部分的外侧．

(2) $I=\iint_{\Sigma}\mathrm{e}^{\sqrt{y}}/\sqrt{x^2+z^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$\Sigma$ 是曲面 $y=x^2+z^2$ 与平面 $y=1$，$y=2$ 围成的立体表面的外侧．

(3) $I=\iint_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，$\Sigma$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 外侧．

(4) $I=\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 是 $x-y+z=1$（第四象限）之上侧，$f\in C(\Sigma)$．

解　(1) 注意到 Σ 外侧之法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{x-R}{R},\dfrac{y}{R},\dfrac{z}{R}\right)$，以及被积函数轮换差的特征，就想到用第一型面积分来计算，即（易知 $\iint_{\Sigma}y\mathrm{d}S=0$）

$$I=\iint_{\Sigma}\left[(y-z)\frac{x-R}{R}+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}\right]\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(z-y)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2rx}\sqrt{2Rx-x^2-y^2}\,\frac{R}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R\pi r^2.$$

(2) 如图 7.19 所示，可分成三个曲面 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$．

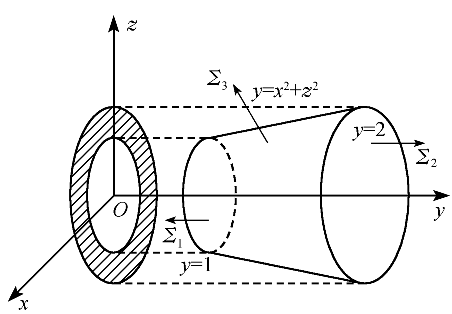


图 7.19

(i) 由方程 $\Sigma_1: y=1, (z,x)\in D_1=\{x^2+z^2\leqslant 1\}$ 及 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\mathrm{d}S=-\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,

$$\iint_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\mathrm{d}S$$

$$=-\iint_{D_1}\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^1\mathrm{e}\mathrm{d}r=-2\pi\mathrm{e}.$$

(ii) 由方程 $\Sigma_2: y=2, (z,x)\in D_2=\{x^2+z^2\leqslant 2\}$ 及 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}z$,

$$\iint_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_2}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\varepsilon^{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r=2\sqrt{2}\pi\mathrm{e}^{\sqrt{2}}.$$

(iii) 在 Σ_3 上,由方程 $\Sigma_3: y=x^2+z^2, (z,x)\in D_3=\{1\leqslant x^2+z^2\leqslant 2\}$ 及 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})\mathrm{d}S=-\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,可得

$$\iint_{\Sigma_3}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint_{D_3}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{e}^r\mathrm{d}r=-2\pi(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}).$$

因此,我们要计算的积分为

$$\oiint_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{x^2+z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=(-2\pi\mathrm{e})+2\sqrt{2}\pi\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-2\pi(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e})=2\pi\mathrm{e}^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1).$$

(3) 注意到球面外侧单位法向量为 $(x/R, y/R, z/R)$,以及 $(x/R)\mathrm{d}S=\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, $(y/R)\mathrm{d}S=\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, $(z/R)\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,故有

$$I=\frac{1}{R^4}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{1}{R^2}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=4\pi.$$

(4) 注意 Σ 的法向量为 $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, I 可化为第一型面积分来算.

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x-2f(x,y,z)-y+f(x,y,z)+z]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}.$$

例 7.5.4　用第二型曲面积分计算下列第一型曲面积分 I:

(1) $I=\iint_{\Sigma}xyz\cos\gamma\mathrm{d}S$, Σ 是 $x^2+y^2+z^2=1\ (x,y\geqslant 0)$.

(2) $I=\iint_{\Sigma}xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\mathrm{d}S$, Σ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0$,第一象限).

解　(1) 易知 Σ可写为 $x=\varphi(y,z)=\sqrt{1-y^2-z^2}$,其定义区域为 D:$\{(y,z):y^2+z^2\leqslant 1,y\geqslant 0\}$.此时,易知 $\cos\gamma=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$.从而可得

$$I=\iint_{\Sigma} yz\varphi(y,z)\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\iint_{D} yz\frac{\partial}{\partial z}\varphi^2(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D} yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\int_{0}^{\sqrt{1-z^2}} yz^2\mathrm{d}y=\frac{4}{15}.$$

(2) 注意到对 Σ的任何变换方式,其被积函数的计算量均不小,不过后者的三项式呈现出某种对称性,以及 Σ之法向量之计算比较简单,故我们将 I转换为第二型积分来计算.实际上,Σ之外向 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(x/a,y/a,z/a)$,从而可得

$$I=a\iint_{\Sigma}\left(y^3z^3\frac{x}{a}+z^3x^3\frac{y}{a}+x^3y^3\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}S$$

$$=a\iint_{\Sigma} y^3z^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^3x^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3a\iint_{\Sigma} x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意 Σ在第一象限的投影为 D:$0\leqslant r\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$,可得

$$I=3a\int_{0}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{a} r^7\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}r=\frac{3}{64}a^9\int_{0}^{\pi/2}\sin^3(2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{a^9}{32}.$$

第 8 章　各种积分之间的联系

8.1　Green　公　式

单连通区域和多连通区域的概念：一平面连通区域 D，如果 D 内任一闭曲线都可以在 D 内连续地收缩为 D 内一点，则称此区域 D 为单连通区域，否则为多连通的．

区域边界的方向：设区域 D 是由有限条可求长曲线 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m$ 围成(图 8.1)，当一人沿 Γ_i 行走时，区域 D 位于其左边，则规定人行走的方向为边界 Γ_i 的定向．如图 8.1 中 Γ_1 的定向为逆时针方向，$\Gamma_2, \cdots, \Gamma_m$ 的定向为顺时针方向．记号∂D 表示所有定向边界曲线 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_m$ 之和．

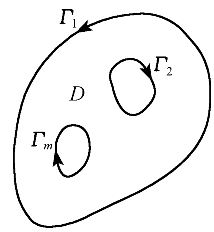


图 8.1

定理 8.1.1　设闭区域 D 是由有限条可求长闭曲线围成的，∂D 表示定向边界．$P(x, y), Q(x, y)$在 D 上连续，且有连续的一阶偏导数，则

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad \text{(Green 公式)}$$

推论　若 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的闭区域，$P(x, y), Q(x, y) \in C^{(1)}(D)$，则

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} (P\cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}\rangle + Q\cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}\rangle)\mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 取外法线方向．

定理 8.1.2　设闭区域 D 是由有限条逐段光滑曲线围成，函数 $u, v \in C^{(2)}(D)$．则有

(1) $\displaystyle\iint_D \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$；

(2) $\displaystyle\iint_D v\,\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\partial D} v\,\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$；

(3) $\displaystyle\iint_D (v\Delta u - u\Delta v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D} \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} - u\,\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s$，

其中 $\boldsymbol{n}$ 为外法线方向．

例 8.1.1　解答下列问题：

(1) (分部积分公式)设 D 是由简单闭曲线 L 围成的平面闭区域，$P(x, y)$，$Q(x, y)$，$f(x, y)$在 D 上连续可微，则

$$\iint_D [P(x, y)f'_x(x, y) + Q(x, y)f'_y(x, y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_L f(x, y)[P(x, y)\mathrm{d}y - Q(x, y)\mathrm{d}x] - \iint_D \left[\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}\right] f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注 1　在 $Q(x, y) \equiv 0$ 时，有

$$\iint_D P(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L P(x,y)f(x,y)\mathrm{d}y-\iint_D f(x,y)\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注 2　设 $f(x,y)$, $g(x,y)$在 D 上连续可微，则

$$-\int_L f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x=\iint_D\left[f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}+g(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2) 设 L 是包含原点的简单闭曲线，又有

$$P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2};\quad P'_y=Q'_x=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

试问是否成立 $I=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$.

(3) 在 Green 公式中，若$\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$，试问是否会有

$$I=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

解　(1) 根据 Green 公式，我们有

$$\begin{aligned}\int_L[f(P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x)]&=\int_L(-fQ\mathrm{d}x+fP\mathrm{d}y)\\&=\iint_D[f'_xP+fP'_x+f'_yQ+fQ'_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

从而移项即得所证.

(2) 作以原点为圆心，$\varepsilon>0$ 为半径且位于 L 内的圆 $\tilde{L}$，D 为 L 内 $\tilde{L}$ 外的闭区域，则由 Green 公式可知

$$I=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\tilde{L}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

对上式右端采用极坐标变换，可得

$$I=\int_0^{2\pi}\left[\frac{-\varepsilon\sin\theta}{\varepsilon^2}(-\varepsilon\sin\theta)+\frac{\varepsilon\cos\theta}{\varepsilon^2}(\varepsilon\cos\theta)\right]\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi\neq0.$$

产生这一结果的原因是：P'_y与 Q'_x在原点不连续.

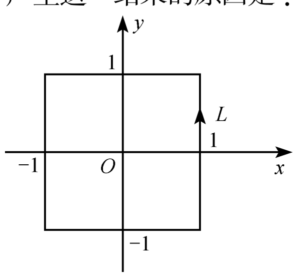


图 8.2

(3) 有可能 $I=0$. 例 $I=\int_L(x^2+xy)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y$，其中 L 如图 8.2 所示，且记 D 为 L 所围区域. 由 $P=x^2+xy$, $Q=x^2+y^2$，易知

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x,\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=2x.$$

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1\mathrm{d}y\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x=0.$$

例 8.1.2 计算下列第二型线积分 I:

(1) $I=\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$,$L$:$(x-1)^2+y^2=R^2(R>1)$逆时针方向.

(2) $I=\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{2(Ax^2+2Bxy+Cy^2)}(A,C>0;AC-B^2>0)$,$L$:$x^2+y^2=1$正向.

(3) $I=\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{[(ax+by)^2+(cx+dy)^2]^p}(ad-bc\neq 0)$,$L$:椭圆$(ax+by)^2+(cx+dy)^2=1$逆时针方向.

解 (1) 作位于 L 内的曲线 L_ε:$4x^2+y^2=\varepsilon^2$,则由 Green 公式可知$\left(注意\frac{\partial Q}{\partial x}=-(4x^2-y^2)/(4x^2+y^2)^2=\frac{\partial P}{\partial y}\right)$

$$I=\int_{L_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\frac{2}{\varepsilon^2}\frac{1}{2}\int_{L_\varepsilon}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\pi.$$

(2) 由 $P(x,y)=-y/(Ax^2+2Bxy+Cy^2)$,$Q(x,y)=x/(Ax^2+2Bxy+Cy^2)$知

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=\frac{Cy^2-Ax^2}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}.$$

作曲线 L_1:$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$,则易知

$$I=\frac{1}{2}\int_{L_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}\quad(椭圆\ L_1\ 之面积).$$

(3) 记椭圆 L 所围区域为 D,则由 Green 公式知

$$I=\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变量替换 $u=ax+by$,$v=cx+dy$,则有

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{ad-bc},$$

$$I=2\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{2}{|ad-bc|}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{2\pi}{|ad-bc|}.$$

例 8.1.3 计算下列二型线积分 I:

(1) $I=I_1-I_2$,其中 I_1,I_2 各为积分

$$I_1=\int_{AmB}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y,\quad I_2=\int_{AnB}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y,$$

AmB是从点 $A(1,1)$到点 $B(2,6)$的直线段,AnB是以 Oy 为轴且过原点,A 点及 B 点的抛物线.

(2) $I=\int\limits_{ATB}\dfrac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{3(x^2+y^2)}$，$ATB$是从点$A(-2,0)$到点$B(2,0)$且位于下半平面的任一条简单光滑曲线.

(3) $I=\int\limits_{ABO}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$，$ABO$是圆周 $x^2+y^2=ax$ 的上半部分(正向).

(4) $I=\int\limits_{AOB}(12xy+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x-(\cos y-x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y$，$AOB$是从点 $A(-1,1)$沿曲线 $y=x^2$ 到达原点，再沿直线 $y=0$ 到达点 $B(2,0)$的曲线段.

(5) $I=\int_L\dfrac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}[(x\sin x+y\cos x)\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\mathrm{d}y]$，$L$ 是圆周 $x^2+y^2=1$ 逆时针(正向).

解　(1) 易知AnB是抛物线 $y=2x^2-x$.记闭曲线 L:$\widehat{AnBmA}$所围区域为 D，则由 Green 公式可得

$$I_2-I_1=\oint_L(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y=\iint_D\left[\frac{\partial(-(x-y)^2)}{\partial x}-\frac{\partial(x+y)^2}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=-4\int_1^2x\mathrm{d}x\int_{2x^2-x}^{5x-4}\mathrm{d}y=-4\int_1^2(6x^2-4x-2x^3)\mathrm{d}x=-2.$$

(2) 由 $P(x,y)=(x+y)/3(x^2+y^2)$，$Q(x,y)=(y-x)/3(x^2+y^2)$，可知$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.故作曲线段 L:$x^2+y^2=4$ 的位于下半平面部分(逆时针)，就得到

$$I=\oint_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{3(x^2+y^2)}=\frac{1}{12}\int_L(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y.$$

作坐标变换 $x=2\cos t$，$y=2\sin t$，我们有

$$I=\frac{4}{12}\int_\pi^{2\pi}[-(\cos t+\sin t)\sin t+(\sin t-\cos t)\cos t]\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{3}.$$

(3) 添辅助线段$\overline{OA}$(图 8.3)与ABO形成闭曲线 L 且围成区域 D，由 $P(x,y)=\mathrm{e}^x\sin y-my$ 与 $Q(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y-m$，可知$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=m$.从而依 Green 公式可得(第二项积分为 0)

$$I=I+\int_{\overline{OA}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$$
$$=\oint_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y=\iint_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{m}{8}\pi a^2.$$

(4) 添加直线段 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$,使得与 AOB 形成逆时针方向之闭曲线 L ,且记 L 所围区域为 D ,如图 8.4 ,则由 Green 公式可得

$$I=\left(\int_L+\int_{\overline{CB}}+\int_{\overline{AC}}\right)(12xy+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x-(\cos y-x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=I_1+I_2+I_3.$$

$$I_1=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(x\mathrm{e}^y-\cos y)-\frac{\partial}{\partial y}(12xy+\mathrm{e}^y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_D 12x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-12\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^2 x\mathrm{d}x=-12\int_0^1\left(2-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y=-21,$$

$$I_2=\int_0^1(\cos y-2\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=2+\sin 1-2\mathrm{e},$$

$$I_3=\int_{\overline{AC}}(12xy+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2(12x+\mathrm{e})\mathrm{d}x=3\mathrm{e}+18.$$

最后,我们有 $I=-21+(2+\sin 1-2\mathrm{e})+(3\mathrm{e}+18)=\sin 1+\mathrm{e}-1$.

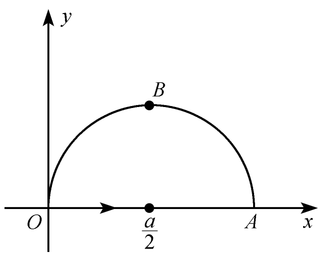


图 8.3

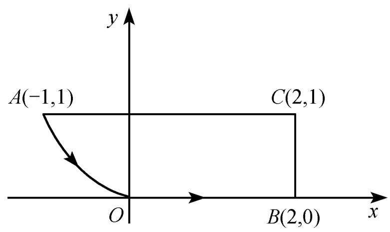


图 8.4

(5) 由 $P(x,y)=\mathrm{e}^y(x\sin x+y\cos x)$, $Q(x,y)=y\sin x-x\cos x$ 可知, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 因此作曲线 $L_\varepsilon: x^2+y^2=\varepsilon^2\,(\varepsilon>0)$,记其所围区域为 D_ε,可得

$$I=\int_{L_\varepsilon}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}-2\mathrm{e}^y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

应用中值定理,存在点 (ξ,η),使得 $(\xi^2+\eta^2<\varepsilon^2)$

$$I=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot(-2\mathrm{e}^\eta\cos\xi)\iint_{D_\varepsilon}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi\mathrm{e}^\eta\cos\xi.$$

从而我们有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(-2\pi\mathrm{e}^\eta\cos\xi)=-2\pi$.

例 8.1.4 计算下列积分 I:

(1) $I=\int_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$, L 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一条简单光滑闭曲线, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上连续可微.

(2) $I=\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x[y^2f(xy)-1]}{y^2}\mathrm{d}y$，$L$ 是从点 $A\left(3,\frac{2}{3}\right)$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段，$f\in C^{(1)}(\mathbf{R}^1)$.

(3) $I=\int_{AmB}[\varphi(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\sin x-\pi]\mathrm{d}y$，其中点 $A(\pi,2)$，$B(3\pi,4)$，而 AmB 是直线段 $\overline{AB}$ 下方的任意的简单光滑曲线弧，且它与 $\overline{AB}$ 围成的区域 D 之面积为 2，$\varphi\in C^{(1)}(\mathbf{R}^1)$.

(4) 设 $f\in C^{(1)}([1,4])$，且 $f(1)=f(4)$，闭曲线 L 是曲线 $y=x$，$y=4x$，$xy=1$，$xy=4$ 所围区域 D 之正向边界.

$$I=\int_L \frac{f(xy)}{y}\mathrm{d}y.$$

解　(1) 由 $P(x,y)=xf(x^2+y^2)$，$Q(x,y)=yf(x^2+y^2)$ 可知，

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2xyf'(x^2+y^2)=\frac{\partial P(x,y)}{\partial y},\quad (x,y)\in D,$$

其中 D 是 L 所围区域. 从而可得(Green 定理)

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(2) 由 $P(x,y)=[1+y^2f(x,y)]/y$，$Q(x,y)=x[y^2f(x,y)-1]/y^2$ 可知，当 $y\neq0$ 时有 $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$. 从而取点 $C(1,2/3)$. 并作 $\overline{AC}$，$\overline{CB}$ 使 $\widehat{ABCA}$ 形闭曲线，可得(记 $\widehat{ABCA}$ 所围区域为 D)

$$\begin{aligned}I&=\int_{ABCA}\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x[y^2f(xy)-1]}{y^2}\mathrm{d}y\\&\quad+\int_{\overline{AC}}\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\int_{\overline{CB}}\frac{x[y^2f(xy)-1]}{y^2}\mathrm{d}y\\&=0+\int_3^1\left[\frac{3}{2}+\frac{2}{3}f\left(\frac{2}{3}x\right)\right]\mathrm{d}x+\int_{2/3}^2\left[f(y)-\frac{1}{y^2}\right]\mathrm{d}y\\&=-3+\int_2^{2/3}f(t)\mathrm{d}t+\int_{2/3}^2 f(y)\mathrm{d}y-1=-4.\end{aligned}$$

(3) 记 AmB 与 $\overline{BA}$ 合成闭曲线 L，直线 AB 之方程为 $y=x/\pi+1$，则

$$\begin{aligned}I&=\left(\int_L-\int_{\overline{BA}}\right)[\varphi(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\sin x-\pi]\mathrm{d}y\\&=\iint_D\pi\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{3\pi}^{\pi}\left[\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos x-\pi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)+\frac{1}{\pi}\varphi'\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\sin x-1\right]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= 2\pi + \int_{3\pi}^{\pi} [x + (\pi - 1)]\mathrm{d}x = -6\pi^2 .$$

(4) 从 Green 定理角度看问题,即认定 $P(x,y)=0$,$Q(x,y)=f(xy)/y$,则 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=f'(xy)$.从而可得

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D f'(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{1/2}^{1}\mathrm{d}x\int_{1/x}^{4x} f'(xy)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^{4/x} f'(xy)\mathrm{d}y \\
&= \int_{1/2}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\int_1^{4x^2} f'(t)\mathrm{d}t + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}\int_{x^2}^{4} f'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{1/2}^{1}\frac{f(4x^2)}{x}\mathrm{d}x - \int_{1/2}^{1}\frac{f(1)\mathrm{d}x}{x} + \int_1^2\frac{f(4)\mathrm{d}x}{x} - \int_1^2\frac{f(x^2)}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 \frac{f(t^2)}{t}\mathrm{d}t - f(1)\ln 2 + f(4)\ln 2 - \int_1^2\frac{f(x^2)\mathrm{d}x}{x} = 0 .
\end{aligned}$$

例 8.1.5 计算下列二重积分:

(1) $I = \iint_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是以 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 为顶点的三角形闭区域(图 8.5).

(2) $I = \iint_D y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 是由 Ox 轴与摆线 $L: x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$所围成的区域.

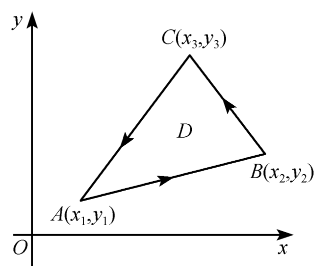


图 8.5

解 (1) 令 $P(x,y)=0$,$Q(x,y)=\frac{1}{3}x^3$,由 Green 公式得

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial D}\frac{1}{3}x^3\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_{\overline{AB}} x^3\mathrm{d}y + \frac{1}{3}\int_{\overline{BC}} x^3\mathrm{d}y + \frac{1}{3}\int_{\overline{CA}} x^3\mathrm{d}y .$$

应用曲线积分计算公式,得

$$\int_{\overline{AB}} x^3\mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2} x^3\,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\mathrm{d}x = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{(y_2-y_1)(x_2+x_1)(x_2^2+x_1^2)}{4} .$$

同理有

$$\int_{\overline{BC}} x^3\mathrm{d}y = \frac{1}{4}[(y_3-y_2)(x_3+x_2)(x_3^2+x_2^2)],$$

$$\int_{\overline{CA}} x^3\mathrm{d}y = \frac{1}{4}[(y_1-y_3)(x_1+x_3)(x_1^2+x_3^2)],$$

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{12}[(y_2-y_1)(x_2+x_1)(x_2^2+x_1^2) + (y_3-y_2)(x_3+x_2)(x_3^2+x_2^2)$$

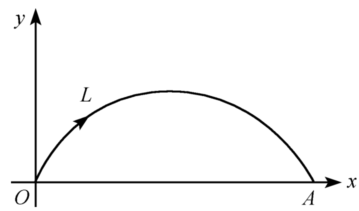


图 8.6

$$+(y_1-y_3)(x_1+x_3)(x_1^2+x_3^2)].$$

(2) 在 Green 公式

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

中,若取 $P(x,y)\equiv 0$,$Q(x,y)=xy^2$,则 $I=\int_{AO} Q\mathrm{d}y=-\int_L xy^2\mathrm{d}y$.由 L 的方程,可得(图 8.6)

$$I=-\int_0^{2\pi} a^4(t-\sin t)(1-\cos t)^2(1-\cos t)'\mathrm{d}t$$

$$=-a^4\int_0^{2\pi}[t\sin t-2t\sin t\cos t+t\sin t\cos^2 t-\sin^2 t+2\cos t\sin^2 t-\sin^2 t\cos^2 t]\mathrm{d}t$$

$$=-a^4\left(-2\pi+\pi-\frac{2}{3}\pi-\pi+0-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{35}{12}\pi a^4.$$

例 8.1.6　解答下列问题:

(1) 设 D 为区域,$u(x,y)\in C^{(2)}(D)$.试证明 $u(x,y)$是调和函数的充分必要条件为:对 D 内任一圆周 C(C 所围闭圆属于 D),都有$\int_C\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=0$.

(2) 在上题条件下,证明:$u(x,y)$是 D 上调和函数的充分必要条件为:对任意的 $P_0(x_0,y_0)\in D$,有

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,\quad 0<r<\mathrm{dist}(P_0,\partial D)=d.$$

(3) 设闭区域 D 是由有限条逐段光滑曲线围成,调和函数 $u(x,y)$在边界∂D 上为零,试证明它在 D 上恒为零.

(4) 设 L 是 $\mathbf{R}^2$ 中简单闭曲线,其所围的区域记为 D,$f(x,y)$在 $\overline{D}$ 上连续且是调和函数,试证明 $f(x,y)$在 L 上取到最大、最小值.

解　(1) 设 $u(x,y)$为 D 上调和函数,C 所围的闭圆记作 $\widetilde{D}\subset D$,则根据定理 8.1.2(1)可得

$$\int_C\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint_{\widetilde{D}}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

反之,任取$(x_0,y_0)\in D$,作圆周 C:$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varepsilon^2$,使 C 所围的闭圆 $\widetilde{D}\subset D$.由条件和积分中值定理得

$$0=\int_C\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint_{\widetilde{D}}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\Delta u(\xi,\eta)\pi\varepsilon^2,$$

其中点$(\xi,\eta)\in D$,上式消去 ε^2,然后令 $\varepsilon\to 0$,即得 $\Delta u(x_0,y_0)=0$.从而由(x_0,y_0)的任意性,故有 $\Delta u(x,y)\equiv 0$,即 $u(x,y)$为 D 上调和函数.

(2) 设 $u(x,y)$为 D 上调和函数,取圆周曲线 C:$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ $(0<$

$r<\mathrm{dist}(P_0,\partial D)=d$),则 C 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 为半径 $\boldsymbol{r}$ 的方向,故由上题(1)得

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\int_C \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{r}}\mathrm{d}s=0.$$

再由曲线积分计算公式得$\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta=0$.

在 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,$0\leqslant r\leqslant d-\varepsilon$ 上应用参变积分求导定理,可得

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta=0.$$

记含参变量 r 的积分为 $f(r)=\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta(0\leqslant r<d)$,则上式可改写成$\frac{\partial f(r)}{\partial r}=0\,(0\leqslant r\leqslant d-\varepsilon)$.

由此推出在$[0,d-\varepsilon]$上 $f(r)=\alpha$(常数).令 $\varepsilon\to 0$,得 $f(r)=\alpha(0\leqslant r<d)$,定出常数 $\alpha=f(0)=u(x_0,y_0)2\pi$,故

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\quad(0\leqslant r<d).$$

上式说明调和函数在圆心的值等于圆周上值的积分平均.

反之,若平均值性质成立,上式两边对 r 求导,得

$$0=\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

根据上面推导可得$\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\theta=0$,因而 $r\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\theta=\int_C\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$.再根据上题(1)知 $u(x,y)$是 D 上的调和函数.

(3) 在定理 8.1.2(2)中取 $v(x,y)=u(x,y)$,且 $u(x,y)$在边界上为零,得

$$\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.\quad \frac{\partial u}{\partial x}\equiv 0,\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0,(x,y)\in D.$$

由此知 $u(x,y)\equiv\alpha$(常数),且由 $u(x,y)$在边界上为零,故有 $u(x,y)\equiv 0$.

这说明调和函数在区域内的值,由它在边界上的值唯一确定.

(4) 依题设易知 $f(x,y)$在 $\overline{D}$ 上有最大、最小值.假定在 D 内点 $P_0(x_0,y_0)$上 $f(x,y)$取到最大值,则作以点 P_0 为圆心,$r>0$ 为半径在 D 内作圆周,根据上题(2)可得

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x_0,y_0)-f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)]\mathrm{d}\theta.$$

这说明 $f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)=f(x_0,y_0)$,故 $f(x,y)$在 D 上是一个常数,又由连续性可知 $f(x,y)$在 $\overline{D}$ 上是一个常数(函数).同理可知,当 $f(x_0,y_0)$为最小值时,f 在 $\overline{D}$ 上也是常数.由此即得所证.

例 8.1.7 解答下列问题:

(1) 设 L 是以点 (x_0, y_0) 为圆心,半径为 r 的圆周,L 所围区域记为 D.又 $\boldsymbol{F}(x, y) = \boldsymbol{i}P(x,y) + \boldsymbol{j}Q(x,y)$,且 $P, Q \in C^{(1)}(\overline{D})$.求 $I = \lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{|D|}\oint_L \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n}\rangle \mathrm{d}s$($\boldsymbol{n}$ 是 L 的外法线方向).

(2) 设 L 是简单闭曲线,$\boldsymbol{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 是任一单位向量,$\boldsymbol{n}$ 是 L 的单位法向量,试证明 $I = \oint_L \cos(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n})\mathrm{d}s = 0$.

(3) 设 L 是一简单闭曲线,其所围区域记为 D,$\boldsymbol{n}$ 是 L 之单位法向量,试证明 $I = \oint_L [x\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{i}) + y\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j})]\mathrm{d}s = 2|D|$,其中 $|D|$ 表示 D 的面积.

证明 (1) 记 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta)$,则依 Green 公式以及积分中值公式可知

$$I = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|D|}\oint_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\mathrm{d}s = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|D|}\iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{r\to 0}\left[\frac{\partial P(\xi,\eta)}{\partial x} + \frac{\partial Q(\xi,\eta)}{\partial y}\right] = \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

(2) 依题设知 $\cos(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}) = \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}\rangle$,故由 Green 公式得

$$I = \oint_L \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}\rangle \mathrm{d}s = \iint_D \left(\frac{\partial \cos\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \cos\beta}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

(3) 令 $F(x,y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$,则可得

$$I = \oint_L \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n}\rangle \mathrm{d}s = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2|D|.$$

例 8.1.8 解答下列问题:

(1) 设 L 是平面上一条简单光滑闭曲线,记所围区域为 D,$P(\xi, \eta)$ 为 L 上之动点,$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 是点 P 处 L 的外法向量,$\boldsymbol{r}$ 是从点 $P_0(x, y) \overline{\in} L$ 到 $P(\xi, \eta)$ 处的向径,试计算积分

$$I = u(x,y) = \int_L \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s, \quad r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}.$$

(2) 设 L 是从点 $A(1,0)$ 到 $B(0,2)$ 且位于第一象限内的简单光滑曲线,$\boldsymbol{n}$ 是 L 上的方向指向原点一侧的法向量,r 是 L 上动点到原点之距离,计算积分

$$I = \int_L \frac{\partial \ln r}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s.$$

(3) 设 L 是 $\mathbf{R}^2$ 中简单光滑闭曲线,记所围区域为 D.$u(x,y)$ 是 D 上调和函数 ($v = \ln r$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$)

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_L \left[u(\xi,\eta)\frac{\mathrm{d}\ln r}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}} - \ln r\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}s = u(x,y).$$

解 (1) 由 $\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = \langle \boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}\rangle / r$ 得知,I 可写为

$$I=\int_L \frac{(\xi-x)\cos\alpha+(\eta-y)\cos\beta}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\mathrm{d}s=\int_L \frac{(\xi-x)\mathrm{d}\eta-(\eta-y)\mathrm{d}\xi}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}=\int_L P\mathrm{d}\xi+Q\mathrm{d}\eta,$$

其中 $P=-(\eta-y)/[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]$,$Q=(\xi-x)/[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]$.

(i) 当点(x,y)在 L 的外部时,P 与 Q 在 D 上连续可微,且有

$$\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{\partial P}{\partial\eta}=\frac{(\eta-y)^2-(\xi-x)^2}{r^4},\quad I=0.$$

(ii) 当点(x,y)在 L 的内部时,则可适当选取 $R>0$,使得以(x,y)为圆心,R 为半径的圆周 C_R:$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=R^2$ 位于 L 内,且记 D:$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2\leqslant R^2$.从而根据 Green 公式可得

$$I=\frac{1}{R^2}\int_{C_R}(\xi-x)\mathrm{d}\eta-(\eta-y)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{R^2}\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.$$

(2) 设 L 如图 8.7 所示,再作曲线段 L_1,L_2,L_3 如图(L_2 是以原点为心 R 为半径且位于 L 内侧之圆弧).且与 L 组成闭曲线 C,其所围区域记为 D.注意到 $\Delta\ln r=0$,故根据 Green 公式可知$\iint_D \Delta\ln r\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.因为在 L_1,L_3 上向量$\left(\frac{\partial\ln r}{\partial x},\frac{\partial\ln r}{\partial y}\right)$与 $\boldsymbol{n}$ 向量正交,所以有$\int_{L_1}\frac{\partial\ln r}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=0=\int_{L_3}\frac{\partial\ln r}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$.从而有

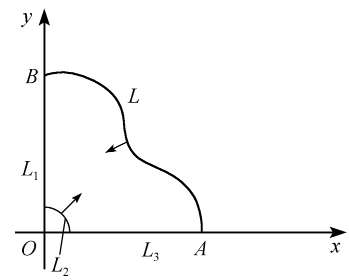


图 8.7

$$\int_C \frac{\partial\ln r}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint_D \Delta\ln r\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\int_L \frac{\partial\ln r}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\int_{L_2}\frac{\partial\ln r}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\int_{L_2}\left\langle\frac{\partial\ln r}{\partial x},\frac{\partial\ln r}{\partial y}\right\rangle\left\langle\frac{x}{R},\frac{y}{R}\right\rangle\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{R}\int_{L_2}\mathrm{d}s=\frac{\pi}{2}.\quad(\text{令 } R\to 0^+,\text{仍有 } I=\pi/2)$$

(3) 作位于 D 内的以(x,y)为圆心,R 为半径的圆周 C_R:$(\xi-x)^2+(\eta-y)^2=R^2$(图 8.8).注意到 $\Delta u=0$,$\Delta\ln r=0$,则得(定理 8.1.2(3))

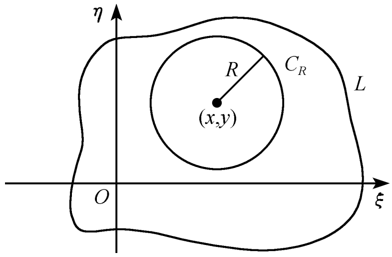


图 8.8

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\left[u\frac{\partial\ln r}{\partial\boldsymbol{n}}-\ln r\cdot\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{L+C_R}\left[u\frac{\partial\ln r}{\partial\boldsymbol{n}}-\ln r\cdot\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint_{\tilde{D}}[u\cdot\Delta\ln r-\ln r\cdot\Delta u]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=0$$

($\widetilde{D}$ 为 L 内 C_R 外之区域).从而再应用中值公式,我们有(在 C_R 上,$\dfrac{\partial \ln r}{\partial \boldsymbol{n}}=\dfrac{\mathrm{d}\ln r}{\mathrm{d}r}=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{R}$,$\ln r=\ln R$)

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{C_R}\left[u\frac{\partial \ln r}{\partial \boldsymbol{n}}-\ln r\cdot\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{R}\int_{C_R}u(\xi,\eta)\mathrm{d}s-\ln R\int_{C_R}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s\right]$$

$$=u(\xi',\eta')-R\ln R\cdot\frac{\partial u(\xi',\eta')}{\partial \boldsymbol{n}}\to u(x,y)\quad(R\to 0).$$

例 8.1.9　证明下列命题:

(1) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_L\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^{1/2}}=0$,$L:x^2+y^2=R^2$.

(2) 设 $D:x^2+y^2\leqslant a^2\ (a>0)$,$f(x,y)$在 D 上有连续偏导数,且有 $f(x,y)=0\ ((x,y)\in\partial D)$,则

$$|I|\leqslant\frac{\pi a^3}{3}\max_{(x,y)\in D}\left\{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}\right\}\quad\left(I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$$

(3)(Poincaré 不等式)设 D 是由简单光滑闭曲线 L 围成的区域,$f(x,y)$在 $\overline{D}$ 上有连续偏导数,且有 $f(x,y)=0\ ((x,y)\in L)$,则

$$\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\max_D\{x^2+y^2\}\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明　(1) 应用积分不等式

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant M\cdot l\quad\left(M=\max_{(x,y)\in L}\{\sqrt{P^2+Q^2}\},l\text{ 是曲线 }L\text{ 之弧长}\right).$$

在本题中,$P=y/(x^2+xy+y^2)^{1/2}$,$Q=-x/(x^2+xy+y^2)^{1/2}$,而且 $x^2+xy+y^2\geqslant(x^2+y^2)/2$,故可得

$$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{8}{R^2}\cdot 2\pi R=\frac{16\pi}{R}\to 0\quad(R\to+\infty).$$

(2) 注意到 $f(x,y)=0\ ((x,y)\in\partial D)$,则取 $g(x,y)=x=y$,由分部积分公式可知

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从而又得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad ①$$

$$|I|\leqslant\frac{1}{2}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r\right)\max_{(x,y)\in D}\left\{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\right\}.$$

(3) 在上题①式中以 f^2 代 f,则得

$$\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D\left[xf(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+yf(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,|f(x,y)|\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\max_{(x,y)\in D}\{\sqrt{x^2+y^2}\}\cdot\iint_D|f(x,y)|\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant\max_{(x,y)\in D}\{\sqrt{x^2+y^2}\}\left[\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2}\left[\iint_D\left\{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^{1/2}.$$

在上式两端消去 $\iint_D f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 即可得证.

例 8.1.10 试证明下列命题:

(1) 设 $L\subset\mathbf{R}^2$ 是逐段光滑的闭曲线,其所围区域记为 D. $u(x,y)$,$v(x,y)$在 $\overline{D}$ 上二次连续可微,且有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\quad((x,y)\in D).$$

若 $u(x,y)=v(x,y)((x,y)\in L)$,则 $u(x,y)=v(x,y)((x,y)\in D)$.

(2) 设 $f(x,y)$,$g(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上二次连续可微,且 $f^2(x,y)$,$g^2(x,y)$,$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2$,$\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2$,$\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2$,$\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)^2$ 均在 $\mathbf{R}^2$ 上可积,则

$$\iint_{\mathbf{R}^2}f\cdot\Delta g\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\mathbf{R}^2}g\cdot\Delta f\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 设 $\lambda,a\in\mathbf{R}^1$ 且 $a<0$,$B\subset\mathbf{R}^2$ 是半径为 1 的开圆,G 是包含闭圆 $\overline{B}$ 的连通开集. $u(x,y)$是 G 上任意次可微的函数,且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u\ ((x,y)\in B),\quad\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=au\ ((x,y)\in\partial B)$$

$\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\text{是在边界}\partial B\text{上单位外法方向导数}\right)$. 若 $u(x,y)\neq0((x,y)\in B)$,则 $\lambda<0$.

(4) 设 B: $x^2+y^2<1$,$u\in C^{(2)}(\overline{B})$,$u(x,y)\neq0$. 若 $u(x,y)|_{\partial B}=0$,$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u$,则

$$\iint_B|\operatorname{grad}\Delta u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\lambda\iint_B u^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

证明　(1) 令 $w=u-v$，则 $w(x,y)=0\,((x,y)\in L)$ 且 $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2=0$. 由此可知

$$0=\int_L w\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}\mathrm{d}s-\iint_D w\cdot\Delta w\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这说明 $\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial w}{\partial y}=0\,((x,y)\in D)$，即在 D 上 $w(x,y)=C$(常数). 注意到 $w(x,y)=0$ $((x,y)\in L)$ 且 $w(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上连续，故有 $C=0$，即 $u(x,y)=v(x,y)\,((x,y)\in\overline{D})$.

(2) 根据 Green 定理的推论，对一切 $R>0$ 均有($B(0,R)$ 表示开圆)

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)}[f\,\Delta g-g\Delta f]\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{\partial B(0,R)}\left[f\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}-g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}s\\&=\int_{\partial B(0,R)}\left[f\frac{\partial g}{\partial x}-g\frac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{d}y+\left[g\frac{\partial f}{\partial y}-f\frac{\partial g}{\partial y}\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}\qquad ①$$

对上式中估计一个积分式，例如

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\partial B(0,R)}f(x,y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y\right|\\&\leqslant\int_0^{2\pi}|f(R\cos\theta,R\sin\theta)|\left|\frac{\partial g(R\cos\theta,R\sin\theta)}{\partial x}\right||R\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta\triangleq A(R),\end{aligned}$$

从而可知

$$\begin{aligned}&\int_{B(0,R)}\left|f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot\frac{\partial g(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial x}\right|r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^R A(r)r\mathrm{d}r\leqslant\left(\iint_{\mathbf{R}^2}f^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}\left(\iint_{\mathbf{R}^2}\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

这说明存在数列 $\{R_n\}$：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=+\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}A(R_n)=0$.

式①中其它三个积分也有类似估计. 总之我们有

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\iint_{B(0,R)}[f\Delta g-g\Delta f]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\right..$$

由此即得所证.

(3) 在公式(根据题设)

$$\iint_B u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\lambda u\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

中，用表示式 $u\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\nabla\cdot(u\nabla u)-\|\nabla u\|^2$ 替换，可得

$$\iint_B\nabla\cdot(u\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_B\|\nabla u\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_B\lambda u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

$\left(\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right),\|\nabla u\|=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}\right.$;设 $\boldsymbol{F}=(P,Q)$,则 $\left.\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}.\right)$

应用 Green 公式可知

$$\iint_B \nabla\cdot(u\nabla u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial B}u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\int_{\partial B}au^2\mathrm{d}s.$$

从而我们有

$$a\int_{\partial B}u^2\mathrm{d}s-\iint_B\|\nabla u\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\lambda\iint_B u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

注意到 $u(x,y)\not\equiv 0((x,y)\in B)$,故有$\iint_B u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$.如果 $u(x,y)=C$(常数,$(x,y)\in B$),那么由$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=au((x,y)\in B)$可知 $u(x,y)=0$.这说明 $\nabla u\not\equiv 0((x,y)\in B)$,当然有$\iint_B\|\nabla u\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$.这样,必有 $\lambda<0$.

注 由 $u\cdot\nabla u=(uu_x',uu_y')$,$\nabla\cdot u\nabla u=(u_x')^2+uu_{x^2}''+(u_y')^2+uu_{y^2}''$ 可知,$\nabla\cdot u\nabla u-\|\nabla u\|^2=u(u_{x^2}''+u_{y^2}'')=\lambda u^2$.

(4) 在公式$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}[P\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+Q\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})]\mathrm{d}s$ 中,以 uu_x'代 P,uu_y'代 Q,则上式右端为 0,又有

$$上式左端=(u_x')^2+(u_y')^2+u(u_{x^2}''+u_{y^2}'')=|\mathrm{grad}\Delta u|^2+\lambda u^2.$$

由此即可得证.

例 8.1.11 试证明下列命题:

(1) 已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$,$L$ 为 D 的正向边界,则

(i) 令 $I=\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x$,$J=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$;$I=J$.

(ii) $I=\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi^2$.

(2) 设 $P(x,y)$,$Q(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有二阶连续偏导数,若对以任一点$(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$ 为中心、任意的 $r>0$ 为半径所作的上半圆周 L_r,均有

$$I_r=\int_{L_r}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

则 $P(x,y)\equiv 0$,$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\equiv 0$.

(3) 设 $F(x,y)$在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上可积,若对任意的$(x,y)\in D$,均有(D_r:$(u-x)^2+(v-y)^2<r^2\subset D$)

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{D_r}F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则 $F(x,y)$在 D 上具有连续偏导数.

证明　(1)(i)根据 Green 公式,可得

$$I=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad J=\iint_D(\mathrm{e}^{-\sin y}+\mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到区域 D 中的点关于直线 $y=x$ 对称,故上两式右端之积分相等,即 $I=J$.

(ii)由(i)知(注意 $\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\geqslant 2$)

$$I=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 2\pi^2.$$

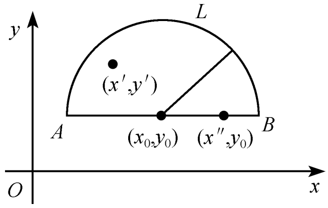


图 8.9

(2)(i)如图 8.9 所示,记 L_r 与 $\overline{AB}$所围半圆区域为 Σ_r,则可得(Green 公式)

$$\int_{\overline{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\overline{AB}+L_r}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{\Sigma_r}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又由中值公式可知($(x',y')\in\Sigma_r$)

$$\iint_{\Sigma_r}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big|_{(x',y')}\cdot\frac{\pi r^2}{2}.$$

(ii)因为对$\overline{AB}$上积分取中值公式可知

$$\int_{\overline{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{x_0-r}^{x_0+r}P(x,y_0)\mathrm{d}x=P(x'',y_0)\cdot 2r$$

(其中 $x''\in\overline{AB}$),所以联系到(i)中结论,我们有

$$\left(\frac{\partial Q(x',y')}{\partial x}-\frac{\partial P(x',y')}{\partial y}\right)\frac{\pi r}{2}=P(x'',y_0)\cdot 2.\qquad ①$$

令 $r\to 0^+$,则上式左端趋于 0,而 $P(x'',y_0)\to P(x_0,y_0)$.故知 $P(x_0,y_0)=0$.从而又知 $P(x,y)=0((x,y)\in\mathbf{R}^2)$.这样,再看式①,由 $P(x'',y_0)=0$ 导致

$$0=\frac{\partial Q(x',y')}{\partial x}-\frac{\partial P(x',y')}{\partial y}=\frac{\partial Q(x',y')}{\partial x}.$$

再令 $r\to 0^+$,即得$\dfrac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial x}=0$.由$(x_0,y_0)$点的任意性,我们有$\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\equiv 0$.

(3)令$D_r=\{(u,v):(u-(x+h))^2+(v-(y+k)^2<r^2\}\subset D$,则依题设仍有

$$F(x+h,y+k)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{D_r}F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

从而可得($D' = D_r \backslash D_r$, $D'' = D_r \backslash D_r$)

$$F(x+h, y+k) - F(x,y) = \frac{1}{\pi r^2}\left[\iint_{D'} - \iint_{D''}\right] F(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

依题设还知,存在 $M>0$,使得 $|F(u,v)| \leqslant M \quad ((u,v) \in D_r \cup D_r)$.

注意到当 $h,k \to 0$ 时,有 $\sqrt{h^2+k^2} \to 0$,故知 D',D''之面积趋于0.因此可以得到 $F(x+h,y+k)-F(x,y) \to 0 (h,k \to 0)$,这说明 $F \in C(D)$.令

$$G(x,y) = \int_{x_0}^{x} F(t,y)\mathrm{d}t \quad ((x_0,y),(x,y) \in D),$$

则$\dfrac{\partial G(x,y)}{\partial x} = F(x,y)$,即 $G'_x(x,y)$是二元连续函数,且有

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{D_r} \frac{\partial G(u,v)}{\partial u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

记 D_r 之圆周曲线为 L_r,则由 Green 公式知

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{L_r} G(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} G(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) r\cos\theta \mathrm{d}\theta.$$

作积分号下求导运算,我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} &= \frac{1}{\pi r^2}\int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial x}(x+r\cos\theta, y+r\sin\theta) r\cos\theta \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi r^2}\int_{L_r} F(u,v)\mathrm{d}s = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{D_r} \frac{\partial F(u,v)}{\partial u}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

这说明$\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$连续.类似地可得$\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$连续.证毕.

8.2 Gauss 公 式

定理 8.2.1 设 Ω是空间的一个有界闭区域,$\partial\Omega$是由有限张分块光滑的双侧曲面组成,并取外法线方向.函数 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$在 Ω上连续并有连续偏导数,则

$$\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

或记为$\displaystyle\iint_{\partial\Omega}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

在物理上,称在空间给定的数值函数 $u(x,y,z)$为数量(纯量)场,而称 $\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$为向量场,其中 $P = P(x,y,z)$是数值函数(Q,R同).

设 $\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$在空间区域 Ω上定义,Σ是 Ω内的一个双侧曲面,并取定其单位法向量为 $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,则曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

可解释为 $\boldsymbol{F}$ 通过定向曲面的流量．又称

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

为 $\boldsymbol{F}$ 的散度．由此，Gauss 公式可写成向量形式：

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

注　对给定的向量场 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$，还称满足方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{P(x,y,z)}=\dfrac{\mathrm{d}y}{Q(x,y,z)}=\dfrac{\mathrm{d}z}{R(x,y,z)}$ 的曲线为该场的向量线．

例 8.2.1　计算下列面积分 I：

(1) $I=\displaystyle\iint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是

(i) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 外侧面法线方向．

(ii) $x^2+y^2\leqslant z^2\ (z<h)$ 的边界面外侧方向．

(2) $I=\displaystyle\iint_{\Sigma}(x^2+y+z)\mathrm{d}S$，$\Sigma$：单位球外侧面外法线方向．

解　(1) (i) 记 Ω 是 Σ 所围球体，则由 Gauss 公式知

$$I=\iiint_{\Omega}2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

求此积分，可用密度为 1 的球的重心公式，注意 Ω 的重心为 (a,b,c)，从而得

$$\iiint_{V}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=a\cdot\frac{4}{3}\pi R^3,\quad\iiint_{V}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=b\cdot\frac{4}{3}\pi R^3,\quad\iiint_{V}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=c\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

因此，$I=\dfrac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$．

(ii) 由于曲面 Σ 不封闭，再作 Σ_1：平面 $z=h$ 被曲面 $x^2+y^2\leqslant z$ 截下部分，并记 Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围之立体，我们有(由 Gauss 公式，注意对称性)

$$\left(\iint_{\Sigma}+\iint_{\Sigma_1}\right)x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^h z\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi h^4}{2}.$$

从而得到

$$I=\frac{\pi h^4}{2}-\iint_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi h^4}{2}-\iint_{\Sigma_1}h^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi h^4}{2}-\pi h^4=-\frac{\pi h^4}{2}.$$

(2) 注意到 Σ 的单位外法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，故若令 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)=(x,1,1)$，则(记 Ω：$x^2+y^2+z^2\leqslant1$)

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=x^2+y+z,\quad \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1,$$

$$I=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{3}.$$

例 8.2.2 计算下列面积分 I:

(1) $I=\iint_{\Sigma}xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+zx^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$:$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$外法向.

(2) $I=\iint_{\Sigma}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$是$z=\mathrm{e}^y(0\leqslant y\leqslant a)$绕$z$轴旋转所得曲面的下侧面外法向.

(3) $I=\iint_{\Sigma}xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\mathrm{d}S$,$\Sigma$:$x^2+y^2+z^2=a^2$外侧面法向.

(4) $I=\iint_{\Sigma}\rho\mathrm{d}S$,$\Sigma$:$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$外侧面法向;$\rho=\rho(x,y,z)$是从原点到$\Sigma$上点$(x,y,z)$之切平面的距离.

解 (1) 记Ω为该椭球体,用 Gauss 公式得(变换 $x=aX,y=bY,z=cZ$)

$$I=\iiint_{\Omega}(y^2+z^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\quad(\text{记 }\widetilde{\Omega}:X^2+Y^2+Z^2\leqslant1)$$

$$=\iiint_{\Omega}(a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2)abc\mathrm{d}X\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z.$$

由对称性可知

$$I=abc\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iiint_{\Omega}(X^2+Y^2+X^2)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z$$

$$=abc\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iiint_{r^2\leqslant1}r^2\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi abc(a^2+b^2+c^2)}{15}.$$

(2) 记平面 $z=\mathrm{e}^a$ 被 Σ 切割部分为 Σ_1,而由 Σ与 Σ_1 组成闭曲面记为 Σ,其所围立体记为 Ω.因为

$$P(x,y)=4zx,\quad Q(x,y)=-2zy,\quad R(x,y)=1-z^2,$$

所以$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=4z-2z-2z=0$.从而可得(Gauss 公式)

$$\iint_{\Sigma}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

由此可知

$$I=\left\{\iint_{\Sigma}-\iint_{\Sigma_1}\right\}4zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{\Sigma_1}(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2 .$$

(3) 注意到法向量余弦为 $\cos\alpha=x/a,\cos\beta=y/b,\cos\gamma=z/c$,则

$$I=\iint_{\Sigma}(ay^3z^3\cos\alpha+bz^3x^3\cos\beta+cx^3y^3\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=a\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial(y^3z^3)}{\partial x}+\frac{\partial(z^3x^3)}{\partial y}+\frac{\partial(x^3y^3)}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

其中 Ω是 Σ 所围的立体.

(4) 设 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是 Σ外侧单位法向量,则 $\rho=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$(向量点乘).由 Gauss 公式可得

$$I=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\cdot\frac{4\pi}{3}abc=4\pi abc .$$

例 8.2.3　计算下列面积分 I:

(1) $I=\iint_{\Sigma}(x^2-y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$:$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1(z\geqslant0)$椭球面外法向.

(2) $I=\iint_{\Sigma}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$是由 yOz 平面上曲线 $z=\sqrt{y-1}(1\leqslant y\leqslant3)$绕 y 轴旋转一周形成的曲面,其法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\pi/2$.

(3) $I=\iint_{\Sigma}(x+y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2y+\sin(z+x)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z+\mathrm{e}^{x+y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$:$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的表面外法向.

(4) $I=\iint_{\Sigma}(x+\cos y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+\cos z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+\cos x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$:$x+y+z=\pi$ 在第一象限部分的表面外法向.

(5) $I=\iint_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,

(i) Σ是正方体:$|x|=2,|y|=2,|z|=2$ 侧面外法向.

(ii) Σ是曲面 $x^2/4+y^2/9=1-z(z\geqslant0)$上侧面外法线方向.

解　(1) 记平面 xOy 上的圆盘 $x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant1$ 为 Σ,且令 Σ与 Σ_1 所围立体为 Ω,则由 Gauss 公式可知

$$J=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}(x^2-y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

易知 $\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0=\iiint_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，故可得

$$J=2\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint_{\Sigma_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{c\sqrt{1-x^2-y^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=c^2\iint_{\Sigma_1}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi abc^2-\frac{\pi}{2}abc^2=\frac{\pi abc^2}{2}.$$

由此导出

$$\iint_{\Sigma_1}(x^2-y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}a^3b\int_0^1r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{a^3b\pi}{4}.$$

从而有 $I=\pi abc^2/2-a^3b\pi/4$.

(2) 作 Σ 是由方程 $x^2+z^2\leqslant 2, y=3$ 所确定的有向曲面，其法线方向如图 8.10 示，且记由 Σ 与 Σ_1 围成之立体为 Ω，则由 Gauss 公式知

$$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}(8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}(8y+1-4y-4y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_1^3(y-1)\mathrm{d}y=2\pi.$$

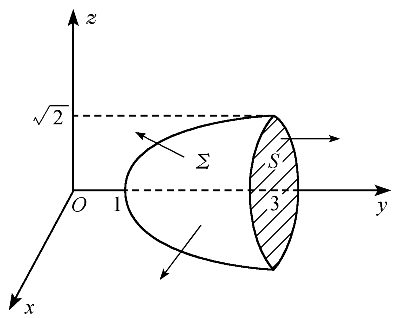


图 8.10

这说明 $I=2\pi-\iint_{\Sigma_1}2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\pi+\iint_{x^2+z^2\leqslant 2}16\mathrm{d}z\mathrm{d}x=34\pi$.

(3) 记 Ω: $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|\leqslant 1$，则由 Gauss 公式知 $I=\iiint_{\Omega}(1+2+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

作变量替换 $u=x-y+z, v=y-z+x, w=z-x+y$，则 Σ 变为 $\widetilde{\Sigma}$: $|u|+|v|+|w|=1$, $|J|=4$. 从而有

$$I=6\iiint_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1}\frac{1}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=6\cdot\frac{1}{4}\cdot 8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=2.$$

(4) 记 $J=\iint_{\Sigma}\cos y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则

$$I=\iint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+J\quad(\text{由 Gauss 公式})$$

$$= 3\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3}\right) \cos y\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cos z\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（Ω是 Σ与三个坐标平面所围区域；Σ_1 是 Σ位于平面 xOy 上的投影，Σ_2 与 Σ_3 类似）

$$= 3\cdot\frac{\pi^3}{6} + 3\iint_{\Sigma_1} \cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi^3}{2} + 3\int_0^{\pi}\mathrm{d}y\int_0^{\pi-y}\cos x\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{2} + 6.$$

(5) (i) 令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则由 $P=x/r^3$，$Q=y/r^3$，$R=z/r^3$，易知

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,\quad (x,y,z)\neq(0,0,0). \qquad ①$$

因此，作以原点为心，半径为 1 的球面并记为 Σ_1，Σ和 Σ_1 所围立体记为 Ω，则依据 Gauss 公式可知

$$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1^-} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \iiint_{\Omega} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

从而，记 Σ_1 所围球体为 Ω_1，我们有(注意，上式中 Σ_1^- 的法向是内法线方向)

$$I = \iint_{\Sigma_1^+} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega_1} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4\pi.$$

(ii) 记 Σ_1^- 是以原点为心，半径为 r(r 适当小)的上半球面(内法向)，Σ_2^- 是平面 xOy 上区域(法向量朝下)

$$\{(x,y): x^2+y^2\geqslant r^2,\ x^2/4+y^2/9\leqslant 1\},$$

又记 Ω为 Σ与 Σ_1^-、Σ_2^- 所围立体，则由式①可知

$$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1^-\cup\Sigma_2^-} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \iiint_{\Omega} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

由此得到

$$I = 0 - \left(\iint_{\Sigma_2^-} + \iint_{\Sigma_1^-}\right) \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -I_1 - I_2.$$

注意到在 Σ_2^- 上 $z=0$，$\mathrm{d}z=0$，故有 $I_1=0$. 从而我们有

$$I = -I_2 = \frac{1}{r^3}\iint_{\Sigma_1^+} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(Σ_1^+ 表示外法向的上半球面). 再添平面 xOy 上的圆盘 Σ_3^-：$x^2+y^2\leqslant r^2$，并记 Σ_1^+ 与 Σ_3^- 所围半球体为 $\widetilde{\Omega}$，则

$$I = \frac{1}{r^3}\left\{\iint_{\Sigma_1^+\cup\Sigma_3^-} - \iint_{\Sigma_3^-}\right\} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{r^3}\iiint_{\widetilde{\Omega}} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 0 = \frac{3}{r^3}\left(\frac{1}{2}\,\frac{4}{3}r^3\pi\right) = 2\pi.$$

例 8.2.4　解答下列问题：

(1) 设一光滑闭曲面 Σ 在球坐标系中有表示式 $r=r(\theta,\varphi)$,记 Σ 所围立体 Ω 的体积为 V,试证明

$$I=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma} r\cos\psi \mathrm{d}S=V,\quad \psi\text{是}\Sigma\text{的外法向量与向径所夹之角}.$$

(2) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是由简单光滑闭曲面 Σ 所围之立体,则

(i) $I=\iiint_{\Omega}\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S$, $(x,y,z)\overline{\in}\,\bar{\Omega}$,其中 $\boldsymbol{r}=(\xi-x,\eta-y,\zeta-z)$, $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$, $\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位外法线向量.

(ii) 记以点 $P=(x,y,z)$ 为中心 ε 为半径的球面为 Σ_ε,其闭球体为 Ω_ε,则

$$I=\lim_{\varepsilon\to0^+}\iiint_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S,\quad (x,y,z)\in\Omega.$$

(iii) 计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S$(Gauss 积分).

(3) 计算 $I=\iint_{\Sigma}\left(\frac{xz\cos\alpha}{a^2}+\frac{zy\cos\beta}{b^2}+\frac{z^2\cos\gamma}{c^2}\right)\mathrm{d}S$,$\Sigma$ 是椭球面 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ 的上半部(外法向).

(4) 设 $\mathbf{R}^3$ 中曲面 Σ 由方程

$$\begin{cases}x=a\cos u\cdot\cos v+b\sin u\cdot\sin v,\\ y=a\cos u\cdot\sin v-b\sin u\cdot\cos v,\\ z=c\sin u,z=\pm c\quad(a>0,b>0)\end{cases}$$

给出,试求 Σ 所围立体 Ω 的体积 V.

解 (1) 由 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$知

$$\cos\psi=\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{x}{r}\cos\alpha+\frac{y}{r}\cos\beta+\frac{z}{r}\cos\gamma,$$

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{3}\iiint_{\Omega}(1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=V.\end{aligned}$$

(2) (i) 因为 $P(x,y,z)\overline{\in}\,\bar{\Omega}$,所以由 Gauss 公式知

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S&=\iint_{\Sigma}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}\mathrm{d}S\\&=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\\&=\iiint_{\Omega}\frac{2}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

由此即可得证.

(ii) 对 $P\in\Omega$,则有

$$\left\{\iint_{\Sigma}-\iint_{\Sigma_\varepsilon}\right\}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=2\iiint_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}\frac{1}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta.$$

注意到在 Σ_ε 上,$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=1$,故可得$\iint_{\Sigma_\varepsilon}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=4\pi\varepsilon^2\to 0(\varepsilon\to 0^+)$.由此即可得证.

(iii) 当点$(x,y,z)\overline{\in}\Omega$时,则由 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}$知

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\xi-x}{r^3}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r^3}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r^3}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\&=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\\&=\iiint_{\Omega}\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=0.\end{aligned}$$

当点$(x,y,z)\in\Omega$时,则记以点(x,y,z)为球心、ε为半径之球面为 Σ_ε,球体记为 Ω_ε,我们有

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_\varepsilon}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}0\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=0.\quad I=\iint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Sigma_\varepsilon}\mathrm{d}S=4\pi.$$

(3) 补上该椭球面底面 Σ_1^-(法向朝下),并记 Σ与 Σ_1^- 所围立体为 Ω,则可得

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1^-}\left(\frac{xz\cos\alpha}{a^2}+\frac{zy\cos\beta}{b^2}+\frac{z^2\cos\gamma}{c^2}\right)\mathrm{d}S\\&=\iiint_{\Omega}\left(\frac{z}{a^2}+\frac{z}{b^2}+\frac{2z}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}\right)\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

注意到积分

$$\iint_{\Sigma_1^-}z\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{b^2}+\frac{z\cos\gamma}{c^2}\right)\mathrm{d}S=0,$$

故知 $I=\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{c^2}\right)\displaystyle\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

(4) 设 $c>0$,则 Σ在平面 xOy 上之投影为

$$x^2+y^2\leqslant a^2,\quad u=0,\quad 0\leqslant v\leqslant 2\pi.$$

如果 $z=\pm c$,那么 $u=\pm\pi/2$,$x^2+y^2\leqslant b^2$,$0\leqslant v\leqslant 2\pi$.因此,$\Omega$的上、下底均是半径为 b 之圆.从而可知

$$\Omega=\Phi(D),\quad \Phi(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v));$$
$$D=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2:-\pi/2\leqslant u\leqslant\pi/2,0\leqslant v\leqslant 2\pi\}.$$

若 $a^2>b^2$,则当 $z>0$ 时,在 Σ的侧面之上半部每一点上的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 是与 Oz 轴成锐角的单位向量 $\boldsymbol{k}$;

若 $a^2<b^2$,则为钝角.我们有($\boldsymbol{r}=(x,y,z)$是点 $P(x,y,z)$的向径)

$$V=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.\quad(\text{Gauss 公式})$$

若记 Σ_1,Σ_2 是 Ω的上底面、下底面,Σ_3 是 Σ的侧面,则可得

$$V=\frac{1}{3}\left(\iint_{\Sigma_1}+\iint_{\Sigma_2}+\iint_{\Sigma_3}\right)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

注意到:在 Σ_1 上,有 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$,$\boldsymbol{r}=(x,y,c)$,$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=c$;在 Σ_2 上,有 $\boldsymbol{n}=(0,0,-1)$,$\boldsymbol{r}=(x,y,-c)$,$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=c$,故可知

$$\iint_{\Sigma_1}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=c\iint_{x^2+y^2\leqslant b^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi b^2c.$$

为计算在 Σ_3 上的面积分,需要 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦:首先有

$$C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=(b^2-a^2)\sin u\cdot\cos u\quad\left(0\leqslant u\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

其次,若 $a^2>b^2$,则 $C<0$,由 $\cos\gamma>0$ 导出 $\cos\gamma=-C/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$;

若 $a^2<b^2$,则 $C>0$,由 $\cos\gamma<0$ 导出 $\cos\gamma=-C/\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

应用等式 $\mathrm{d}S=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,我们有

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_3}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S&=-\iint_{D}[x(u,v)A+y(u,v)B+z(u,v)C]\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\\&=\iint_{D}\{c[x^2(u,v)+y^2(u,v)]\cos u+(a^2-b^2)z(u,v)\sin u\cdot\cos u\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=a^2c\iint_{D}\cos u\mathrm{d}u\mathrm{d}v=a^2c\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos u\mathrm{d}u\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}v=4\pi a^2c\end{aligned}$$

(其中 $A=\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}=-c\cdot x(u,v)\cos u$,$B=\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}=-cy(u,v)\cos u$).

综合上述结果,最后得

$$c>0,\quad V=\frac{4}{3}\pi a^2c+\frac{2}{3}\pi b^2c=\frac{4}{3}\pi c\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right);$$

$$c<0,\quad V=-\frac{4}{3}\pi c\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right).$$

即 $V=(4/3)\pi|c|(a^2+b^2/2)$.

例 8.2.5 试证明下列命题:

(1) 设由光滑闭曲面 $\Sigma\in\mathbf{R}^3$ 围成立体 Ω,$u(x,y,z)$ 与 $v(x,y,z)$ 在 Ω上有连续二阶偏导数,则

$$\text{(i)}\iiint\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma} uv\cos\alpha\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \qquad ①$$

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 Σ 的单位外法线向量(下同).

$$\text{(ii)}\iiint\limits_{\Omega} u\Delta v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\text{(iii)}\iiint\limits_{\Omega}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\mathrm{d}\boldsymbol{n}} & \dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}S. \qquad ②$$

(2) 设 Ω 是光滑闭曲面 Σ 围成的三维立体,函数 $u(x,y,z)$ 在 Ω 上有二次连续偏导数,且 $\Delta u=0$,则

$$\text{(i)}\ u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left[u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是从点 $(x,y,z)\in\Omega$ 到 Σ 上点 (ξ,η,ζ) 所引的向径,$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$,$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位外法线向量.

(ii) 若 Σ 是以点 (x,y,z) 为中心 $R>0$ 为半径之球面,则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma} u(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}S.$$

(3) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是光滑曲面 Σ 围成的闭立体,$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位外法线向量,$u(x,y,z)$在 Ω 上有连续二阶连续偏导数,则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

证明 (1) (i) 在 Gauss 公式

$$\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

中,取 $P=uv$,$Q=R=0$,即得式①.(可视为三维分部积分公式)

(ii) 类似于式①,还可得另两式:

$$\iiint\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma} u\cdot v\cos\beta\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma} uv\cos\gamma\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

在上面三个等式中,各以 $\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial z}$ 代 v,再相加即得可得证.

$$\iiint\limits_{\Omega} u\Delta v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \qquad ③$$

注 1 在上式中令 $u=v$,则得

$$\iint\limits_{\Sigma} u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}\left[u\Delta u+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

注 2 若 $\Delta u=\Delta v=0$,则由式③可得(在式③中 u 与 v 对换得另一式,再相减)

$$\iint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S.$$

又若令 $v\equiv 1$,则 $\iint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0$.再令 $u=v$,又有

$$\iint_{\Sigma} u\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(iii) 在(ii)式中调换 u 与 v 的位置,可得

$$\iiint_{\Omega} v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S-\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

两式相减我们有

$$\iiint_{\Omega}(v\Delta u-u\Delta v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

(2) (i) 在式②中,取 $v=1/r$,又在 Ω 内作以 (x,y,z) 为中心 $\rho>0$ 为半径的闭球面 Σ_ρ,而记 Σ 与 Σ_ρ 所围立体为 $\widetilde{\Omega}$,易知

$$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S=\iiint_{\widetilde{\Omega}}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

注意到在 Σ_ρ 上,有 $\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}=-\frac{\partial(1/r)}{\partial r}\Big|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho^2}$,故由上式可推得

$$\iint_{\Sigma_\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-\frac{u}{\rho^2}\right)\mathrm{d}S=-\iint_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

但是 $\iint_{\Sigma}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=0$,以及中值等式

$$\iint_{\Sigma_\rho}\frac{u}{\rho^2}\mathrm{d}S=\frac{u(x',y',z')}{\rho^2}4\pi\rho^2=4\pi u(x',y',z'),$$

从而我们有

$$u(x',y',z')=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left(r\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S.$$

又注意到等式

$$\begin{aligned}\frac{\partial(1/r)}{\partial \boldsymbol{n}}&=\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{1}{r^2}\Delta(r)\cdot\boldsymbol{n}\\&=-\frac{1}{r^2}\frac{1}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n})=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{r}\|}=-\frac{1}{r^2}\cos(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}),\end{aligned}$$

即得所证.

(ii) 此时,由(i)知(参见第(3)题)

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma}\left[u(\xi,\eta,\zeta)\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r})}{R^2}+0\right]\mathrm{d}S.$$

(3) 记 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,则得 $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.从而由 Gauss 公式知

$$\iint_{\Sigma}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

例 8.2.6 解答下列问题:

(1) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是由简单光滑闭曲面 Σ 围成的区域,$u(x,y,z)$在 $\overline{\Omega}$ 上有连续二阶偏导数,且是调和函数:$\Delta u=0((x,y,z)\in\Omega)$.若有 $u(x,y,z)=0((x,y,z)\in\Sigma)$,试证明:$u(x,y,z)=0((x,y,z)\in\Omega)$.

(2) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是单连通区域,Σ 是 Ω_0 内任一简单光滑闭曲面,又 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$在 Ω 上有连续一阶偏导数,$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 外侧单位法向量.试证明

$$I=\iint_{\Sigma}[P\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i})+Q\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{j})+R\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})]\mathrm{d}S=0$$

当且仅当$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0((x,y,z)\in\Omega)$.

(3) 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$,$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是其外法向向量.又 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$在 $\mathbf{R}^3$ 上有连续二阶偏导数,试计算积分

$$I=\iint_{\Sigma}\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right\}\mathrm{d}S.$$

(4) 设 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$在 $\mathbf{R}^3$ 上有连续一阶偏导数,在 $\mathbf{R}^3$ 中任取一点(x_0,y_0,z_0),Σ 是以此点为中心 $r>0$ 为半径的上半球面 $z-z_0=\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$.若有

$$I=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

试证明$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$,$R=0(x,y,z\in\mathbf{R}^3)$.

解 (1) 由上述例 8.2.5(3)及(1)解(ii)之注 1 可知

$$\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

这说明$\dfrac{\partial u}{\partial x}=0=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial z}((x,y,z)\in\Omega)$,即在 Ω 上 $u(x,y,z)=C$(常数).从而由 $u(x,y,z)=0((x,y,z)\in\Sigma)$即得 $C=0$.证毕.

(2) 充分性.由 Gauss 公式立即可得.

必要性.记 Σ 所围立体为 Ω,Ω 之体积记为 V,则由 Gauss 公式知

$$0=I=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

又由中值公式,存在$(x',y',z')\in\Omega$,使得

$$0=I=V\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\bigg|_{(x,y,z)=(x',y',z')}.$$

任取$P_0(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$,作以$P_0$为心$\varepsilon>0$为半径的球体$\Omega_\varepsilon$,则由上知,存在$P'(x',y',z')\in\Omega_\varepsilon$,使得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\bigg|_{(x',y',z')}=0,\quad d(P_0,P')<\varepsilon.$$

令$\varepsilon\to0^+$,则$P'\to P_0(\varepsilon\to0^+)$.由此可得

$$\frac{\partial P(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+\frac{\partial R(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}=0.$$

根据点$P_0\in\Omega$的任意性,即可得证.

(3) 注意到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0,$$

故根据 Gauss 公式,(记Σ的所围球体为Ω)可得

$$I=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

(4) 记Σ在平面xOy上的投影区域Σ_1为

$$\Sigma_1:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2,\quad \text{法向量朝下},$$

又令Σ与Σ_1所围区域为Ω,则由 Gauss 公式和中值公式知

$$0=I=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\bigg|_{(x',y',z')}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3,\quad (x',y',z')\in\Omega.$$

另一方面又由重积分中值公式可知($(x_r,y_r)\in\Sigma_1$)

$$\iint_{\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi r^2\cdot R(x_r,y_r,z_0).$$

从而我们有

$$0=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\bigg|_{(x',y',z')}\frac{4}{3}\pi r=R(x_r,y_r,z_0).$$

令$r\to0^+$,即得$R(x_0,y_0,z_0)=0$.由点的(x_0,y_0,z_0)任意性可知$R\equiv0$.由此又得$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\equiv0$.

例 8.2.7 解答下列问题:

(1) 设Σ是半空间$x>0$内一任意的光滑有向封闭曲面,其所围区域记为Ω,$f(x)$是$(0,\infty)$上连续可微函数,满足$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$.若有

$$I=\iint_{\Sigma} xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

试求 $f(x)$.

(2) 设 Σ是 $\mathbf{R}^3$ 中第一象限内任意的光滑闭曲面,其所围立体记为 Ω,$f(x,y,z)$在第一象限上具有连续一阶偏导数,试给出

$$I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=0$$

的充分必要条件.

(3) 设 $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$是 $\mathbf{R}^3$ 上连续可微函数,记 Ω: $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$,$\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$.且有

$$\boldsymbol{F}=(0,0,0)\ ((x,y,z)\notin\Omega),\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{F}=0.$$

(i) 若 G 是包含 Ω 的连通开集,$f(x,y,z)$在 G 上连续可微,试证明

$$\iiint_{\Omega}(\nabla f)\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

(ii) 试证明$\displaystyle\iiint_{\Omega}P(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

解 (1) 由题设以及 Gauss 公式可知

$$0=I=\pm\iiint_{\Omega}[xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(在 Σ的法向量指向外(内)侧时取+(−)号).根据 Σ取法的任意性,可得 $xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0\ (x>0)$,即

$$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\quad(x>0).$$

解此微分方程,我们有

$$f(x)=\mathrm{e}^{\int(1-1/x)\mathrm{d}x}\left[\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\cdot\mathrm{e}^{\int(1/x-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right].$$

$$=\frac{\mathrm{e}^x}{x}\left[\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x+C).$$

因为$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[(\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^x)/x]=1$,所以必有$\lim\limits_{x\to0^+}(\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^x)=0$,即 $C+1=0$,故 $C=-1$.最后得 $f(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)/x$.

(2) 充分性.按 Gauss 公式可知

$$I=\iiint_{\Omega}\left(3f+x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

因此,当 $f(x,y,z)$是一个三次齐次函数时,$I=0$.

必要性.假定对任一 Σ,$I=0$,则由 Gauss 公式知

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+3f\equiv0. \qquad ①$$

令 $\xi=x,\eta=y/x,\zeta=z/x$ 或 $x=\xi,y=\xi\eta,z=\xi\zeta$,则得

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial y}\eta+\frac{\partial f}{\partial z}\zeta,$$

$$\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}=\frac{\partial f}{\partial x}\xi+\frac{\partial f}{\partial y}\xi\eta+\frac{\partial f}{\partial z}\xi\zeta= x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}.$$

从而式①可改写为

$$\xi\frac{\partial f}{\partial \xi}+3f=0 \quad 或 \quad \xi^3\frac{\partial f}{\partial \xi}+3\xi^2 f=0.$$

注意到 $\xi^3\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+3\xi^2 f=(\xi^3 f)'_\xi=0$,故存在 $g(\eta,\zeta)$,使得

$$f(\xi,\eta,\zeta)=g(\eta,\zeta)/\xi^3 \quad 或 \quad f(x,y,z)=g(y/x,z/x)/x^3.$$

这说明 $f(x,y,z)$是一个三次齐次函数.

(3) (i) 由题设知

$$\nabla\cdot(f\boldsymbol{F})=(\nabla f)\cdot\boldsymbol{F}+f(\nabla\cdot\boldsymbol{F})=(\nabla f)\cdot\boldsymbol{F}.$$

记 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$,则依 Gauss 公式可得

$$\iiint_\Omega(\nabla f)\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_\Omega\nabla\cdot(f\boldsymbol{F})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_\Sigma(f\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0.$$

(注意 $\boldsymbol{F}=0((x,y,z)\in\mathbf{R}^3\setminus\Omega)$以 $\boldsymbol{F}$ 的光滑性,故 $\boldsymbol{F}|_\Sigma=0$.)

(ii) 在(i)的公式中,取 $f(x,y,z)=x$,则可知 $\nabla f=(1,0,0)$, $\nabla f\cdot\boldsymbol{F}=P(x,y,z)$.从而即可得证.

例 8.2.8 解答下列问题(下述函数皆可微):

(1) 设 $f(x,y,z)$是 $\mathbf{R}^3$ 上的一次齐次函数,令 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=f(x,y,z)\boldsymbol{r}/4$,试证明 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=f(x,y,z)$.

(2) 设 $\boldsymbol{F}=f(r)\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$,试问何时有 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=0$?

(3) 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,试问 $I=\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]$何时为 0?

(4) 令 Σ_1 为圆锥 $x^2+y^2\leqslant z^2\ (0\leqslant z\leqslant h)$的侧面,$\Sigma_2$ 是其底面,试求向量场 $\boldsymbol{r}$ 通过 Σ_1,Σ_2 的流量.

解 (1) 由 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)=\left(\dfrac{xf}{4},\dfrac{yf}{4},\dfrac{zf}{4}\right)$可知

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{f+xf'_x}{4},\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{f+yf'_y}{4},\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{f+zf'_z}{4}.$$

从而可得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=(3f+xf'_x+yf'_y+zf'_z)/4=3f/4+f/4=f.$$

(2) 易知 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=3f(r)+rf'(r)$,故由 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=0$ 可得$(r^3f(r))'_x=0$.这说明 $f(r)r^3=C$(常数),即 $f(r)=C/r^3$.

(3) (i) 由 $\mathrm{grad} f(r)=f'(r)\boldsymbol{r}/r$ 可知

$$\mathrm{div}[\mathrm{grad} f(r)]=f''(r)\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}\right)+f'(r)\left(\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\right)$$
$$=f''(r)+2f'(r)/r.$$

(ii) 依题设以及(i)可知 $rf''(r)+2f'(r)=0$,故有

$$[rf''(r)+f'(r)]+f'(r)=0,\quad (rf'(r))'+f'(r)=0.$$

由此可得 $rf'(r)+f(r)=C_1$(常数),或 $rf(r)=C_1r+C_2$,即 $f(r)=C_1+C_2/r$.

(4) (i) 因为 $\boldsymbol{r}$ 与 Σ_1 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直,所以流量为 $\iint\limits_{\Sigma_1}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0$.

(ii) 对 Σ_2,则有 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=h$.从而知流量为 $\iint\limits_{\Sigma_2:x^2+y^2=h^2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=h\iint\limits_{\Sigma_2}\mathrm{d}S=\pi h^3$.

8.3　Stokes　公　式

定理 8.3.1　设 Σ是空间中一光滑曲面,边界$\partial\Sigma$由有限条逐段光滑曲线组成,$\partial\Sigma$的定向由Σ的定向所确定.函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\in C^{(1)}(\Sigma)$(意即存在开集 G,$\Sigma\subset G$,且 P,Q,$R\in C^{(1)}(G)$).则有

$$\int\limits_{\partial\Sigma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注　为了便于记忆,公式常写成如下形式

$$\int\limits_{\partial\Sigma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为 S 取定法向量的方向余弦.

在物理上,对空间的一条闭曲线 L,以及向量场 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$,则称曲线积分

$$\int\limits_{L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int\limits_{L}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}(\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}x\cdot\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\cdot\boldsymbol{j}+\mathrm{d}z\cdot\boldsymbol{k})$$

为 $\boldsymbol{F}$沿 L 的环量.又称向量

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

为向量场 $\boldsymbol{F}$(在一点)的旋度.

如果闭曲线 L 是曲面 Σ的边界,则 Stokes 公式的向量形式为

$$\int\limits_{L}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

Σ的定向如下确定，在 L 上任取一点，记该点 L 的外法线方向为 τ，L 的切向量为 $\boldsymbol{t}$，则取 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 使$(\boldsymbol{n},\tau,\boldsymbol{t})$成右手系．

例 8.3.1 计算下列积分 I：

(1) $I=\int_{L_+} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中

(i) L_+：$x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线，正向(逆时针方向)．

(ii) L_+：$x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x+z=R$ 的交线，正向．

(2) $I=\int_{L_+} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$，$L_+$：$x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+y^2=x$ 的交线，正向．

(3) $I=\int_{L_+}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，

(i) L_+：$x^2+y^2=R^2$ 与 $x/a+z/h=1(a,h>0)$的交线，正向．

(ii) L_+：$x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $y=x\tan\alpha$的交线(圆周)，正向．

解 (1) (i) 平面 $x+y+z=0$ 被 L_+ 所围部分记作 Σ，并取 Σ的法向量向上，所以它的方向余弦为 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$．应用 Stokes 公式得

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}-\sqrt{3}\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2．$$

(ii) 易知 L_+ 是一个圆周且位于球面上，圆心位于平面 xOz 上直线段 $x+z=R$ 之中点处，半径为 $R/\sqrt{2}$(图 8.11)．

视 L_+ 为平面区域 Σ：$x+z\leqslant R$ 的圆周，且注意到平面 $x+z=R$ 之单位法向量为$(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$，故根据 Stokes 公式，可得

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[(0-1)\frac{1}{\sqrt{2}}+(0-1)\cdot 0+(0-1)\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\mathrm{d}S$$

$$=-\sqrt{2}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R^2．$$

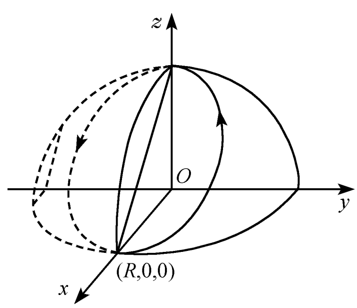


图 8.11

(2) 易知交线所围之曲面 Σ在平面 xOy 上的投影为$(x-1/2)^2/(1/2)^2+y^2=$

$(1/2)^2$，从而由 Stokes 公式可得

$$I=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}(-y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{(x-1/2)^2+y^2\leqslant 1/4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi(1/2)^2=\pi/2.$$

(3)(i) 易知交线位于一平面上，其所围区域记为 Σ，Σ 上的法向量为 $(h,0,a)$，则可得

$$I=-2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{\Sigma}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=-2\left(\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}+0+\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=-2\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}(\pi R^2)\frac{1}{\cos\gamma}=-2\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}\pi R^2(\sqrt{a^2+h^2}/a).$$

(ii) 易知交线位于一平面上，记其所围区域为 Σ，则由 Stokes 公式可得

$$I=-2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 Σ 所在平面为 $\sin\alpha\cdot x+\cos\alpha\cdot y=0$，法向量为 $(\sin\alpha,-\cos\alpha,0)$，所以

$$I=-2\iint_{\Sigma}(\sin\alpha-\cos\alpha)\mathrm{d}S=-2(\sin\alpha-\cos\alpha)\pi a^2.$$

例 8.3.2　解答下列问题：

(1) 设 L_+ 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\lambda=0$ 上的闭曲线，也是有界光滑曲面 Σ 之边界，其中 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是该平面的法向余弦，试求积分

$$I=\int_{L_+}\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}.$$

(2) 设 Σ 是一光滑曲面，法向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，边界曲线记为 L_+. 若 $f(x,y,z)$，$g(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上有连续二阶偏导数，试证明积分等式

$$I=\int_{L_+}f\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+f\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y+f\frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z}\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\end{vmatrix}\mathrm{d}S.$$

(3) 设 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上有连续一阶偏导数，$\Sigma\subset\mathbf{R}^3$ 是一个光滑闭曲面，曲面面积记为 S，L_+ 是其光滑界边曲闭线. 试证明

$$I=\left|\int_{L_+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\right|$$

$$\leqslant \max_{(x,y,z)\in\Sigma}\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2\right\}^{1/2}\cdot S.$$

解 (1) 根据 Stokes 公式

$$\int_{L_+} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

可知 $P=z\cos\beta-y\cos\gamma, Q=x\cos\gamma-z\cos\alpha, R=y\cos\alpha-x\cos\beta$,以及

$$I=2\iint_{\Sigma}\cos\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{\Sigma}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\mathrm{d}S=2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=2S,$$

其中 S 表示曲面 Σ 的面积.

(2) 注意到偏导公式

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial g}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial g}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z}\end{vmatrix},$$

故由 Stokes 公式可知

$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f\dfrac{\partial g}{\partial x} & f\dfrac{\partial g}{\partial y} & f\dfrac{\partial g}{\partial z}\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z}\end{vmatrix}\mathrm{d}S.$$

(3) 根据 Stokes 公式以及 Cauchy-Schwarz 不等式,可知

$$I=\left|\iint_{\Sigma}\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right\}\mathrm{d}S\right|$$

$$\leqslant\iint_{\Sigma}\left\{\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}\right.$$

$$\left.\cdot\left[\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right]^{1/2}\right\}\mathrm{d}S$$

$$\leqslant\max_{(x,y,z)\in\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}\cdot\iint_{\Sigma}1\mathrm{d}S.$$

由此即得所证.

例 8.3.3　计算下列积分：

(1) $I=\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，$L$ 是从点$(2a,0,0)$出发沿两曲面 $x^2+y^2+z^2=2a(x+y)$，$x+y=2a$ 的交线从平面 xOy 的下方到上方一周的曲线．

(2) $I=\int_L(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，$L$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx(z\geqslant 0)$与 $x^2+y^2=2rx(0<r<R)$的交线，方向逆时针(球表面较小部分在左面)．

(3) $I=\int_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，$L$ 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，对 Oz 轴是逆时针方向．

(4) $I=\int_L x^2y^3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$，$L$：$x^2+y^2=a^2$，$z=0$，逆时针方向．

解　(1) 易知该圆周所在平面之方向余弦为 $\cos\alpha=\cos\beta=1/\sqrt{2}$，$\cos\gamma=0$，故由 Stokes 定理得到($\Sigma$为圆周所围区域)

$$I=\iint_\Sigma\left[(0-1)\frac{1}{\sqrt{2}}+(0-1)\frac{1}{\sqrt{2}}+(0-1)\cdot 0\right]\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{2}}\iint_\Sigma\mathrm{d}S=-\sqrt{2}\pi(\sqrt{2}a)^2=-2\sqrt{2}\pi a^2.$$

(2) 记在球面上交线 L 所围曲面为 Σ，注意到球面法向量

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{x-R}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right),$$

故可得(由 Stokes 公式)

$$I=2\iint_\Sigma(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_\Sigma[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_\Sigma\left[(y-z)\frac{x-R}{R}+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}\right]\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_\Sigma(z-y)\mathrm{d}S=2\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=2\iint_\Sigma R\cos\gamma\mathrm{d}S=2R\pi r^2.$$

(3) 记 Σ为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围部分(上侧)，D 是 Σ 在平面 xOy 上的投影区域，则由 Stokes 公式可知

$$I=\iint_\Sigma(-2y-4z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-2z-6x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(4x+2y+3z)\mathrm{d}S=-2\iint_D(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-12\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(4) 由 $P=x^2y^3$, $Q=1$, $R=z$ 可知

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-3x^2y^2,\quad \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0.$$

由此可得(Stokes 公式,Σ是 L 所围曲面)

$$I=-3\iint_{\Sigma}x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-3\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{8}a^6.$$

例 8.3.4 解答下列问题(下列函数均在 $\mathbf{R}^3$ 上连续可微):

(1) 设 $\boldsymbol{F}=f(r)\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}x+\boldsymbol{j}y+\boldsymbol{k}z)$,试证明 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=0$.

(2) 设 $\varphi(x,y,z)$, $\boldsymbol{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$有二阶连续偏导数,试证明 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)=0$, $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F})=0$.

(3) 设 $\boldsymbol{F}=f(r)\boldsymbol{r}$,试证明$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=0$,其中 L 是不包含原点的闭光滑曲线.

(4) 试证明向量场 $\boldsymbol{F}=\mathrm{grad}\,\varphi\times\mathrm{grad}\,\psi$通过球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的流量为 0.

解 (1) 由题设知,$P=xf(r)$, $Q=yf(r)$, $R=zf(r)$,故

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=f'(r)\frac{yz}{r}-f'(r)\frac{yz}{r}\equiv 0,\quad \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\equiv 0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 0.$$

由此即得所证:$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}=0$.

(2) 注意到 $\varphi''_{yx}=\varphi''_{xy}$, $\varphi''_{xz}=\varphi''_{zx}$, $\varphi''_{yz}=\varphi''_{zy}$,故知

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi)=\nabla\times(\nabla\varphi)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ \varphi'_x&\varphi'_y&\varphi'_z\end{vmatrix}=(0,0,0)=0.$$

此外,又由

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0,$$

即得第二个结论.

(3) 取从原点出发又趋向无穷的折线 l,且记 $\Omega=\mathbf{R}^3\setminus l$,则 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是单联通区域.又令 Σ是在 Ω 内以 L 为边界的光滑曲面,则根据公式

$$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_{\Sigma}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

可知,我们只需指出 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}\equiv0$ 即可.从而,由(1)即得所证.

(4) 注意到公式 $\mathrm{grad}\,\varphi\times\mathrm{grad}\,\psi=\mathrm{rot}(\varphi\mathrm{grad}\,\psi)$,故根据 Stokes 公式可知,通过上半球面($z>0$, $r=1$)的流量等于向量 $\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi$通过平面 xOy 上圆周 $x^2+y^2=1$ 按定向半球面的定向环流量.

再考察对下半球面($z<0$)的流量,类似地可知它也等于向量 $\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi$通过平面 xOy 上圆周 $x^2+y^2=1$ 按定向下半球面的定向环量.显然,由于方向相反而值

相同，故 $\boldsymbol{F}$ 对整个球面流量为 0.

8.4　曲线积分与路径无关性

定义 8.4.1　设 Ω 为空间区域，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 Ω 上连续. 如果对 Ω 内任意两点 A，B，和对 Ω 内任一连接 A，B 的逐段光滑曲线 L，曲线积分

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z \qquad ①$$

的值只与 A，B 有关，而与曲线 L 选取无关，则称曲线积分①在 Ω 上与路径无关（二维雷同）.

定理 8.4.1　设 Ω 为空间区域，函数 $R,Q,R\in C(\Omega)$. 则曲线积分①在 Ω 上与路径无关的充要条件是：对 Ω 内任一逐段光滑的简单闭曲线 Γ，积分 $\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$.

定理 8.4.2　设 Ω 为空间区域，函数 $R,Q,R\in C(\Omega)$. 则曲线积分①在 Ω 上与路径无关的充要条件是：在 Ω 上存在连续可微函数 $u=u(x,y,z)$，使得 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$. 此时，称 $u(x,y,z)$ 是被积表达式的原函数，且

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=u\big|_A^B.$$

注 1　原函数的求法，设曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 D 上与路径无关，由定理知存在原函数 $u(x,y)$，使 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，那么怎么求函数 $u(x,y)$ 呢？因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=P$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=Q$.

对上面第一式固定 y 求不定积分，得 $u(x,y)=\int P\mathrm{d}x+\varphi(y)$（任意常数应为 y 的函数）. 这样求 $u(x,y)$ 归结为求数 $\varphi(y)$. 又知

$$\varphi'(y)=\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x=Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x,\quad \varphi(y)=\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y+C.$$

余下只要说明 $Q-\dfrac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x$ 只是 y 的函数. 事实上，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x\right]=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int P\mathrm{d}x\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 0.$$

故 $Q-\dfrac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x$ 只含变量 y，于是求出函数

$$u(x,y)=\int P\mathrm{d}x+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y+C.$$

注 2　对 $\mathbf{R}^3$，$I=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$，则

$$u(x,y,z)=\int P\mathrm{d}x+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y+\int\left[R-\frac{\partial}{\partial z}\int P\mathrm{d}x-\frac{\partial}{\partial z}\int\left(Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z.$$

注 3　下一定理要求 Ω 是单连通区域：设 Ω 是平面或空间区域，若对于 Ω 内任一连续闭曲线 Γ，总能在 Ω 内连续地收缩成 Ω 内一点，则称 Ω 为单连通区域. 若 Ω 是平面区域 D，单连通条件直观上即为无"洞"区域；若 Ω 是空间区域，有"洞"区域可以是单连通区域，如两同心球面之间

的区域为单连通区域,而圆环面所围区域不是单连通区域.

定理 8.4.3　设 Ω为空间单连通区域,函数 $P,Q,R\in C^{(1)}(\Omega)$,则曲线积分①在 Ω上与路径无关的充要条件是:在 Ω上有

$$\frac{\partial R}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}\equiv\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y};\quad 或\quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\equiv 0$$

$\left(在平面单连通区域时,充要条件为\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}\right)$.

例 8.4.1　解答下列问题:

(1) 计算 $I=\int_{AB}(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$,其中 $A=(0,0)$,$B=(2,1)$.

(2) 试问积分 $I=\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在 $D=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上是否与路径无关?

(3) 求 $I=\frac{1}{2}\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}(A,C>0;AC-B^2>0)$,其中 L 是绕原点的闭曲线.

(4) 计算 $I=\int_{AB}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$,其中 $A=(0,-1)$,$B=(1,0)$,路径AB不通过直线 $y=x$.

(5) 计算 $I=\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,$L$ 是位于上半平面从点$(-1,0)$到$(1,0)$的光滑线段.

解　(1) 由 $P=x^2+2xy-y^2$,$Q=x^2-2xy-y^2$ 可知,$\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y=\frac{\partial Q}{\partial x}$.因此,该线积分与路径无关.令点 $C=(2,0)$,并取路径为$\overline{AC}$与$\overline{CB}$直线段,则得

$$\begin{aligned}I&=\left\{\int_{\overline{AC}}+\int_{\overline{CB}}\right\}(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_0^2x^2\mathrm{d}x+\int_0^1(4-4y-y^2)\mathrm{d}y=\frac{13}{3}.\end{aligned}$$

(2) 取 L 为 $x^2+y^2=1$,沿逆时针方向,此时有

$$\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_{x^2+y^2=1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\iint_{x^2+y^2\leqslant1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi,$$

即积分 I与路径有关.

(3) 由 $P=(x/2)/(Ax^2+2Bxy+Cy^2)$,$Q=(-y/2)/(Ax^2+2Bxy+Cy^2)$可

知，$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.这说明 I 与路径无关，从而取 L 为椭圆 L_0：$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 来计算 I 是最简便的.此时我们有

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{L_0} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

(4) 由 $P=-y/(x-y)^2$，$Q=x/(x-y)^2$ 可知$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{x+y}{(x-y)^3}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.这说明 I 在区域 $y<x$ 内与路径无关，故令 $C=(1,-1)$且选路径为直线段$\overline{AC}$与$\overline{CB}$.从而有

$$I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}+\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2}=1.$$

(5) 由于$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$，从而知在区域 $y>0$ 上 I 与路径无关.因此我们作路径 L_0：$x^2+y^2=1$($y>0$，逆时针)，则可得(采用极坐标)

$$\begin{aligned}I&=-\int_{L_0}\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\&=\int_\pi^0[(\cos\theta+\sin\theta)(-\sin\theta)-(\cos\theta-\sin\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta=\pi.\end{aligned}$$

例 8.4.2　解答下列问题：

(1) 求 $I=\int_L[\mathrm{e}^x\sin y-3(x+y)]\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$ $(a>0)$，L 是从 $A=(2a,0)$沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $B=(0,0)$的弧.

(2) 求 $I=\int_L x\ln(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x+y\ln(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y$，$L$ 是点 $A=(2,0)$到 $B=(0,2)$的光滑曲线弧.

(3) 求 $I=\int_L\dfrac{\partial\ln r}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$，$L$ 是位于第一象限内从点 $A=(1,0)$到点 $B=(0,2)$不相交的光滑曲线，$\boldsymbol{n}$指向原点，又 $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

(4) 设 $\varphi,\psi\in C^{(1)}(\mathbf{R}^1)$，若对平面上任一条闭光滑曲线 L，均有

$$I=\int_L 2[x\varphi(y)+\psi(y)]\mathrm{d}x+[x^2\varphi(y)+2xy^2-2x\varphi(y)]\mathrm{d}y=0.$$

(i) 试求 φ,ψ，其中 $\varphi(0)=-2$，$\psi(0)=1$.

(ii) 对 L：从点 $A=(0,0)$到 $B=(\pi,\pi/2)$的简单光滑曲线，计算积分 I.

解　(1) 记 $I_1=\int_L \mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}y$，$I_2=\int_L 3(x+y)\mathrm{d}x+ax\mathrm{d}y$，则有 $I=I_1-I_2$.易知积分 I_1 与路径无关，故直接取 L 位于 x 轴，可得 $I_1=0$.对于 I_2，取 L 的参数方程为 $x=a+a\cos t$，$y=a\sin t$，t 从 0 到 π，我们有

$$I_2=\int_0^{\pi}(-3a^2\sin t-3a^2\sin t\cos t-3a^2\sin^2 t+a^3\cos t+a^3\cos^2 t)\mathrm{d}t$$
$$=-6a^2-3\pi a^2/2+\pi a^3/2.$$
$$I=3a^2(\pi/2+2)-\pi a^3/2.$$

(2) 由 $P=x\ln(x^2+y^2-1)$, $Q=y\ln(x^2+y^2-1)$ 可知,积分的定义区域为 $D=\{(x,y):1<x^2+y^2<\infty\}$.从而需在多联通区域上处理,作圆周 $L_1:x^2+y^2=4$,且注意到

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2xy}{(x^2+y^2-1)}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

我们有

$$I=\int_{L_1}x\ln(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x+y\ln(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{L_1}x\ln 3\mathrm{d}x+y\ln 3\mathrm{d}y \quad (\text{用极坐标})$$
$$=\ln 3\int_0^{2\pi}[2\cos\theta(-2\sin\theta)+4\sin\theta\cos\theta]\mathrm{d}\theta=0.$$

这说明 I 与积分路径无关.从而令 $C=(2,2)$ 并取路径为直线段 $\overline{AC}$, $\overline{CB}$,我们有

$$I=\int_0^2 y\ln(3+y^2)\mathrm{d}y+\int_2^0 x\ln(3+x^2)\mathrm{d}x=0.$$

(3) 记 τ 是 L 的单位切向量,则由 $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})=-\cos(\tau,\boldsymbol{y})$, $\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})=\cos(\tau,\boldsymbol{x})$ 可知

$$I=\int_L\left[\frac{\partial\ln r}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+\frac{\partial\ln r}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})\right]\mathrm{d}s$$
$$=\int_L\left[-\frac{\partial\ln r}{\partial x}\cos(\tau,\boldsymbol{y})+\frac{\partial\ln r}{\partial y}\cos(\tau,\boldsymbol{x})\right]\mathrm{d}s$$
$$=\int_L\frac{\partial\ln r}{\partial y}\mathrm{d}x-\frac{\partial\ln r}{\partial x}\mathrm{d}y.$$

令 $C=(1,2)$,并作直线段 $L_1:\overline{AB}$, $L_2:\overline{BC}$.因为我们有

$$P=\frac{\partial\ln r}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad Q=-\frac{\partial\ln r}{\partial x}=\frac{-x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

所以得到(接上式,并注意积分与路径无关性)

$$I=\left\{\int_A^C+\int_C^B\right\}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\right)=-\int_0^2\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}-\int_0^1\frac{2\mathrm{d}x}{4+x^2}.$$

(4) (i) 依题设易知 I 与路径无关.故由

$$P=2[x\varphi(y)+\psi(y)],\quad Q=x^2\psi(y)+2xy^2-2x\varphi(y),$$

必须有$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,即($x$ 与 y 是独立变量)

$$2[x\varphi'(y)+\psi'(y)]=2x\psi(y)+2y^2-2\varphi(y),$$
$$\varphi'(y)=\psi(y),\quad \psi'(y)=y^2-\varphi(y).$$

由此知 $\varphi''(y)=\psi'(y)=y^2-\varphi(y)$,且可得通解

$$\varphi(y)=C_1\cos y+C_2\sin y+y^2-2.$$

而依条件 $\varphi(0)=-2$,$\psi(0)=1$,又得 $C_1=0$,$C_2=1$,以及

$$\varphi(y)=\sin y+y^2-2,\quad \psi(y)=\varphi'(y)=\cos y+2y. \qquad ①$$

(ii) I 与路径无关,令 $C=(\pi,0)$,并取线段$\overline{AC}$,$\overline{CB}$,可知(用式①代入)

$$I=\left\{\int_{\overline{AC}}+\int_{\overline{CB}}\right\}2[x\varphi(y)+\psi(y)]\mathrm{d}x+[x^2\psi(y)+2xy^2-2x\varphi(y)]\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\pi}(2-4x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}[\pi^2(\cos y+2y)+2\pi y^2-2\pi(\sin y+y^2-2)]\mathrm{d}y$$
$$=-2\pi^2+2\pi+3\pi^2+\pi^4/4-2\pi=\pi^2+\pi^4/4.$$

例 8.4.3 计算下列积分 I:

(1) $I=\displaystyle\int_{AB}x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$,$A=(0,1)$,$B=(3,4)$.

(2) $I=\displaystyle\int_{AB}\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}$,$A=(2,1)$,$B=(1,2)$,$AB$ 不穿过 y 轴.

(3) $I=\displaystyle\int_{AB}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,$A=(1,0)$,$B=(6,8)$,$AB$ 不通过原点.

(4) $I=\displaystyle\int_{AB}(10xy-8y)\mathrm{d}x+(5x^2-8x+3)\mathrm{d}y$,$A=(0,0)$,$B=(a,b)$.

(5) $I=\displaystyle\int_{AB}\frac{(1+\sqrt{x^2+y^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}$,$A=(1,0)$,$B=(0,2)$,$AB$ 不通过原点.

(6) $I=\displaystyle\int_{AB}(x^2+y+z)\mathrm{d}x+(y^2+x+z)\mathrm{d}y+(z^2+x+y)\mathrm{d}z$,$A=(0,0,0)$,$B=(1,1,1)$.

解 (1) 因为 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\mathrm{d}(x^2+y^2)/2$,所以得到

$$I=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big|_A^B=\frac{1}{2}(9+16-1)=12.$$

(2) 因为$(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)/x^2=\mathrm{d}(-y/x)$,所以我们有

$$I=-\frac{y}{x}\Big|_A^B=-\left(2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}.$$

(3) 因为 $(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)/\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2})$,所以有

$$I=\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(1,0)}^{(6,8)}=\sqrt{36+64}-\sqrt{1}=9.$$

(4) 因为我们有

$$\frac{\partial(5x^2-8x+3)}{\partial x}=10x-8=\frac{\partial(10xy-8y)}{\partial y},$$

所以在全平面上线积分与路径无关.现求原函数 $u(x,y)$,由于

$$\int P\mathrm{d}x=\int(10xy-8y)\mathrm{d}x=5x^2y-8xy,$$

$$\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int 3\mathrm{d}y=3y+C.$$

(具体演算时,只需把 Q 内含有 x 的项删去,对剩余项进行积分.)故得原函数为

$$u(x,y)=5x^2y-8xy+3y+C.$$

从而可知

$$\int_{AB}(10xy-8y)\mathrm{d}x+(5x^2-8x+3)\mathrm{d}y$$

$$=(5x^2y-8xy+3y)\Big|_{(0,0)}^{(a,b)}=5a^2b-8ab+3b.$$

(5) 因为我们有

$$\frac{(1+\sqrt{x^2+y^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)}{x^2+y^2}=\left(\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2+y^2)$$

$$=\mathrm{d}(x^2+y^2)/2(x^2+y^2)+\mathrm{d}(x^2+y^2)/2\sqrt{x^2+y^2}$$

$$=\mathrm{d}(\ln\sqrt{x^2+y^2})+\mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$=\mathrm{d}(\ln\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}),$$

所以得原函数 $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}$.从而知

$$I=u(x,y)\Big|_A^B=(\sqrt{x^2+y^2}+\ln\sqrt{x^2+y^2})\Big|_{(1,0)}^{(0,2)}=1+\ln 2.$$

(6) 由 $P=x^2+y+z$,$Q=y^2+x+z$,$R=z^2+x+y$ 可知

$$\frac{\partial R}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad\frac{\partial P}{\partial z}=1=\frac{\partial R}{\partial x},\quad\frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

这说明积分 I 与路径无关.下面求原函数 $u(x,y,z)$.

由 $u'_x=x^2+y+z$ 可知,$u(x,y,z)=x^3/3+yx+zx+g(y,z)$.又由 $u'_y=x+g'_y(y,z)=y^2+x+z$ 可知,$g'_y(y,z)=y^2+z$,即得 $g(y,z)=y^3/3+yz+\varphi(z)$.从而

$$u(x,y,z)=x^3/3+yx+zx+y^3/3+yz+\varphi(z).$$

再由 $u'_z=x+y+\varphi'(z)=z^2+x+y$ 说明,$\varphi'(z)=z^2$,即 $\varphi(z)=z^3/3$.最后导出

$$I=u(x,y,z)\Big|_A^B=\left(\frac{x^3}{3}+yx+zx+\frac{y^3}{3}+yz+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}$$

$$= \frac{1}{3} + 1 + 1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} = 4.$$

例 8.4.4 求下列表达式中的原函数 u.

(1) $[(x^2+2xy+5y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy+y^2)\mathrm{d}y]/(x+y)^3$.

(2) $(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)/(3x^2-2xy+3y^2)\quad(y>0)$.

(3) $\left(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{z}+\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y-\frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z$.

解 (1) 取 $x_0=0, y_0\neq 0$,则有

$$P(x,y)=\frac{1}{x+y}+\frac{4y^2}{(x+y)^3},\quad Q(x,y)=\frac{(x-y)^2}{(x+y)^3},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\int_0^x\left(\frac{1}{t+y}+\frac{4y^2}{(t+y)^3}\right)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}t}{t}+C \\ &=\ln|x+y|+\ln|y|-\frac{2y^2}{(x+y)^2}+2+\ln|y|-\ln|y_0|+C \\ &=\ln|x+y|-2y^2/(x+y)^2+C_1. \end{aligned}$$

(2) 由 $P=y/(3x^2-2xy+3y^2)$, $Q=-x/(3x^2-2xy+3y^2)$可知$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=$ $3(x^2-y^2)/(3x^2-2xy+3y^2)^2$,故取 $x_0=0, y_0=1$,我们有

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\int_{(0,1)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\left\{\int_{(0,1)}^{(0,y)}+\int_{(0,y)}^{(x,y)}\right\}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \\ &=\frac{y}{3}\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{(x-y/3)^2+8y^2/9}+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3x-y}{2\sqrt{2}y}+C_1. \end{aligned}$$

(3) 由 $P=1-1/y+y/z$, $Q=x/z+x/y^2$, $R=-xy/z^2$,可知

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=-\frac{x}{z^2}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{z}+\frac{1}{y^2}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{y}{z^2}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

故取 $x_0=y_0=z_0=1$,我们有 $u(x,y,z)=x-x/y+xy/z+C$.

例 8.4.5 解答下列问题:

(1) 试问 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\,\mathrm{d}x+\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}\,\mathrm{d}y$ 在何处为全微分式?

(2) 试问式$(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)/(x^2+y^2)^{3/2}\ (x^2+y^2>0)$是全微分式吗?

(3) 求 $F(x,y)$所满足的条件,使得 $F(x,y)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)$成为全微分式.

解 (1) 因为我们有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right)=\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x}}{2\sqrt{x^2+y^2}},$$

所以当 $y>0$ 时,有$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.这说明在区域 $y>0$ 上 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 为全微分.

(2) 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,我们有

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{r^3}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2)}{r^3}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r^2}{r^3}=\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{r}\right).$$

(3) F满足条件 $x\frac{\partial F}{\partial y}=y\frac{\partial F}{\partial x}$.

例 8.4.6 解答下列问题:

(1) 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 为不含原点的区域,考虑 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 上向量函数 $f(r)\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$,其中 $f(r)$在 $r>0$ 上连续,求证曲线积分

$$\int_{AB}f(r)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$$

在 Ω上与路径无关.

(2) 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续二阶偏导数,$r=\sqrt{x^2+y^2}$,且有

(i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial x}=0\quad((x,y)\neq(0,0))$,

(ii) $r\frac{\partial f}{\partial x}\sim\frac{x}{2\pi r},r\frac{\partial f}{\partial y}\sim\frac{y}{2\pi r}\quad(r\to0)$.

又记 $L_R:x^2+y^2=R^2$,试证明积分 $I=\int_{L_R}\mathrm{e}^x\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\right)$与 R 无关.

(3) 求 $P,Q\in C^{(1)}(\mathbf{R}^2)$之关系,使得积分

$$I(\alpha,\beta)=\int_L P(x+\alpha,y+\beta)\mathrm{d}x+Q(x+\alpha,y+\beta)\mathrm{d}y$$

与常数 α,β无关.其中 $L\subset\mathbf{R}^2$ 是任一光滑闭曲线.

解 (1) 任取一元连续函数 $f(r)r$ 的一个原函数 $u(r)$,则函数 $u=u(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$的微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\mathrm{d}z\\&=f(r)r\frac{x}{r}\mathrm{d}x+f(r)r\frac{y}{r}\mathrm{d}y+f(r)r\frac{z}{r}\mathrm{d}z=f(r)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z).\end{aligned}$$

注 若线积分$\int_L f(x,y,z)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$与路径无关,则 $f(x,y,z)$是 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$的函数.这是因为对 $\mathrm{d}u=xf\mathrm{d}x+yf\mathrm{d}y+zf\mathrm{d}z$ 可知,$u'_x/x=u'_y/y=u'_z/z$,所以由第 2 章例 2.1.18

(3)之(ii)即得所证.

(2) 设 $0<r<R$, $D: r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2$, $L_r: x^2+y^2=r^2$,由 Green 公式可知

$$\begin{aligned}&\int_{L_R}\mathrm{e}^x\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\right)-\int_{L_r}\mathrm{e}^x\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\right)\\&=\iint_D\mathrm{e}^x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.\end{aligned}$$

改写在 L_r 上的积分为(用极坐标)

$$\begin{aligned}&\int_{L_r}\mathrm{e}^x\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\right)\quad(x=r\cos\theta,y=r\sin\theta)\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{r\cos\theta}\left[\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial y}\sin\theta+\frac{\partial f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{\partial x}\cos\theta\right]r\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

易知上式右端积分中被积函数在 $r\to0^+$ 时一致收敛到 $\frac{\sin\theta}{2\pi}\sin\theta+\frac{\cos\theta}{2\pi}\cos\theta=\frac{1}{2\pi}$,从而我们有

$$\lim_{r\to0^+}\int_{L_r}\mathrm{e}^x\left(-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\right)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\theta=1.$$

这说明 $I=1$.证毕.

(3) 由题设知

$$\begin{aligned}0&=I(\alpha,\beta)-I(0,0)\\&=\int_L[P(x+\alpha,y+\beta)-P(x,y)]\mathrm{d}x+[Q(x+\alpha,y+\beta)-Q(x,y)]\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

若令 $f(x,y)=Q_x'(x,y)-P_y'(x,y)$,则由 Green 公式可得

$$\iint_D[f(x+\alpha,y+\beta)-f(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\quad(D\text{ 是 }L\text{ 围成的区域}).$$

对任一点 $(x_0,y_0)\in D$ 以及任意的 α,β,令

$$D_n:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant1/n^2\quad(n\text{ 充分大}),$$

我们有(中值公式)

$$\begin{aligned}0&=\iint_{D_n}[f(x+\alpha,y+\beta)-f(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\pi\cdot\frac{1}{n^2}[f(x_n+\alpha,y_n+\beta)-f(x_n,y_n)],\quad(x_n,y_n)\in D_n.\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$,即知 $f(x_0+\alpha,y_0+\beta)=f(x_0,y_0)$.这说明 $f(x,y)=C$(常数),即

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=C\quad\text{或}\quad\frac{\partial(Q-Cx)}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0.$$

由此知积分 $\int_L P\mathrm{d}x+(Q-Cx)\mathrm{d}y$ 与路径无关,即存在 $u(x,y)$,使得

$$P(x,y)=u'_x(x,y),\quad Q(x,y)=u'_y(x,y)+Cx. \qquad ①$$

反之,假定式①成立,则由 Green 公式知

$$I=(\alpha,\beta)=\iint_D[C+Q''_{x^2}(x+\alpha,y+\beta)-u''_{y^2}(x+\alpha,y+\beta)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D C\mathrm{d}x\mathrm{d}y=C\cdot|D| \quad (\text{其中 } |D| \text{ 表示 } D \text{ 的面积}),$$

即 $I(\alpha,\beta)$与 α,β无关.

例 8.4.7 解答下列问题:

(1) 若 D 是平面单连通区域,$u(x,y)$是 D 上调和函数,试证明一定存在 $u(x,y)$的共轭调和函数 $v(x,y)$.

(2) 设 $D:x^2+y^2>1$,试求在 D 上可微的函数 $f(x,y),g(x,y)$,使得 $f'_x(x,y)=g'_y(x,y)$,但同时不存在 D 上可微函数 $h(x,y)$,使得

$$f(x,y)=\frac{\partial h(x,y)}{\partial y},\quad g(x,y)=\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}. \qquad ①$$

(3) 设 $u(x,y),v(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上的连续可微函数,且有

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\quad ((x,y)\in\mathbf{R}^2),$$

试证明存在 $\mathbf{R}^2$ 上可微函数 $f(x,y)$,使得

$$u(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad v(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

解 (1) 考查在 D 上的线积分 $I=\int_L -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$,由于$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$($u(x,y)$是 D 上调和函数),故知积分 I 与路径无关.从而又知存在 $v(x,y)$,使得

$$\mathrm{d}v=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y \quad \text{即} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

这说明 $v\in C^{(2)}(D)$,且是 u 的所谓共轭调和函数.

(2) 取 $g(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$,$f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$,则易知

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.$$

此外,我们在 D 内作曲线 $L:x=2\cos t,y=2\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,可得

$$I=\int_L g(x,y)\mathrm{d}x+f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{-2\sin t}{4}(-2\sin t)+\frac{2\cos t}{4}(2\cos t)\right]\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

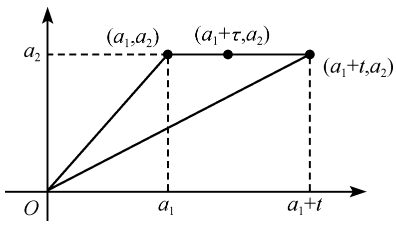


图 8.12

现在若存在满足式①之 $h(x,y)$,则由于 L 是闭光滑曲线,故应有 $I=0$,矛盾.

(3) 作函数 $f(x,y)=\int_L u(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi+v(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta$,其中 L 是从点 $A=(0,0)$到 $B=(x,y)$的直线段,又取定 $a=(a_1,a_2)\in\mathbf{R}^2$,$t\neq0$ 并以点$(0,0)$,(a_1,a_2),(a_1+t,a_2)为顶点作三角形,我们有(图 8.12)

$$\frac{f(a_1+t,a_2)-f(a_1,a_2)}{t}=\frac{1}{t}\int_{(a_1,a_2)}^{(a_1+t,a_2)}u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y=\frac{1}{t}\int_0^t u(a_1+\tau,a_2)\mathrm{d}\tau$$
$$=u(a_1+\theta t,a_2),\quad 0<\theta<1.$$

$t\to0$,即得$\dfrac{\partial f}{\partial x}=u$.类似地可得$\dfrac{\partial f}{\partial y}=v$.

补充练习及解答

补 充 练 习

1. 试证明 $\mathbf{R}^2$ 中的无穷闭集 F 是一个可数集的闭包.

2. 设 K 是 $\mathbf{R}^2$ 中一个紧集(有界闭集),$\{G_m\}$ 是覆盖 K 的开球列,试证明存在 $\delta_0>0$,使得 K 中任一点 X 的半径为 δ_0 的球必含于某个 G_{m_0} 中.

3. 设 $K\subset\mathbf{R}^2$ 是至少包含两个点的有界点集,试证明存在包含 K 的最小闭圆盘.

4. 设 $f:(-1,1)\mapsto\mathbf{R}^2$ 是连续可微映射,且有 $f(0)=(0,0)$,$f'(0)\neq(0,0)$,试证明存在 $\delta:0<\delta<1$,使得 $\|f(x)\|$ 在 $(0,\delta)$ 上递增.

5. 设 $f:\mathbf{R}^1\mapsto\mathbf{R}^1$ 不是单射,且存在 $g:\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^1\mapsto\mathbf{R}^1$,使得 $f(x+y)=g(f(x),y)(x,y\in\mathbf{R}^1)$,试证明 $f(x)$ 是周期函数.

6. 设 $F(u,v)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上满足($M>0$)

$$|F(u,v_1)-F(u,v_2)|\leqslant M|v_1-v_2|\quad(u,v_1,v_2\in\mathbf{R}^1),$$

$f(x)$,$g(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上,且 $g\in C([a,b])$,试证明对分划 $\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,以及

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\quad \xi,\eta\in[x_{i-1},x_i]\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

$\|\Delta\|=\max\{\Delta x_i:1\leqslant i\leqslant n\}$,有

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^{n}F[f(\xi),g(\eta)]\Delta x_i=\int_a^b F[f(x),g(x)]\mathrm{d}x.$$

7. 设 $G\subset\mathbf{R}^2$ 是非空开集,试作 $f:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^1$,使得 $f(x,y)$ 在 G 上不连续,在 $\mathbf{R}^2\setminus G$ 上连续.

8. 设 $K\subset\mathbf{R}^2$ 是紧集,$f:K\mapsto\mathbf{R}^1$ 是连续函数,证明对任给 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\varepsilon$$

$$(|f(X_1)-f(X_2)|\leqslant M\|X_1-X_2\|+\varepsilon\quad(X_1=(x_1,y_1),X_2=(x_2,y_2))).$$

9. 设 $f:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^1$ 连续.

(i) 若对 $\mathbf{R}^2$ 中紧集 K,$f^{-1}(K)$ 是紧集,试证明对 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集 F,$f(F)$ 必是闭集.

(ii) 设对 $\mathbf{R}^2$ 中闭集 F,$f(F)$ 是闭集.若 f 是 $1-1$ 映射,试证明对 $\mathbf{R}^1$ 中紧集

K,$f^{-1}(K)$必是紧集.

10. 设 $K\subset\mathbf{R}^2$.若任一在 K 上连续的函数 f 必有界,试证明 K 是紧集.

11. 设$\{f_n(x,y)\}$是 $\mathbf{R}^2$ 上连续函数列,$K\subset\mathbf{R}^2$ 是紧集.若 $f_n(x,y)$在 K 上一致收敛于 $f(x,y)$,试证明点集 $E=f(K)\cup\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}f_n(K)$是紧集.

12. 设 $f(x,y)$在区域 $D_0\subset\mathbf{R}^2$ 上有连续的偏导数,D 是满足 $\overline{D}\subset D_0$ 的有界区域,若记

$$\Delta f=f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y)=\mathrm{d}f+\alpha h,\quad h=\sqrt{h_1^2+h_2^2},$$

试证明当 $h\to0$ 时,α在 D 上一致收敛于零.

13. 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续的偏导数 $f'_x(x,y)$,D 是有界区域,试证明极限

$$\lim_{h\to0}I_h=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}=f'_x(x,y)$$

在 D 上是一致收敛的.

14. 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$上可微,且存在极限

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

(i) 试问 $f(x,y)$可连续延拓到点(0,0)处吗?

(ii) 若再假定 $f(x,y)$在(0,0)处连续,试问此时 $f(x,y)$在(0,0)处可微吗?

15. 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上具有连续的偏导数,且有

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|\leqslant M,\quad \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\leqslant M\quad((x,y)\in\mathbf{R}^2),$$

试证明 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant\sqrt{2}M\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$,其中点$(x_1,y_1)$,$(x_2,y_2)\in\mathbf{R}^2$.

16. 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$上具有连续偏导数,且有

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|\leqslant M,\quad \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\leqslant M\quad((x,y)\neq(0,0)),$$

试证明 $f(x,y)$可连续延拓到(0,0)处.(注意,对一元函数 $f(x)$,结论不真.)

注 设 $G\subset\mathbf{R}^2$ 是开凸集,$f(x,y)$在 G 上可微,且偏导数一致有界,则 $f(x,y)$可连续延拓到 $\overline{G}$上.

17. 设 $f(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上的调和函数,且不恒为 0.若 $f(x,y)$是 $\lambda>0$ 次齐次函数,试证明 λ是整数.

18. 试证明 $a^{b^a}>b^{a^b}$ $(a>b>1)$.

19. 设 $f(x,y)$,$g(x,y)$是 $\mathbf{R}^2$ 上的 k 次齐次函数.若方程

$$f(x,y)\mathrm{d}x+g(x,y)\mathrm{d}y=0\qquad(*)$$

是一个恰当微分方程(即满足$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial g}{\partial x}$),试证明解 $y=h(x)$满足 $xf(x,y)+yg(x,$

$y)=C$(常数).

20. 设 $f(x,y)$,$g(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上具有连续偏导数.试求 f 与 g 满足什么条件,可使方程 $f(x,y)\mathrm{d}x+g(x,y)\mathrm{d}y=0$ 含有形如 $h(xy)$的积分因子?

21. 试证明 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在原点(0,0)处不可微.

22. 设 $f\in C([0,1])$,令

$$F(x,y)=\int_0^1 f(t)\mid xy-t\mid \mathrm{d}t,\quad 0\leqslant x,y\leqslant 1,$$

试求$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$,$\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

23. 令 $D=\{(x,y):|x|+|y|=1\}$,$f(x,y,t)$与 $f_t'(x,y,t)$在 $D\times\mathbf{R}^1$ 上连续,作函数

$$F(x,y,t)=f^2(x,y,t)+[f_t'(x,y,t)]^2,\quad (x,y,t)\in D\times\mathbf{R}^1.$$

若存在 $t_0\in\mathbf{R}^1$,使得 $\inf\{F(x,y,t_0):(x,y)\in D\}>0$,试证明存在 $\delta>0$,对任意的 $(x,y)\in D$,在 $I_\delta=(t_0-\delta,t_0+\delta)$中至多有一个点 t',使得 $f(x,y,t')=0$.

24. 设 $f(t)$在 $\mathbf{R}^1$ 上可微,令 $z=F(x,y)=xy\cdot f[(x+y)/xy]$,试证明 $F(x,y)$是形如

$$x^2\frac{\partial F}{\partial x}-y^2\frac{\partial F}{\partial y}=g(x,y)\cdot F$$

的微分方程之解.

25. 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续的二阶偏导数,且有

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\tag{1}$$

$$f(ax,bx)=ax,\tag{2}$$

$$f_x'(ax,bx)=bx^2,\tag{3}$$

试求 $f_{x^2}''(ax,bx)$,$f_{xy}''(ax,bx)$,$f_{y^2}''(ax,bx)$.

26. 设 $f(t)$,$g(t)$在 $\mathbf{R}^1$ 上可导,且 $f'(t)\neq 0$,$g'(t)\neq 0$ $(t\in\mathbf{R}^1)$.又 $H(t)$在 $\mathbf{R}^1$ 上二次可导,令 $z=H[f(x)+g(y)]$ $(-\infty<x,y<\infty)$,试证明

$$I=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\ln\frac{z_x'(x,y)}{z_y'(x,y)}\right]=0,\quad -\infty<x,y<\infty.$$

27. 设 $f(x,y)$在区域 D 上存在偏导数,且 $f_x'(x,y)$,$f_y'(x,y)$在点$(a,b)\in D$ 上可微,试证明

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y\partial x}.$$

28. 设 $f(x)$在$(0,\infty)$上有连续的二次导数,令 $F(X)=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2})$.若有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_k^2}=0$,试求 f.

29. 设 $f(x,y,z)$在 $\mathbf{R}^3$ 上有连续的二阶偏导数,且有 $f^{-1}(0)=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=1\}$,试证明不存在满足 $x_0^2+y_0^2+z_0^2\leqslant 1$ 的点 $X_0=(x_0,y_0,z_0)$,使得

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z^2}\geqslant 0.$$

30. 试求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上点 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$的切平面 π,使得 π 包含已知直线 $L:\frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}$.

31. 设有直线 $L:\begin{cases} x/2-z/2=1, \\ y-2z+4=0, \end{cases}$而直线 L'是 L 在平面 $\Sigma:x+y-z=5$ 上的投影(设定 L'的方向为 L 与 z 轴正向形成钝角的方向),试求 $u=\cos^2(xy)+y/z^2$ 在点 $M_0=(0,-19,-24)$处沿 L'方向的方向导数.

32. 试求正值连续可微函数 $g(x)(x\in\mathbf{R}^1)$,使得 $h(x,y)=g(x)g(y)$在以原点为心的任一圆上均为常数.

33. 设 $y=f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上连续可微,作映射

$$T:\begin{cases} u=f(x), \\ v=-y+xf(x) \end{cases}\quad (x,y\in\mathbf{R}^1).$$

若 $f'(x_0)\neq 0$,试证明 T 在点(x_0,y_0)附近是局部可逆的,且有表示 $x=g(u)$,$y=-v+g(u)$.

34. 设 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数,试证明存在一一对应的映射 $g:[0,1]\mapsto\mathbf{R}^2$,使得 $f[g(x)]$是一个常数.

35. 设 $G=\{(u,v)\in\mathbf{R}^2:u>v\}$,定义 $T:G\mapsto\mathbf{R}^2$

$$T(u,v)=(u+v,u^2+v^2).$$

(i) 试证明 T 是局部一一映射.

(ii) 试确定 T 的值域 D,它是一一映射.

36. 设映射 $f:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^2$ 具有连续偏导数(分量).若

(i) f 只有有限个奇点.

(ii) 对任意的 $M>0$,点集$\{z\in\mathbf{R}^2:\|f(z)\|\leqslant M\}$均为有界集.

试证明 $f(\mathbf{R}^2)=\mathbf{R}^2$.

37. 设映射 $f:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^2$ 具有连续偏导数(分量),且其雅可比矩阵的秩处处等于 2.若对任一紧集 $K\subset\mathbf{R}^2$,$f^{-1}(K)$必是紧集,试证明 $f(\mathbf{R}^2)=f(\mathbf{R}^2)$.

38. 试证明 $F(x,y)=\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2}$的最大值是方程$(ac-b^2)-\lambda(a\gamma-2b\beta+c\alpha)+\lambda^2(\alpha\gamma-\beta^2)=0$ 的最大根.(假定 $\alpha\gamma-\beta^2>0$.)

39. 已知三角形的周长为 $2p$,试求如下所述的一种三角形,该三角形绕着自己的某一边旋转时,它形成的旋转体积最大.

40. 设有曲面 $S_1: 2x^2+(y-1)^2+(z-10)^2=1$, $S_2: z=1/(x^2+y^2+1)$,试证明存在点 $X_1\in S_1$, $X_2\in S_2$,使直线段 $\overline{X_1X_2}$ 垂直 S_1 于点 X_1,又垂直于 S_2 于点 X_2.

41. 设 $x+y+z=0$,试证明

$$6(x^3+y^3+z^3)^2\leqslant(x^2+y^2+z^2)^3.$$

42. 设 $f_n\in C([0,1])(n\in\mathbf{N})$,且满足 $\int_0^1 f_n^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 5\quad(n\in\mathbf{N})$.令

$$F_n(x)=\int_0^1\sqrt{x+y}\,f_n(y)\mathrm{d}y\quad(n\in\mathbf{N}).$$

试证明存在子列 $\{F_{n_k}(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

43. 试求 $f(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x-t/x)^2}\mathrm{d}t\quad(t>0)$.

44. 设 $F(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}/(1+t^2)\mathrm{d}t$,试证明

$$F(x)=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)\quad(x\geqslant 0).$$

45. 试求 $I=\lim\limits_{\alpha\to\infty}\int_1^2\dfrac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}\mathrm{d}x$.

46. 令 $I(s)=\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-x/s-1/x})/x\mathrm{d}x$,则 $\lim\limits_{s\to+\infty}I(s)/\ln s=1$.

47. $\Gamma(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^t n!}{t(t+1)\cdots(t+n)}\quad(t>0)$.

48. $\Gamma(t)$ 和 $\mathrm{B}(t,s)$ 是关于 t 的凸函数.

49. 记 Δ_{n-1} 为 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中由 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 均大于或等于 0,以 $x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant 1$ 确定的单形,则

$$\begin{aligned}&\int\cdots\int_{\Delta_{n-1}}x_1^{t_1-1}\cdots x_{n-1}^{t_{n-1}-1}(1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1})^{t_n-1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\\&=\Gamma(t_1)\cdot\Gamma(t_2)\cdots\Gamma(t_n)/\Gamma(t_1+t_2+\cdots+t_n).\end{aligned}\tag{*}$$

50. $f(x)=\int_x^{x+1}\ln\Gamma(t)\mathrm{d}t=x(\ln x-1)+\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$, $x>0$.

51. 试求 $I=\int_0^1\dfrac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x$.

52. 试证明 $I(t)=\int_1^{+\infty}\dfrac{x\sin(tx)}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $t\in(0,\infty)$ 上不一致收敛.

53. 设 $F(x)=\int_0^x\left(1+\dfrac{x-t}{1!}+\dfrac{(x-t)^2}{2!}+\cdots+\dfrac{(x-t)^n}{(n-1)!}\right)\mathrm{e}^{nt}\mathrm{d}t$,求 n 次导数 $F^{(n)}(x)$.

54. 计算下列积分:

(i) $I=\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x\,(a>0,b>0)$.

(ii) $I=\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x\,(a>0,b>0)$.

55. 试证明 $I=\iint\limits_{0<x<y<\pi}\ln|\sin(x-y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\pi^2\ln 2$.

56. 设 D 是由直线 $x+y=1$ 与坐标轴围成之区域,试求

$$I=\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln(1+y/x)}{\sqrt{1-xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

57. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:(x+1)^2+y^2\geqslant 9,(x-1)^2+y^2\geqslant 1\}$,计算

$$I=\iint\limits_D (x^3-3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

58. 计算椭球 $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\leqslant 1$ 的体积 V.

59. 试求和 $S=\sum_{k=1}^{\infty}1/k^2$.

60. 记 V_n 是 $\mathbf{R}^n$ 内以原点为中心,$r>0$ 为半径的球体体积,试证明 $V_n=\pi^{n/2}r^n/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$.

61. 设 $f\in C([0,1])$,$D^0=[0,1]^n$,试证明

$$I=\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\int\cdots\int\limits_{D^0} f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=f\left(\frac{1}{2}\right).$$

62. 设 $f(x,y)$在 $I=[a,b]\times[c,d]$上连续,令

$$F(x,y)=\int_c^y\int_a^x f(t,s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\quad(x,y\in I),$$

试证明 $F''_{xy}(x,y)=F''_{yx}(x,y),(x,y)\in I$.

63. 设半径为 $r>0$ 的球 B_r 之球心位于半径为 $R>0$ 的球 B_R 的球面上,试证明当 $r=4R/3$ 时,球 B_r 在球 B_R 内的表面积最大.

64. 试求曲线

$$L:\begin{cases}(x-y)^2=a(x+y), & (1)\\ x^2-y^2=9z^2/8 & (2)\end{cases}\quad(a>0)$$

从点$(0,0,0)$到点(x_0,y_0,z_0)($x_0>0$)的曲线段之弧长 S.

65. 设一光滑曲面 $S:z=f(x,y)((x,y)\in D)$之边界曲线为 C,区域 $D\subset\mathbf{R}^2$,$F(x,y,z)$及其偏导数在 S 与 C 上连续,试证明

$$\oint_{C^+}F(x,y,z)\mathrm{d}y=\iint\limits_S\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 S 的正侧面与 C 的正向按右手定则.

66. 设 $f(x)$在 $\mathbf{R}^1$ 上有连续导数，L 表示从点 $A(3,2/3)$到点 $B(1,2)$的直线段，试求

$$I=\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[yf(xy)-1]\mathrm{d}y.$$

67. 设 $P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^\lambda$，$Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^\lambda$，试问 λ 取何值时，向量 $P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 是 $f(x,y)$在 $x>0$ 半平面上的梯度.

68. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x^2+y^2>1\}$，试求 D 上可微函数 $f(x,y)$，$g(x,y)$，使得

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\quad((x,y)\in D).$$

此外请指出：不存在定义在 D 上的函数 $h(x,y)$，满足

$$f(x,y)=\frac{\partial h(x,y)}{\partial y},\quad g(x,y)=\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\quad((x,y)\in D).$$

69. 设 $f(t)$在$(-\infty,\infty)$上有连续的导数，记 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 的内侧，试求面积分

$$I=\iint_S\left[\frac{x}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^3\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[f\left(\frac{x}{y}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[\frac{-z}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

70. (i) 设 $u(x,y)$，$v(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数，且$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}((x,y)\in\mathbf{R}^2)$.试证明存在定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的 $f(x,y)$，满足

$$u(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\quad v(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\quad((x,y)\in\mathbf{R}^2).$$

(ii) 试证明不存在 $G=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$上的 $f(x,y)$，满足

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}\quad((x,y)\in\mathbf{R}^2).$$

71. 记 $B=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3: x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，又设光滑向量

$$\boldsymbol{F}=(F_1,F_2,F_3),\quad\boldsymbol{F}=(0,0,0)\quad(F_1,F_2,F_3\ \overline{\in}\ B).$$

且有 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$(散度)$=0$.试证明

(i) 对定义在 B 的一个邻域上的光滑函数 $f(x,y,z)$，有

$$\iiint_B(\nabla f)\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

(ii) $\iiint_B F_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

72. 设 $\boldsymbol{F}=(x^2+y-4)\boldsymbol{i}+3xy\boldsymbol{j}+(2xz+z^2)\boldsymbol{k}$，计算

(i) $\nabla\times\boldsymbol{F}$.

(ii) $\displaystyle\int_{\substack{x^2+y^2+z^2=16\\ z\geqslant 0}} (\nabla\times \boldsymbol{F})\mathrm{d}S$.

练习题解答

1. **证明** 考察 $\mathbf{R}^2$ 中以有理点(即两个坐标皆为有理数)为中心,且以 $1/k$ 为半径的开圆,记其全体为 B_k.易知每个 B_k 均为可数集.对每个满足 $B\cap F\neq\varnothing$ 的 $B\in B_k$,取 $B\cap F$ 中的一点,并记如此选出的点之全体为 F_k.因为 F_k 是 F 的可数子集,所以 $E=\bigcup\limits_{k\geqslant 1} F_k$ 也是 F 中的可数子集.由于 F 是闭集,故 $\overline{E}\subset F$.设 $a\in F$,且取定正整数 k,显然 a 含于某个球 $B\in B_k$ 内,而且 B 包含 F_k 的一个点,自然也就含 E 中一个点.因此,E 中有点距点 a 小于等于 $2/k$ 处.注意到取 $k\in\mathbf{N}$ 的任意性,我们有 $a\in\overline{E}$.从而得 $F\subset\overline{E}$,即 $F=\overline{E}$.

2. **证明** 反证法.若不存在如题中所述的 ε,则 K 中存在点列$\{X_n\}$,使得球列$\{B(X_n,1/n)\}$中的每个球均不包含在任一个 G_m 中.因为 K 是紧集,所以存在该点列的极限点:$X_0\in K$.由于$\{G_m\}$是 K 的覆盖,故存在 m_0,$\varepsilon>0$,使得 $B(X_0,\varepsilon)\subset G_{m_0}$.令 $1/N<\varepsilon/2$,并选 $n>N$,使得 $\|X_n-X_0\|<\varepsilon/2$.从而知 $B(X_n,1/n)\subset B(X_0,\varepsilon)\subset G_{m_0}$.这与$\{X_n\}$的选择矛盾.证毕.

3. **证明** 易知包含 K 的闭圆盘是很多的.设 P,Q 是 K 内两个点,显然这些圆的半径都要大于等于 $\overline{PQ}/2$($\overline{PQ}$表示线段 PQ 之长度).记这些圆的半径之下确界为 r_0,且取闭圆盘列$\{D_n\}$,它们的圆心列记为$\{O_n\}$,半径列记为$\{r_n\}$:$r_n\to r_0$ $(n\to\infty)$,且不妨假定圆心列$\{O_n\}$是收敛点列,其极限为点 O.现在令 D_0 是以圆心为 O 且半径为 r_0 的闭圆盘.

对 K 中任一点 z,自然有 $z\in D_n(n\in\mathbf{N})$.由此知线段长$\overline{O_nz}\leqslant r_n(n\leqslant\mathbf{N})$,且得

$$\overline{Oz}=\lim_{n\to\infty}\overline{O_nz}\leqslant\lim_{n\to\infty}r_n=r_0.$$

即 $z\in D_0$,$K\subset D_0$.显然,不存在小于 r_0 为半径的闭圆盘能包含 K.

4. **证明** 设 $f(t)=(f_1(t),f_2(t))$,则易知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f(t)\|^2=2f_1(t)f_1'(t)+2f_2(t)f_2'(t)\quad(-1<t<1).\qquad(*)$$

假定 $t>0$,由于 $f_1(0)=0=f_2(0)$,故存在:$0<\xi_1$,$\xi_2<t$,使得

$$\begin{aligned}(*)\text{式右端}&=2[f_1(t)f_1'(t)-f_1(0)f_1'(t)+f_2(t)f_2'(t)-f_2(0)f_2'(t)]\\&=2[f_1'(\xi_1)f_1'(t)+f_2'(\xi_2)f_2'(t)].\end{aligned}$$

令 t 递减趋于 0,则由 f'的连续性可得

$$f_1'(\xi_1)f_1'(t)+f_2'(\xi_2)f_2'(t)\to\|f'(0)\|^2>0.$$

因此存在 $\delta>0$,使得$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|f(t)\|^2>0(0<t<\delta)$.由此即可得证.

5. **证明** 因为 f 非单射,所以存在 $\mathbf{R}^1$ 中的 $\alpha,\beta:\alpha\neq\beta$,使得 $f(\alpha)=f(\beta)$.下面指出 $\beta-\alpha$ 是 f 的周期.根据题设可知

$$f(\alpha+y)=g[f(\alpha),y]=g[f(\beta),y]=f(\beta+y),\quad y\in\mathbf{R}^1.$$

从而对任意的 $z\in\mathbf{R}^1$,取 $y=z-\alpha$,可得

$$f(z)=f[z+(\beta-\alpha)]\quad(z\in\mathbf{R}^1).$$

6. **证明** 易知 $g(x)$在$[a,b]$上一致连续,故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得

$$|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon\quad(x_1,x_2\in[a,b]\text{且}|x_1-x_2|<\delta).$$

从而对 $\|\Delta\|<\delta$时,我们有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n}\{F[f(\xi),g(\eta)]\Delta x_i-F[f(\xi),g(\xi)]\Delta x_i\}\right|\\ \leqslant&\sum_{i=1}^{n}|F[f(\xi),g(\eta)]-F[f(\xi),g(\xi)]|\Delta x_i\\ \leqslant&M\sum_{i=1}^{n}|g(\eta)-g(\xi)|\Delta x_i<M(b-a)\varepsilon.\end{aligned}$$

因此导出

$$\begin{aligned}&\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^{n}F[f(\xi),g(\eta)]\Delta x_i\\ =&\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^{n}F[f(\xi),g(\xi)]\Delta x_i=\int_a^bF[f(x),g(x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

7. **解** 记 E 是 G 中可数稠密子集(如有理点集),则令

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\overline{\in}E,\\ d(X,E^c), & X=(x,y)\in E\end{cases}$$

即可.

8. **证明** 因为 $f(x,y)$在 K 上一致连续,所以存在 $\delta>0$,使得对任意的 $M_1\geqslant0$,$\|X_1-X_2\|<\delta$,均有

$$\|f(X_1)-f(X_2)\|<\varepsilon+M_1\|X_1-X_2\|\quad(X_1=(x_1,y_1),X_2=(x_2,y_2)).$$

由 f 的有界性又可知,存在 $M_2>0$,使得

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M_2\quad((x_1,y_1),(x_2,y_2)\in K).$$

现在对 $\|X_1-X\|>\delta$,选定 $M_1=M_2/\delta$,我们有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant\delta M_1+M_1\|X_1-X_2\|.$$

9. **证明** (i) 设 $a\overline{\in}f(F)$,对 $r>0$,令 $I_r=[a-r,a+r]$,则依题设知 $f^{-1}(I_r)$是紧集.因为 F是闭集,所以 $F\cap f^{-1}(I_r)$是紧集.注意到

$$\bigcap_{r>0}[F\cap f^{-1}(I_r)]=F\cap f^{-1}(a)=\varnothing,$$

故存在 $r_0>0$,使得 $F\cap f^{-1}(I_{r_0})=\varnothing$.从而 $f(F)$与 a 的邻域 I_{r_0} 不相交.这说明 $f(F)$是闭集.

(ii) 作点集 $F_r=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2:\sqrt{x^2+y^2}\geqslant r\}$，则 $f(F_r)$是闭集.由此可知 $f(F_r)\cap K$ 是紧集.因为 f 是一一映射，而$\bigcap\limits_{r>0}[f(F_r)\cap K]=\varnothing$，所以存在 $r_0>0$，使得 $f(F_{r_0})\cap K=\varnothing$.从而$f^{-1}(K)$含于紧集 $\mathbf{R}^1\setminus F_{r_0}$ 内.根据 f 的连续性，得出 $f^{-1}(K)$是闭集，随之 $f^{-1}(K)$是紧集.

10. **证明**　(i) 若 K 不是有界集，则连续函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $((x,y)\in K)$ 不是有界的.这与题设矛盾，因此 K 是有界集.

(ii) 若 K 不是闭集，则存在点 $(x_0,y_0)\in \overline{K}\setminus K$.此时函数 $f(x,y)=1/\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ 在 K 上不有界.这与题设矛盾.因此 K 是闭集.

综合(i)与(ii)，K 是紧集.

11. **证明**　(i) 由题设知，存在 n_0，使得

$$|f_n(x,y)-f(x,y)|\leqslant 1 \quad (n\geqslant n_0,(x,y)\in K). \qquad (*)$$

又由 $f\in C(K)$可知 $f(K)$是有界集.因为每个 $f_n(K)$均为有界集，所以$\bigcup\limits_{n=1}^{n_0}f_n(K)$是有界集.注意到式(*)，就能说明 E 是有界集.

(ii) 设$\{z_i\}$是 E 中以 z_0 为极限点的点列，易知如果此点列中有无穷多项含于 $f(K)$或含于某个 $f_{n_0}(K)$，那么 z_0 也含于同一点集(注意，$f(K)$，$f_{n_0}(K)$均为紧集).如果不是这样，则可假定(或抽子列)

$$z_i\in f_{n_i}(K) \quad (n_1<n_2<\cdots,i\in \mathbf{N}),$$

不妨又设 $z_i=f_{n_i}(x_i,y_i)$.因为 K 是紧集，所以可以认定(或抽子列)$\lim\limits_{i\to\infty}(x_i,y_i)=(x_0,y_0)$.从而我们有

$$\begin{aligned}|z_0-f(x_0,y_0)|\leqslant &|z-f_{n_i}(x_i,y_i)|+|f_{n_i}(x_i,y_i)-f(x_i,y_i)|\\&+|f(x_i,y_i)-f(x_0,y_0)|\to 0 \quad (i\to\infty).\end{aligned}$$

这说明 $z_0=f(x_0,y_0)$，即 E 是闭集.

12. **证明**　由中值定理可知，存在 $0<\theta_1,\theta_2<1$，使得

$$\begin{aligned}\Delta f&=[f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y+h_2)]+[f(x,y+h_2)-f(x,y)]\\&=h_1f'_x(x+\theta_1h_1,y+h_2)+h_2f'(x,y+\theta_2h_2).\end{aligned}$$

又根据偏导数的连续性，得到

$$\Delta f=h_1[f'_x(x,y)+\alpha_1]+h_2[f'_y(x,y)+\alpha_2],$$

其中，在 $h=(h_1^2+h_2^2)^{1/2}\to 0$ 时有 $\alpha_1\to 0$，$\alpha_2\to 0$.因此，我们有

$$\Delta f=\mathrm{d}f+\alpha h=\mathrm{d}f+\alpha_1h_1+\alpha_2h_2.$$

而由 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$在 D 上是一致连续的，以及 $f'_x(x+\theta_1h_1,y+h_2)=f'_x(x+h_1,y+h_2)+\alpha_1$，可知当 $h\to 0$ 时，α_1 在 D 上是一致趋于零的，α_2 也同此理.

13. **证明**　由中值定理知，存在 θ：$0<\theta<1$，使得 $I_h=f'_x(x+\theta h,y)$.因为 $f'_x(x,y)$在 D 上一致连续，所以极限$\lim\limits_{h\to 0}f'_x(x+\theta h,y)=f(x,y)$在 D 上是一致的.

14. **解** (ii)否!例为 $f(x,y)=xy^2/(x^2+y^2)((x,y)\neq(0,0),f(0,0)=0)$,则 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上处处连续.因为

$$\lim_{t\to0}\frac{f[(0,0)+t(x,y)]-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}t\frac{xy^2}{x^2+y^2}=0,$$

所以 f 在$(0,0)$处的所有方向导数均存在且其值为 0.从而应有 $f(x,y)=o(\sqrt{x^2-y^2})((x,y)\to(0,0))$.但这与下述结论矛盾:

$$\lim_{\substack{x=y\\(x,y)\to(0,0)}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{2x^2\sqrt{2x^2}}\neq0.$$

15. **证明** 对于点(x_1,y_1),(x_2,y_2),可由多个直线段连接,其中每个折线平行于坐标轴.应用中值公式于每个线段,可得

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|).$$

从而又导出

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M\cdot\sqrt{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

16. **证明** 设$\{(x_n,y_n)\}\subset\mathbf{R}^2$ 是收敛于$(0,0)$的点列,则对 $\varepsilon>0$,存在 N,使得

$$|x_n-x_m|<\varepsilon/4M,\quad |y_n-y_m|<\varepsilon/4M\quad(n,m>N).$$

作连接点(x_n,y_n)到(x_m,y_m)的折线段(每个平行于坐标轴).若该路径不过原点,则如前题知

$$|f(x_n,y_n)-f(x_m,y_m)|<M(|x_n-x_m|+|y_n-y_m|)<\varepsilon;$$

若其中某个折线段经过原点,则可稍作移动(同方向移)$\varepsilon/4M$,也可得出

$$|f(x_n,y_n)-f(x_m,y_m)|<M(|x_n-x_m|+|y_n-y_m|)+2M\frac{\varepsilon}{4M}\leqslant\varepsilon.$$

由此可知,无论发生何种情形,$\{f(x_n,y_n)\}$是收敛列(对其它收敛于$(0,0)$的点列$\{(s_n,t_n)\}$,也可类推),且$\{f(s_n,t_n)\}$收敛于同一值.这就使我们可以定义 f 在原点的值且使 f 在原点连续.

注 注意在 $\mathbf{R}^1$ 中的反例:$f(x)=1(x<0)$,$f(x)=0(x>0)$.

17. **证明** 用极坐标写出:$f(r,\theta)=r^\lambda g(\theta)$,Laplace 算符为

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}0=\Delta(r^\lambda g(\theta))&=\lambda(\lambda-1)r^{\lambda-2}g(\theta)+\lambda r^{\lambda-2}g(\theta)+r^{\lambda-2}g''(\theta)\\&=r^{\lambda-2}[\lambda^2g(\theta)+g''(\theta)].\end{aligned}$$

从而可知 g 是方程 $g''+\lambda^2g=0$ 之解,且易知其一般解为 $g(\theta)=a\cos(\lambda\theta)+b\sin(\lambda\theta)$.因为 $g(\theta)$是以 2π 为周期的函数,所以 λ是整数.

18. **证明** 将原不等式改写为

$$\ln\ln a+a\ln b>\ln\ln b+b\ln a,$$

且记 $y=\ln b>0$，$x=\ln a/\ln b>1$，从而只需指出

$$\ln x > y(x\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{xy}) \quad (x>1, y>0).$$

作二元函数 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{xy}$，易知 $f'_y(x,y)=x\mathrm{e}^{y}-x\mathrm{e}^{xy}<0$. 由此知 $f(x,y)$对变量 y 是递减函数，故 $f(x,y)<f(x,0)=x-1$.

(i) 若 $f(x,y)\leqslant 0$，则 $\ln x>yf(x,y)=y(x\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{xy})$.

(ii) 若 $f(x,y)>0$，即 $f(x,y)=\mathrm{e}^{y}[x-\mathrm{e}^{(x-1)y}]>0$. 从而得 $x>\mathrm{e}^{(x-1)y}$，或写成 $\ln x>(x-1)y$. 我们有

$$\ln x>(x-1)y>yf(x,y).$$

综合(i)，(ii)即得所证.

19. **证明** (i) 由齐次条件可知

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=kf,\quad x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}=kf.$$

从而得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(xf+yg)&=f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y+x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+y\left(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\\&=f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y+\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x+\left(x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\\&=(k+1)(f\mathrm{d}x+g\mathrm{d}y),\quad (x,y)\in\mathbf{R}^2.\end{aligned}$$

(ii) 若定义在$[a,b]$上的 $y=h(x)$满足式(*)，则 $\varphi(x)=xf(x,h(x))+yg(x,h(x))$满足 $\mathrm{d}\varphi=0$. 这说明 $\varphi\equiv C$(常数). 即 $y=h(x)$满足 $xf+yg=C$.

20. **解** 如果真有如题所述之积分因子，那么式

$$h(xy)f(x,y)\mathrm{d}x+h(xy)g(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

为微分形. 即必有

$$\frac{\partial}{\partial y}[h(xy)f(x,y)]=\frac{\partial}{\partial x}[h(xy)g(x,y)], \tag{2}$$

$$xh'f+h\frac{\partial f}{\partial y}=yh'g+h\frac{\partial g}{\partial x}, \tag{3}$$

$$\frac{h'}{h}=\frac{1}{xf-yg}\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right), \tag{4}$$

其中假定 $h(xy)\neq 0$，$xf-yg\neq 0$. 显然式(4)右端是 xy 的函数，故存在函数 $R(t)$，

$$\frac{1}{xf-yg}\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)=R(xy).$$

反之，若存在如上所述之 $R(t)$，则积分因子为 $h(xy)=\mathrm{e}^{\int_0^{xy}R(t)\mathrm{d}t}$. 它是满足式(2)的.

21. **证明** 由 $f'_x(0,0)=0$，$f'_y(0,0)=0$ 可知 $\mathrm{d}f=0$，故若 $f(x,y)$在点(0,0)

处可微,则 $\Delta f = f(h_1, h_2) - f(0,0) = \alpha h\left(h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)$,其中当 $h \to 0$ 时有 $\alpha \to 0$.

但是,在 $\Delta f = \sqrt{|h_1 h_2|} = \alpha h$ 在第一象限中沿夹角 θ_0 的直线上的 h 趋于零时,α 并不趋于零.这是因为此时我们有 $h_1 = h\cos\theta_0$, $h_2 = h\sin\theta_0$, $h\sqrt{\sin\theta_0\cos\theta_0} = \alpha h$,从而导出 $\alpha = \sqrt{\sin\theta_0\cos\theta_0}$.因此可得,$\alpha$ 是与 h_1, h_2 无关的正数.这说明 $f(x,y)$ 在原点不可微.

22. **解** 改写原等式为

$$F(x,y) = \left\{\int_0^{xy} + \int_{xy}^1\right\} f(t)\,|\,xy - t\,|\,\mathrm{d}t$$
$$= xy\int_0^{xy} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{xy} tf(t)\mathrm{d}t + xy\int_1^{xy} f(t)\mathrm{d}t - \int_1^{xy} tf(t)\mathrm{d}t,$$

由此易知 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2y^2 f(xy)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2x^2 f(xy)$.

23. **证明** 反证法.假定结论不真,则对一列正数 $\{\delta_n\}$: $\delta_n \to 0\ (n \to \infty)$,均有

$$(x_n, y_n) \in D,\quad t_n^{(1)}, t_n^{(2)} \in I_n = (t_0 - \delta_n, t_0 + \delta_n)\ (n \in \mathbf{N}),$$
$$t_n^{(1)} \neq t_n^{(2)}\ (n \in \mathbf{N}),\quad \lim_{n\to\infty} t_n^{(i)} = t_0\ (i = 1, 2),$$
$$f(x_n, y_n, t_n^{(1)}) = f(x_n, y_n, t_n^{(2)}) = 0\ (n \in \mathbf{N}),$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0) \in D.$$

而由连续性可知

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n, t_n^{(i)}) = f(x_0, y_0, t_0) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

注意到 $F(x_0, y_0, t_0) > 0$,故必有 $f'(x_0, y_0, t_0) \neq 0$.

此外,在等式 $f(x_n, y_n, t_n^{(1)}) = f(x_n, y_n, t_n^{(2)})$ 中应用 Rolle 定理,就有位于 $t_n^{(1)}$ 与 $t_n^{(2)}$ 之间的点 t_n,使得 $f_t'(x_n, y_n, t_n) = 0\ (n \in \mathbf{N})$,以及 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$.再根据 $f_t'(x, y, t)$ 的连续性,又有

$$\lim_{n\to\infty} f_t'(x_n, y_n, t_n) = f_t'(x_0, y_0, t_0) = 0.$$

导致矛盾.证毕.

24. **证明** 求出偏导数.可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = xf\left(\frac{x+y}{xy}\right) + xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right).$$

由此可知

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right)(x - y) = (x - y)z.$$

从而只需认定 $F(x,y) = x - y$ 即可得证.

25. **解** 在(2)式对 x 求导两次,可得

$$af'_x(ax,bx)+bf'_y(ax,bx)=a,$$

$$a^2f''_{x^2}(ax,bx)+2abf''_{xy}(ax,bx)+b^2f''_{y^2}(ax,bx)=0. \tag{4}$$

又在式(3)对 x 求导可知

$$af''_{x^2}(ax,bx)+bf''_{xy}(ax,bx)=2bx. \tag{5}$$

由(1)及(4)导得

$$f''_{xy}(ax,bx)=0. \tag{6}$$

将其代入式(5),我们有 $f''_{x^2}(ax,bx)=2bx/a$.再将此代入(1),最后有 $f''_{y^2}(ax,bx)=-2ax/b$.

26. **证明** 易知 $z'_x=H'[f(x)+g(y)]f'(x)$,$z'_y=H'[f(x)+g(y)]g'(y)$,故可得 $\ln[z'_x(x,y)/z'_y(x,y)]=\ln[f'(x)/g'(y)]$.由此就有

$$I=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}[\ln f'(x)-\ln f'(y)]=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{g''(y)}{g'(y)}\right]=0.$$

27. **证明** 令 $\Delta_x(x_1,y_1,x_2,y_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_2,y_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_1,y_1)$,其中 (x_1,y_1),$(x_2,y_2)\in D$.注意到 $f'_x(x,y)$可微,故可知

$$\Delta_x(a,b,a+\varepsilon,b+\eta)=\varepsilon f''_{xx}(a,b)+\eta f''(a,b)+\delta(\varepsilon,\eta), \tag{1}$$

其中 $\delta(\varepsilon,\eta)/\sqrt{\varepsilon^2+\eta^2}\to0(\varepsilon,\eta\to0)$.此外,式(1)左端为

$$\Delta_x(a+\varepsilon,b,a+\varepsilon,b+\eta)+\Delta_x(a,b,a+\varepsilon,b)$$

$$=\Delta_x(a+\varepsilon,b,a+\varepsilon,b+\eta)+\varepsilon f''_{xx}(a,b)+\delta_1(\varepsilon), \tag{2}$$

其中 $\delta_1(\varepsilon)/\varepsilon\to0(\varepsilon\to0)$.结合式(1)与(2),得

$$\Delta_x(a+\varepsilon,b,a+\varepsilon,b+\eta)=\eta f''_{yx}(a,b)+\delta_2(\varepsilon,\eta).$$

类似地考察$\frac{\partial f}{\partial y}$,即换 x 为 y,也得

$$\Delta_y(a,b+\eta,a+\varepsilon,b+\eta)=\varepsilon f''_{xy}(a,b)+\delta_3(\varepsilon,\eta),$$

这里的 $\delta_2(\varepsilon,\eta)$,$\delta_3(\varepsilon,\eta)$的性态与 $\delta(\varepsilon,\eta)$同.

因为 $F(y)=f(a+\varepsilon,y)-f(a,y)$在$(b,b+\eta)$上可导,所以由中值定理可知

$$F(b+\eta)-F(b)=\eta F'(b+\theta\eta)=\eta\Delta_y(a,b+\theta\eta,a+\varepsilon,b+\theta\eta)\quad(0<\theta<1).$$

由此导出

$$\Delta=f(a+\varepsilon,b+\eta)-f(a,b+\eta)-f(a+\varepsilon,b)+f(a,b)$$

$$=\varepsilon\eta f'_{xy}(a,b)+\eta\delta_3(\varepsilon,\theta\eta)\quad(\theta\text{与}\varepsilon,\eta\text{有关}).$$

类似地还可导出

$$\Delta=\varepsilon\eta f''_{yx}(a,b)+\varepsilon\delta_2(\theta'\varepsilon,\eta),\quad 0<\theta'<1.$$

总之,我们有(取 $\varepsilon=\eta$且令 $\varepsilon\to0$)$f''_{xy}(a,b)=f''_{yx}(a,b)$.

28. **解** 令 $u=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$,则$\frac{\partial F}{\partial x_k}=f'(u)\frac{x_k}{u}(k=1,2,\cdots,n)$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2}=f'(u)\left(\frac{1}{u}-\frac{x_k^2}{u^2}\right)+f''(u)\frac{x_k^2}{u^2}\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

由此可知$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2}=\frac{n-1}{u}f'(u)+f''(u)$.根据题设可推得

$$(n-1)u^{n-2}f'(u)=u^{n-1}f''(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}[u^{n-1}f'(u)]=0.$$

从而我们有 $f'(u)=Cu^{-n+1}$(C是常数):

$$n=1,\quad f(u)=C_1u+C_2,$$
$$n=2,\quad f(u)=C_1\ln u+C_2,$$
$$n=3,\quad f(u)=C_1u^{-n+2}+C_2.$$

29. **证明** 例 $f(x,y,z)=1-x^2-y^2-z^2$.

30. **解** 改写 L 为$\begin{cases}x-2y=0,\\x+2z-7=0,\end{cases}$则过 L 的平面方程有表达式

$$(x-2y)+\lambda(x+2z-7)=0$$

或

$$(1+\lambda)x-2y+2\lambda z-7\lambda=0.$$

易知在 M_0 处之切平面的法向量为$\{2x_0,4y_0,6z_0\}$,而切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0,$$

或

$$x_0x+2y_0y+3z_0z-(x_0^2+2y_0^2+3z_0^2)=0.$$

由此可知 $x_0x+2y_0y+3z_0z-21=0$.我们有

$$\frac{x_0}{1+\lambda}=\frac{2y_0}{-2}=\frac{3z_0}{2\lambda}=\frac{-21}{-7\lambda}=t,$$

且得出 $\lambda t=3,z_0=2,y_0=-t,x_0=t(1+\lambda)=t+3$.将此代入原方程,又知

$$(t+3)^2+2(-t)^2+3\cdot2^2=21\quad 或\quad t^2+2t=0.$$

由此导致 $t_1=0$ 或-2,因此切平面方程为

$$\pi:x+2z-7=0\quad 与\quad x+4y+6z-21=0.$$

31. **解** (i) 记含 L 的平面束方程为

$$(x-z-2)+\lambda(y-2z+4)=0,$$

或

$$x+\lambda y-(1+2\lambda)z-2+4\lambda=0.$$

为求其中与平面 Σ垂直者,须有 $1\times1+1\times\lambda+(-1)\times(-1-2\lambda)=0$,即 $\lambda=-2/3$.由此导出过 L 之平面为

$$3x-2y+z-14=0.$$

现在取 L'的方向向量为

$$L':\{1,1,-1\}\times\{3,-2,1\}=\{-1,-4,-5\},$$

可知其方向余弦为

$$\cos\alpha=-1/\sqrt{42},\quad \cos\beta=-4/\sqrt{42},\quad \cos\gamma=-5\ \sqrt{42}.$$

(ii) 由$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-y\sin(2xy)$,$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-x\sin(2xy)+1/z^2$,$\dfrac{\partial u}{\partial z}=-2y/z^3$ 可知$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=0$,$\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=1/(24)^2$,$\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=-38/(24)^3$.从而得到$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}=94/(24)^3\ \sqrt{42}$.

32. **解**　显然,■$h(x,y)=(g'(x)g(y),g'(y)g(x))$,且由题设知(至少对$(x,y)\neq 0$),■$h(x,y)$必是$(x,y)$的常数倍,故有

$$\frac{g'(x)g(y)}{x}=\frac{g'(y)g(x)}{y},\quad \frac{g'(x)}{xg(x)}=\frac{g'(y)}{yg(y)}\quad (xy\neq 0).$$

由此推得 $g'(x)/xg(x)=C$(常数),且导出 $g(x)=Ae^{cx^2/2}$.因为 $g(x)>0(x\in\mathbf{R}^1)$,所以 $A>0$.易知任一如此之 $g(x)$均满足要求.

33. **证明**　考察由 $F(x,y)=(f(x),-y+xf(x))$定义的映射 $F:\mathbf{R}^2\mapsto\mathbf{R}^2$,则 F在点(x_0,y_0)处的雅可比行列式为$-f'(x_0)\neq 0$.故由逆映射定理,易知 F在(x_0,y_0)的一个邻域内是可逆的.类似地,f 在 x_0 附近有一个局部的逆 g.从而在点(x_0,y_0)的一个充分小的邻域中对 F^{-1}的每个分量明显有解 $g(u)=g[f(x)]=x$,以及

$$y=-v+xf(x)=-v+g(u)f[g(u)]=-v+ug(u).$$

34. **证明**　不妨假定 f 不是一个常数,由此知存在点(x_0,y_0),使得

$$\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)\neq(0,0).$$

设$\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\neq 0$(否则可旋转坐标轴),且记 $z_0=f(x_0,y_0)$,并考察 $F(x,y)=(f(x,y),y)$.易知 F的雅可比行列式在(x_0,y_0)处不为 0.根据逆映射定理,知 F局部的逆 G(在(a,y_0)的一个邻域内).我们有

$$F[G(a,y_0)]=(a,y)\quad (y\text{ 含于某个包含 }y_0\text{ 的闭区间 }I).$$

记 $j(t)$是从$[0,1]$映到 I上的任意的一一映射,则函数 $g(t)=G(a,j(t))(t\in[0,1])$满足要求.

35. (i) **证明**　易知 T的雅可比矩阵的行列式不等于 0,故 T是局部可逆的一一映射.

(ii) **解**　考察限于 $u^2+v^2=y$ 的函数 $f(u,v)=u+v$,易知$-\sqrt{2y}\leqslant u+v\leqslant\sqrt{2y}$.因此,$T$的值域为

$$D=\{(x,y):y>0,-\sqrt{2y}\leqslant x\leqslant\sqrt{2y}\}.$$

设$(x,y)\in D$,$u+v=x$ 是 u-v 平面中斜率为-1的直线方程,且与以原点为中

心以$\sqrt{y}$为半径的圆周 $u^2+v^2=y$ 相交.它们确实在 G 内一点相交,从而 T 是大范围单射.

36. **证明** 记 S 为 f 的奇点集,则 $\mathbf{R}^2=f(S)\cup(\mathbf{R}^2\setminus f(S))$.故只需指出:映射 f 把 $G=\mathbf{R}^2\setminus f^{-1}[f(S)]$映射到整个 $\mathbf{R}^2\setminus f(S)$上.由(i)知 $\mathbf{R}^2\setminus f(S)$是连通的.因为 $f(S)$是闭集,G 是开集,所以又只需指出:$f(G)$在 $\mathbf{R}^2\setminus f(S)$内既是开集也是闭集.

首先,根据 $G\cap S=\varnothing$以及逆映射定理,可知 f 在 G 内每一点的一个邻域中是可逆的.从而在局部 f 是开映射.因为开集的并仍是开集,所以 $f(G)$是开集.

其次,设 X_0 是 $f(G)$在 $\mathbf{R}^2\setminus f(S)$内的聚点,而$\{X_n\}$是 $f(G)$中收敛到 X_0 的点列.因为$\{X_n\}$是有界列,所以由题设知点列$\{f^{-1}(X_n)\}$是有界的.现在设 $Y_n=f(X_n)(n\in\mathbf{N})$,它是有界点列,也有聚点,记为 Y_0.根据 f 的连续性,可得 $Y_0=f(X_0)$.注意到 $Y_0\overline{\in}f(S)$,$X_0\overline{\in}f^{-1}[f(S)]$,故有 $Y_0\in f(G)$.这说明 $f(G)$是 $\mathbf{R}^2\setminus f(S)$中的闭集.

37. **证明** 易知 $f(\mathbf{R}^2)$是连通集,注意到 $f(\mathbf{R}^2)\neq\varnothing$,故只需指出:$f(\mathbf{R}^2)$既是开集又是闭集即可.

(i) 设$(s,t)=f(x,y)\in f(\mathbf{R}^2)$.由题设以及逆映射定理可知,存在点$(x,y)$的邻域 U 以及(s,t)的邻域 V,使得 $f|_U:U\mapsto V$ 是微分同胚.从而 V 是点(s,t)的开邻域.这说明 $f(\mathbf{R}^2)$是开集.

(ii) 设 $Y_n=(s_n,t_n)(n\in\mathbf{N})$是 $f(\mathbf{R}^n)$中收敛到点 $Y_0=(s_0,t_0)$的点列,且令 $X_n=(x_n,y_n)$,$f(x_n,y_n)=(s_n,t_n)$,由 $K=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_n\cdots\}$是紧集可知,$f^{-1}(K)$也是紧集.但$\{X_n\}\subset f^{-1}(K)$,于是它含有一个收敛子列$\{X_{n_j}\}$:$\lim\limits_{j\to\infty}X_{n_j}=\lim\limits_{j\to\infty}(x_{n_j},y_{n_j})=(x_0,y_0)$.因为 f 连续,所以$\lim\limits_{j\to\infty}f(x_{n_j},y_{n_j})=f(x_0,y_0)$.注意到$\lim\limits_{j\to\infty}(s_{n_j},t_{n_j})=(s_0,t_0)$.这说明 $f(\mathbf{R}^n)$是闭集.

38. **证明** 由 $F_x'=0=F_y'$可知

$$(ax^2+2bxy+cy^2)/(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2)=(ax+by)/(\alpha x+\beta y),\qquad(1)$$

$$(ax^2+2bxy+cy^2)/(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2)=(bx+cy)/(\beta x+\gamma y).\qquad(2)$$

从而得到

$$\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}=\frac{bx+cy}{\beta x+\gamma y}=\lambda=\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2}.$$

由此导出方程组

$$\begin{cases}ax+by=\lambda(\alpha x+\beta y),\\ bx+cy=\lambda(\beta x+\gamma y).\end{cases}$$

从中解出(x_0,y_0),我们有

$$\begin{cases}(a-\lambda\alpha)x_0=(\lambda\gamma-b)y_0,\\ (b-\lambda\beta)x_0=(\lambda\gamma-c)y_0,\end{cases}\quad\frac{ax_0^2+2bx_0y_0+cy_0^2}{\alpha x_0^2+2\beta x_0y_0+\gamma y_0^2}=\lambda,$$

最后得到$(b^2-ac)+(a\gamma+c\alpha-2b\beta)\lambda+(\beta^2-\alpha\gamma)^2\lambda^2=0$.

39. **解** 不妨令三角形的各边长为 x,y,z,其中 $x+y+z=2p$.如果是绕边长为 x 的边旋转,那么其旋转体体积为 $V=\pi h^2x/3$,其中 h 为相对边长为 x 的该三角形的高.从三角形的面积公式 $S=ah/2=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$中解出 h 并代入 V 可得

$$V=4\pi p(p-x)(p-y)(p-z)/3x.$$

为求 V 的最大值,我们考察函数

$$u=f(x,y,z)=(p-x)(p-y)(p-z)/x$$

在条件 $x+y+z=2p(x>0,y>0,z>0)$下的最大值.为此,作辅助函数

$$F(x,y,z)=\frac{(p-x)(p-y)(p-z)}{x}+\lambda(x+y+z-2p)$$

并解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{1}{p-x}-\dfrac{1}{x}+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=-\dfrac{1}{p-y}+\lambda=0, \qquad\qquad x+y+z=2p.\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=-\dfrac{1}{p-z}+\lambda=0,\end{cases}$$

易知其解为 $x=p/2,y=z=3p/4$,从而体积之最大值为 $V=\pi p^3/12$.这说明当三角形的三边长各为 $p/2,3p/4,3p/4$,且是绕边长为 $p/2$ 的边旋转时,其体积最大.

40. **证明** 首先指出:存在 $u_0\in S_1,v_0\in S_2$,使得 $d(u_0,v_0)=d(S_1,S_2)$,其中

$$d(S_1,S_2)=\inf\{d(u,v):u\in S_1,v\in S_2\}.$$

我们定义 S_1 上的函数

$$f_1(u)=d(u,S_2)=\inf\{d(u,v):v\in S_2\}\quad(u\in S_1),$$

它是连续的,且在紧集 S_1 上达到下确界值,即存在 $u_0\in S_1$,使得 $d(u_0,S_2)=d(S_1,S_2)$;又定义在 S_2 上的函数 $f_2(v)=d(u_0,v)(v\in S_2)$,当然也是连续的.若令紧集

$$S_2'=\{v=(r,s,t)\in S_2:d(u_0,v)\leqslant d(S_1,S_2)+1\},$$

则$\inf\limits_{v\in S_2}\{f_2(v)\}=\inf\limits_{v\in S_2'}\{f_2(v)\}$.因此存在 $v_0\in S_2'\subset S_2$,使得 $d(u_0,v_0)=d(u_0,S_2)=d(S_1,S_2)$.注意到,若$(x,y,z)\in S_1$,则 $z\geqslant 9$;若$(x,y,z)\in S_2$,则 $z\leqslant 1$.因此 $u_0\neq v_0$.

现在,S_1 与 S_2 各为

$$g_1(x,y,z)=2x^2+(y-1)^2+(z-10)^2,$$
$$g_2(x,y,z)=z(x^2+y^2+1)$$

的水平截集.我们定义

$$F(x,y,z,r,s,t)=(x-r)^2+(y-s)^2+(z-t)^2,$$
$$\varphi(x,y,z,r,s,t)=g_1(x,y,z),$$

$$\varphi_2(x,y,z,r,s,t)=g_2(r,s,t),$$

则 $S_1\times S_2=\{(\xi,\eta)\in\mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3:\varphi_1(\xi,\eta)=1,\varphi_2(\xi,\eta)=1\}$.前面指出,存在$(u_0,v_0)\in S_1\times S_2$,它是 F 在 $S_1\times S_2$ 上之最小值点.对$(\xi,\eta)\in S_1\times S_2$,两向量

$$\nabla\varphi_1(\xi,\eta)=(\nabla g_1(\xi,\eta),0),\quad \nabla\varphi_2(\xi,\eta)=(0,\nabla g_2(\eta))$$

是线性无关的.根据 Lagrange 乘子定理,存在 λ,μ,使得

$$\nabla F(u_0,v_0)=\lambda\nabla\varphi_1(u_0,v_0)+\mu\nabla\varphi_2(u_0,v_0).$$

我们有 $\nabla F(u_0,v_0)=(2(u_0-v_0),-2(u_0-v_0))$,以及

$$\begin{aligned}&\lambda\nabla\varphi_1(u_0,v_0)+\mu\nabla\varphi_2(u_0,v_0)\\&=\lambda(\nabla g_1(u_0),0)+\mu(0,\nabla g_2(v))=(\lambda\nabla g_1(u_0),\mu\nabla g_2(v_0)).\end{aligned}$$

从而导出 $\lambda\nabla g_1(u_0)/2=u_0-v_0=-\mu\nabla g_2(v_0)/2$.注意,$u_0-v_0$,$\nabla g_1(u_0)$与$\nabla g_2(v_0)$皆不等于 0,故向量 u_0-v_0 平行于 $\nabla g_1(u_0)$,$\nabla g_2(v_0)$.由此即可得证.

41. **证明** 令 $r^2=x^2+y^2+z^2$,$u=f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$,而考察函数 f 在 $x+y+z=0$,$x^2+y^2+z^2=r^2$ 的条件下的极值.因为 u 是连续可微的,所以其最大、最小值必在临界(驻)点处达到.令

$$F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-r^2)+\mu(x+y+z),$$

并解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=3x^2+2\lambda x+\mu=0, & x+y+z=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=3y^2+2\lambda y+\mu=0, & \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=3z^2+2\lambda z+\mu=0, & x^2+y^2+z^2=0,\end{cases}$$

易知 u 的最大值为 $r^3/\sqrt{6}$,最小值为 $-r^3/\sqrt{6}$.这就可导出

$$6u^2=6(x^3+y^3+z^3)^2\leqslant r^2=(x^2+y^2+z^2)^3.$$

42. **证明** 首先有 $|F_n(x)|\leqslant\left(\int_0^1(x+y)\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 f_n^2(y)\mathrm{d}y\right)\leqslant\sqrt{\dfrac{15}{2}}$.其次,易知 $\sqrt{x+y}$在$[0,1]\times[0,1]$上一致连续,故对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得$(x_1,x_2,y_1,y_2\in[0,1]^2)$

$$|\sqrt{x_1+y_1}-\sqrt{x_2+y_2}|<\varepsilon\quad(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|<\delta).$$

特别地,当$|x_1-x_2|<\delta$时有

$$|F_n(x_1)-F_n(x_2)|=\left|\int_0^1(\sqrt{x_1+y}-\sqrt{x_2+y})f_n(y)\right|\leqslant\varepsilon\int_0^1|f_n(y)|\mathrm{d}y\leqslant 5\varepsilon.$$

这说明$\{F_n(x)\}$在$[0,1]$上等度连续,从而可抽子列一致收敛.

43. **解** 易知 $\mathrm{e}^{-4t}f(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x+t/x)^2}\mathrm{d}x$,求导得

$$[f'(t)-4f(t)]e^{-4t}=-2\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{x^2}\right)e^{-(x+t/x)^2}dx.$$

令 $s=x-t/x$,又有

$$f'(t)-4f(t)=-2\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t}{x^2}\right)e^{-(x+t/x)^2}dx$$
$$=-2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds=-2\sqrt{\pi}.$$

由此可解出 $f(t)=ce^{4t}+\sqrt{\pi}/2$.注意到 $0<f(t)<(\sqrt{\pi}/2)e^{2t}$,故 $c=0$.从而我们有 $f(t)=(\sqrt{\pi}/2)e^{4t}$.

44. **证明**　由 $e^{-xt^2}<1$ 可知 $F(x)$在$[0,\infty)$上有定义,且积分关于 x 在任意的区间$[a,b]$上一致收敛($0\leqslant a<b<\infty$),$F\in C([a,b])$,令 $f(x,t)=e^{-xt^2}/(1+t^2)$,对任意 $t\geqslant 0$,有$\frac{\partial f}{\partial x}=-t^2e^{-xt^2}/(1+t^2)$,而且

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\leqslant e^{-\alpha t^2}\ (x\geqslant\alpha>0),\quad \int_0^{+\infty}e^{-\alpha t^2}dt<+\infty,$$

因此得到 $F'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}dt\ (x>0)$.

写出等式

$$F'(x)-F(x)=-\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}+\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right)dt$$
$$=-\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt=-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}\quad(x>0).$$

从而导出 $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=F(0)=\pi/2$.解此方程即可证得.

45. **解**　由于$\lim\limits_{\alpha\to\infty}[\ln(x+|\alpha|)/\ln(x^2+\alpha^2)]$,故若能指出积分是一致收敛的,就可在积分号下取极限.为此,对任给 $\varepsilon>0$ 以及任给 $x\in[1,2]$,当 $|\alpha|>(e^{1/\varepsilon}-1)^{1/2}$时可以导出

$$\left|\frac{\ln(x+|\alpha|)}{\ln(x^2+\alpha^2)}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{\ln[1+2x|\alpha|/(x^2+\alpha^2)]}{2\ln(x^2+\alpha^2)}\right|$$
$$\leqslant\frac{2|\alpha|}{(1+\alpha^2)\ln(x^2+\alpha^2)}\leqslant\frac{1}{\ln(1+\alpha^2)}<\varepsilon.$$

从而在积分号下求极限,我们有

$$I=\int_1^2\lim\frac{(x+|\alpha|)}{(x^2+\alpha^2)}dx=\int_1^2\frac{dx}{2}=\frac{1}{2}.$$

46. **证明**　作变换 $t=s/x$,则 $I(s)=I(t)$.由此易知

$$I(s)=2\int_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-x/s-1/x}}{x}dx.$$

注意到 $e^{-1/x}=1+O(s^{-1/2})$ $(s\to+\infty$,对 $x\geqslant s$ 是一致的),故可得

$$
\begin{aligned}
I(s)&=2\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right]\int_{\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-x/s}}{x}dx\\
&=2\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right]\int_{1/\sqrt{s}}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\\
&\xlongequal{\text{分部积分}}2\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right]\left(e^{-t}\ln t\Big|_{1/\sqrt{s}}^{+\infty}+\int_{1/\sqrt{s}}^{+\infty}e^{-t}\ln t\,dt\right)\\
&=2\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)\right][\ln s/2+O(1)]\quad(s\to+\infty),
\end{aligned}
$$

从而我们有 $I(s)=\ln s+O(1)\quad(s\to+\infty)$,得证.

47. **证明** 记 $\varphi_n(t)=(n^t n!)/t(t+1)\cdots(t+n)$,则根据部分分式展开可知

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(t)&=n^t\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{t+k}=n^t\int_0^1x^{t-1}(1-x)^n dx\\
&=\int_0^n s^{t-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)^n ds=\left(\int_0^{n^\varepsilon}+\int_{n^\varepsilon}^{n}\right)s^{t-1}\left(1-\frac{s}{n}\right)^n ds\\
&\triangleq J_1+J_2\quad(\varepsilon>0\text{ 且 }\varepsilon(t+2)<1).
\end{aligned}
$$

对 $0\leqslant s\leqslant n^\varepsilon$,可导出 $n\ln(1-s/n)=-s+O(n^{2\varepsilon-1})(n\to\infty)$.故 $J_1=\int_0^{n^\varepsilon}s^{t-1}e^{-s}ds+O(n^{\varepsilon(t+2)-1})(n\to\infty)$.

对 $n^\varepsilon\leqslant s\leqslant n$,存在 $a>0$,使得

$$n\ln(1-s/n)\leqslant n\ln(1-n^{\varepsilon-1})\leqslant-an^\varepsilon.$$

因此,$J_2=O(n^t\exp(-an^\varepsilon))\to0(n\to\infty)$.从而有

$$\varphi_n(t)\to\Gamma(t)\quad(n\to\infty).$$

48. **证明** 注意到 $\int_0^{+\infty}(\ln x)^\sigma x^{t-1}e^{-x}dx(\sigma>0)$关于 t 在紧集上一致收敛,故可对 t 在积分号下求导.从而知 $\Gamma(t)$之凸性可由 $\int_0^{+\infty}(\ln x)^2x^{t-1}e^{-x}dx>0$ 得证.

49. **证明** (i) 对 $n=2$,我们取定 $s>0$,令 $\Psi(t)=(\Gamma(t+s)/\Gamma(s))B(t,s)(t>0)$,显然 $\Psi(t)>0$ 且 $\Psi(1)=1$,更有

$$\Psi(t+1)=(t+s)\frac{\Gamma(t+s)}{\Gamma(s)}B(t+1,s)=t\Psi(t).$$

(分部积分,$B(t+1,s)=(t/s)B(t,s+1)=(t/s)B(t,s)-(t/s)B(t+1,s)$.)因为 $\Gamma(t+s)$以及 $B(t,s)$关于 t 是凸函数,所以 $\Psi(t)$是对数凸,且可推知 $\Psi(t)=\Gamma(t)$.

(ii) 对 $n>2$,应用归纳法,假定式(*)对 n 为真,在$(n-1)$维单形 Δ_{n-1} 中,对任一实数组:$(x_1,\cdots,x_{n-1})$作替换:$x_n=(1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1})s(0<s<1)$,则积分 $\int\cdots\int_{\Delta_n}x_1^{t_1-1}\cdots x_n^{t_n-1}(1-x_1-\cdots-x_n)^{t_{n+1}-1}dx_1\cdots dx_n$ 变成

$$\int\cdots\int_{\Delta_{n-1}} x_1^{t_1-1}\cdots x_{n-1}^{t_{n-1}-1}(1-x_1-\cdots-x_{n-1})^{t_n+t_{n+1}-1}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\times\int_0^1 s^{t_n-1}(1-s)^{t_{n+1}-1}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{\Gamma(t_1)\cdots\Gamma(t_{n-1})\Gamma(t_n+t_{n+1})}{\Gamma(t_1+\cdots+t_n+t_{n+1})}\frac{\Gamma(t_n)\Gamma(t_{n+1})}{\Gamma(t_n+t_{n+1})}.$$

这说明式(*)对 $n+1$ 也真,证毕.

50. **证明** 在公式两端对 x 求导,可得

$$f'(x)=\ln(\Gamma(x+1)/\Gamma(x))=\ln x.$$

由此知 $f(x)=x(\ln x-1)+C$(注意 $C=f(1)+1$).为求 C 值,引用 $\Gamma(t)$的公式可得

$$\ln\Gamma(t)=-\ln t+\lim_{n\to\infty}\left[t\ln n+\ln\left(\frac{1}{t+1}\right)+\cdots+\ln\left(\frac{n}{t+n}\right)\right],$$

可写成

$$\ln\Gamma(t+1)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[t\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\ln\left(\frac{t+k}{k}\right)\right] \qquad (*)$$

由关系式 $t\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\ln\left(\frac{t+k}{k}\right)=O\left(\frac{1}{k^2}\right)(k\to\infty)$,可知式(*)中级数对 $t\in[0,1]$ 是一致收敛的.因此可逐项积分,得到

$$\begin{aligned}f(1)&=\int_0^1\ln\Gamma(t+1)\mathrm{d}t\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln n-(n+1)\ln(n+1)+n+\ln n!\right]\\&=-1+\lim_{n\to\infty}A_n\quad\left(A_n=n+\ln n!-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n\right).\end{aligned}$$

因此,$C=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$,我们有

$$\begin{aligned}C&=\lim_{n\to\infty}(2A_n-A_{2n})=\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right)+\left(2n+\frac{1}{2}\right)\ln 2-\frac{1}{2}\ln n\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\frac{\sqrt[n]{n}\,n!}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n\right)}\right]\\&=\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2\pi},\quad C=\ln\sqrt{2\pi}.\end{aligned}$$

51. **解** 作函数 $f(x)=(x-1)/\ln x\,(0<x<1)$,$f(0)=0$,$f(1)=1$,则 $f\in C([0,1])$,而 $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.令 $I(\alpha)=\int_0^1(x^\alpha-1)/\ln x\mathrm{d}x$,则 $I'(\alpha)=\int_0^1 x^\alpha\mathrm{d}x=1/(1+\alpha)$.由此又知

$$I(\alpha)=\int\frac{\mathrm{d}\alpha}{1+\alpha}+C=\ln(1+\alpha)+C.$$

注意到 $I(0)=0$,故 $C=0$.从而有

$$I(\alpha)=\ln(1+\alpha),\quad I=I(1)=\ln 2.$$

52. **证明** 从等式$\dfrac{\sin(tx)}{x}=\dfrac{x\cdot\sin(tx)}{a^2+x^2}\cdot\dfrac{a^2+x^2}{x^2}$看,由于函数$(a^2+x^2)/x^2$ 是单调的,且有 $|1+a^2/x^2|\leqslant 1+a^2$,故若原积分一致收敛,则积分$\int_0^{+\infty}\sin(tx)/x\mathrm{d}x$ 一致收敛,将导致矛盾,证毕.

53. **解** 令 $G_k(x)=\int_0^x\dfrac{(x-t)^k}{k!}\mathrm{e}^{nt}\mathrm{d}t$,则

$$G_0(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{nt}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^{nx}-1}{n},\quad G_k'(x)=G_{k-1}(x)\quad(k=1,2,\cdots,n-1).$$

由此可知

$$\frac{\mathrm{d}^nG_k(x)}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}^{n-k}G_0(x)}{\mathrm{d}x^{n-k}}=n^{n-k-1}\mathrm{e}^{nx}\quad(n>k).$$

从而我们有

$$\begin{aligned}G^{(n)}(x)&=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[G_0(x)+G_1(x)+\cdots+G_{n-1}(x)]\\&=(n^{n-1}+n^{n-2}+\cdots+1)\mathrm{e}^{nx}=\begin{cases}(n^n-1)\mathrm{e}^{nx}/(n-1), & n\neq 1,\\ \mathrm{e}^x, & n=1.\end{cases}\end{aligned}$$

54. **解** 注意到$\int_a^b x^y\mathrm{d}y=(x^b-x^a)/\ln x$,可知

$$I_1=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}y,\quad I_2=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}y.$$

令

$$f_1(x,y)=\begin{cases}x^y\sin\left(\ln\dfrac{1}{x}\right), & 0<x\leqslant 1, a\leqslant y\leqslant b,\\ 0, & x=0, a\leqslant y\leqslant b,\end{cases}$$

$$f_2(x,y)=\begin{cases}x^y\cos\left(\ln\dfrac{1}{x}\right), & 0<x\leqslant 1, a\leqslant y\leqslant b,\\ 0, & x=0, a\leqslant y\leqslant b.\end{cases}$$

易知 f_1,f_2 是连续函数,故得到

$$I_1=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,\quad I=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

作变量替换 $x=\mathrm{e}^{-t}$,可导出

$$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1+y)t}\sin t\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(1+y)t}\cos t\mathrm{d}t.$$

从而我们有

$$I_1=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+(y+1)^2},\quad I_2=\int_a^b\frac{(y+1)\mathrm{d}y}{1+(y+1)^2}.$$

由此即得

$$I_1=\arctan\left(\frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}\right),\quad I_2=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}\right).$$

55. **解** 作变换 $x=-u/2+v/2$, $y=u/2+v/2$,则区域$\{0<x<y<\pi\}$与 $D=\{0<u<v<2\pi-u\}$对应,且 $J=1/2$,从而得

$$I=\frac{1}{2}\iint_D\ln|\sin u|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^\pi(\pi-u)\ln|\sin u|\,\mathrm{d}u.$$

注意到$(\pi/2-u)\ln|\sin u|$是关于 $u=\pi/2$ 的奇函数,故相应的在$(0,\pi)$上之积分等于零.因此

$$\begin{aligned}I&=\pi\int_0^{\pi/2}\ln|\sin u|\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\left\{\int_0^{\pi/2}\ln|\sin u|\,\mathrm{d}u+\int_0^{\pi/2}\ln|\cos u|\,\mathrm{d}u\right\}\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\ln|\sin(2u)|\,\mathrm{d}u-\frac{\pi^2}{4}=\frac{I}{2}-\frac{\pi^2}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

由此导出 $I=-\pi^2\ln 2/2$.

56. **解** 作变换 $x+y=u$, $y/x=v$,即 $x=u/(1+v)$, $y=uv/(1+v)$,易知

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1/(1+v) & -u/(1+v)^2\\ v/(1+v)^2 & u/(1+v)^2\end{vmatrix}=\frac{u}{(1+v)^2}.$$

从而我们有

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}v\int_0^1\frac{u^2\ln(1+v)}{(1+v)^2\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\mathrm{d}v\int_0^1\frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u}}=1\cdot\int_0^1\frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u}}\\&\xlongequal{1-u=t}\int_0^1\frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{16}{15}.\end{aligned}$$

57. **解** 注意到被积函数是全纯函数 $z^3=(x+\mathrm{i}y)^3$ 的实部,且是调和函数,故它在任一圆盘上积分值等于它在圆心的值乘以圆盘面积.因此令

$$D_1=\{(x,y):(x+1)^2+y^2\leqslant 9\},\quad D_2=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\geqslant 1\},$$

可得

$$I=\left(\iint_{D_1}-\iint_{D_2}\right)(x^3-3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-9\pi-\pi=-10\pi.$$

58. **解** 记 $\mathbf{R}^3$ 中的单位球为 B,又令 $f(x,y,z)=(ax,by,cz)$,则体积 V 是 B 在映射 f 下的象点集 $f(B)$的体积.由 f 的雅可比矩阵的行列式等于 abc,故得

$$V=\iiint_{f(B)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{B}abc\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc.$$

59. **解** 首先,易知该级数是收敛的.

其次,考察积分 $I=\int_0^1\int_0^1 1/(1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(i)注意到$\dfrac{1}{1-xy}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(xy)^k(0<x,y<1)$,故知

$$I=\int_0^1\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}(xy)^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1\int_0^1(xy)^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^1x^k\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1y^k\mathrm{d}y\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

(ii)对积分 I 作变量替换:$x=u-v,y=u+v$,可知

$$\frac{1}{1-xy}=\frac{1}{1-(u^2+v^2)},\quad\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=2.$$

$$I=4\int_0^{1/2}\left(\int_0^u\frac{\mathrm{d}v}{1-u^2+v^2}\right)\mathrm{d}u+4\int_{1/2}^1\left(\int_0^{1-u}\frac{\mathrm{d}v}{1-u^2+v^2}\right)\mathrm{d}u$$
$$=4\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\mathrm{d}u+4\int_{1/2}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\mathrm{d}u.$$

若令 $\varphi(u)=\arctan(u/\sqrt{1-u^2})$,$\psi(u)=\arctan((1-u)/\sqrt{1-u^2})$,则有 $\varphi'(u)=1/\sqrt{1-u^2}$,$\psi'(u)=-(1-u)/2\sqrt{1-u^2}$.从而得到

$$I=4\int_0^{1/2}\varphi'(u)\varphi(u)\mathrm{d}u+4\int_{1/2}^1(-2\psi'(u)\psi(u))\mathrm{d}u$$
$$=2\varphi^2(u)\Big|_0^{1/2}-4\psi^2(u)\Big|_{1/2}^1=2\varphi^2\left(\frac{1}{2}\right)-2\varphi^2(0)-4\psi^2(1)+4\psi^2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2-0+0+4\left(\frac{\pi}{6}\right)^2=\frac{\pi^2}{6}.$$

由此即可得证.

60. **证明** 令 $\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\mathrm{d}v$,$R^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$,易知

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-R^2}\mathrm{d}v.$$

记 $V=C\cdot R^n$(C 是正比常数),由此可得 $\mathrm{d}V=nC\cdot R^{n-1}\mathrm{d}R$,$(\Gamma(1/2))^n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-R^2}nC\cdot R^{n-1}\mathrm{d}R$.令 $u=R^2$,我们有$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-R^2}nC\cdot R^{n-1}\mathrm{d}R=nC\cdot\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)/2$.注意到 $\Gamma(1/2)=\pi^{1/2}$,故知 $C=(\pi^{n/2})/\Gamma(n/2+1)$.这说明 $V_n=\pi^{n/2}R^n/\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$.

61. **证明** 令 $u_n=(x_1+\cdots+x_n)/n$,$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$,则

$$\int\cdots\int_{D_n^0} u_n \mathrm{d}v = \frac{1}{2},\quad J_n = \int\cdots\int_{D_n^0}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}v = \frac{1}{12n}.$$

取正数列 $C_n = 1/n^{1/3}$，且令 $D_n' = \{(x_1,\cdots,x_n)\in D^0 : |u_n - 1/2| \geqslant C_n\}$，易知

$$\frac{1}{12n} = J_n \geqslant C_n^2\cdot\int\cdots\int_{D_n'}\mathrm{d}v,\quad \int\cdots\int_{D_n'}\mathrm{d}v \leqslant \frac{1}{12nC_n^2}.$$

注意到上式右端在 $n\to\infty$ 时趋于 0，故对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n\geqslant N$ 时有(注意 $|u_n - 1/2| < 1/n^{1/3}$)

$$|f(u_n) - f(1/2)| < \varepsilon\quad ((x_1,\cdots,x_n)\in D_n^0\backslash D_n').$$

从而我们有($M = \max\limits_{[0,1]}\{|f(x)|\}$)

$$\begin{aligned}&\left|\int\cdots\int_{D_n^0} f(u_n)\mathrm{d}v - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\\ \leqslant&\left[\int\cdots\int_{D_n'} + \int\cdots\int_{D_n^0\backslash D_n'}\right]\left|f(u_n) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|\mathrm{d}v \leqslant \frac{M}{6n^{1/3}} + \varepsilon.\end{aligned}$$

现在只需取 N 充分大，使 $n\geqslant N$ 时有 $M/6n^{1/3} < \varepsilon$ 即可得 $I = f(1/2)$.

62. **证明** (i) 易知 $F_y'(x,y) = \int_a^x f(t,y)\mathrm{d}t$，$F_{yx}''(x,y) = f(x,y)\ ((x,y)\in I)$.

(ii) 注意到 $F_y'(x,y)$ 在 I 上连续，故有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\int_c^y\left(\int_a^x f(t,s)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \frac{\partial}{\partial x}\int_c^y F_y'(x,s)\mathrm{d}s\\ =&\int_c^y\frac{\partial}{\partial x}F_y'(x,s)\mathrm{d}s = \int_c^y\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x f(t,s)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由此可推得 $F_{xy}''(x,y) = f(x,y)$.

63. **证明** 不妨假定 B_r 与 B_R 的方程表示各为

$$x^2 + y^2 + (z-R)^2 = r^2,\quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

则此两球面的交线为圆周 $L:\begin{cases} z = R - r^2/2R,\\ x^2 + y^2 = r^2 - r^4/4R^2.\end{cases}$ 由 $z = R - \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ 可知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

记 L 所围的圆在 XOY 平面上的投影为 D，我们有

$$\begin{aligned}S =& \iint_D \sqrt{1 - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}\\ =& r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{r^2 - r^4/4R^2}}\frac{\rho\mathrm{d}\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = 2\pi r^2 - \pi r^3/R.\end{aligned}$$

因为 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 0$ 导出 $r = 4R/3$，由 $\left.\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=4/3} = -4\pi < 0$，所以 $r = 4R/3$，S 最大.

64. **解** 在式(1)两端乘以$(x-y)$,则由式(2)知

$$(x-y)^3=a(x^2-y^2)=9az^2/8,\quad \text{或 } x-y=\sqrt[3]{9}az^{2/3}/2.$$

将此代入式(1)得 $x+y=\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{4/3}$,从而可解出

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{4/3}+\frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z^{2/3}\right), \\ y=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{4/3}-\frac{\sqrt[3]{9a}}{2}z^{2/3}\right). \end{cases}$$

由此又推知

$$\begin{cases} dx=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{1/3}+\sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-1/3}\right)dz, \\ dy=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{1/3}-\sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-1/3}\right)dz, \end{cases}$$

$$dS=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt[3]{\frac{3}{a}}z^{1/3}+\sqrt[3]{\frac{a}{3}}z^{-1/3}\right)dz=\sqrt{2}dx.$$

最后我们有 $S=\int_L ds=\int_0^{x_0}\sqrt{2}dx=\sqrt{2}x_0$.

65. **证明** 记 D 之边界曲线为 L,则由线积分公式知

$$\oint_{C^+}F(x,y,z)dy=\oint_L F(x,y,f(x,y))dy.$$

又记 S 在点(x,y,z)处的外法线方向余弦为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,则得

$$dydz=\cos\alpha d\sigma=-\left[\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\right]d\sigma$$

$$=-\frac{\partial f}{\partial x}\cos\gamma d\sigma=-\frac{\partial f}{\partial x}dxdy.$$

从而我们有

$$\iint_S\frac{\partial F}{\partial x}dxdy-\frac{\partial F}{\partial z}dydz=\iint_S\frac{\partial F}{\partial x}dxdy-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}dxdy$$

$$=\iint_D\frac{\partial F(x,y,f(x,y))}{\partial x}dxdy=\int_L F(x,y,f(x,y))dy.$$

66. **解** 改写原式为

$$I=\int_L\frac{ydx-xdy}{y^2}+\int_L f(xy)(ydx+xdy)=I_1+I_2.$$

显然有 $I_1=\int_L d\left(\frac{x}{y}\right)=-4$. 对 I_2,令 $P(x,y)=yf(xy)$,$Q(x,y)=xf(xy)$,则得

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f(xy)+xyf'(xy)+xyf'(xy)=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

由此知该积分与路径无关，从而改原路径 L 为曲线段 L'：$xy=2$．我们有

$$I_2=\int_{L'}f(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=f(2)\int_3^1\left(\frac{2}{x}\mathrm{d}x-\frac{2}{x}\mathrm{d}x\right)=0.$$

67．**解**　从梯度定义可知$\frac{\partial f}{\partial x}=P$，$\frac{\partial f}{\partial y}=Q$．由 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是 f 之微分可得$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$．解此方程有 $\lambda=-1$．此外根据线积分与路径无关这一点，我们在平面 $x>0$ 内取路径为点$(1,0)$到(x,y)，那么

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\int_{(0,1)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=-\int_0^y\frac{\mathrm{d}(y/x^2)}{1+(y/x^2)^2}=-\arctan\left(\frac{y}{x^2}\right).\end{aligned}$$

68．**解**　令 $g(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$，则得

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}.$$

此外，作 D 内曲线 C：$x=2\cos t$，$y=2\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，则

$$\begin{aligned}\int_C g(x,y)\mathrm{d}x+f(x,y)\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\left[\frac{-2\sin t}{4}(-2\sin t)+\frac{2\cos t}{4}(2\cos t)\right]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.\end{aligned}$$

现在，假定存在 D 上函数 $h(x,y)$，使得

$$(g,f)=\nabla h=\left(\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y}\right),$$

那么由于 C 是闭曲线，故可得

$$\int_C g(x,y)\mathrm{d}x+f(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

这导致矛盾，证毕．

69．**解**　记 $F(x,y,z)=\frac{x}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)+x^3$，$G(x,y,z)=f\left(\frac{x}{y}\right)+y^3$，$H(x,y,z)=-\frac{z}{y}f\left(\frac{x}{y}\right)+z^3$，则$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}=3(x^2+y^2+z^2)$．由 Gauss 公式知

$$\begin{aligned}I&=-\iiint\limits_{V_-}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=-3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{32}{5}\pi R^5.\end{aligned}$$

70．**证明**　(i) 设$(x,y)\in\mathbf{R}^2$，记 C 是从点$(0,0)$到(x,y)的直线段．取定 $X_0=$

(x_0, y_0)，$t\neq 0$，根据在顶点为$(0,0)$，(x_0, y_0)与(x_0+t, y_0)的三角形上用 Green 定理以及积分中值公式(参数 $x=x_0+\tau, y=y_0$，$0\leqslant\tau\leqslant t$)，可得

$$\frac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=\frac{1}{t}\int_{(x_0,y_0)}^{(x_0+t,y_0)}u\mathrm{d}x+v\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{t}\int_0^t u(x_0+\tau,y_0)\mathrm{d}\tau=u(x_0+\xi t,y_0),\quad 0<\xi<1.$$

令 $t\to 0$，我们有$\frac{\partial f}{\partial x}=u$.类似地可推$\frac{\partial f}{\partial y}=v$.

(ii) 反证法.假定结论是真的，那么对 G 内任一闭曲线 C，均有

$$\int_C \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y=0.$$

然而对单位圆周 C：$x=\cos t, y=\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，却得出

$$\int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y=2\pi.$$

导致矛盾.证毕.

71. **证明** (i) 根据恒等式 $\nabla\cdot(f\boldsymbol{J})=\nabla f\cdot\boldsymbol{J}+f(\nabla\cdot\boldsymbol{J})=\nabla f\cdot\boldsymbol{J}$，以及 Gauss 定理，可知

$$\iiint_B(\nabla f)\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_B\nabla\cdot(f\boldsymbol{J})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\partial B}f(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=0.$$

(ii) 在(i)取 $f(x,y,z)=x$ 即得证.

72. **解** (i) 易知 $\nabla\times\boldsymbol{F}=-2z\boldsymbol{j}+(3y-1)\boldsymbol{k}$.

(ii) 令 $H=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=16, z\geqslant 0\}$，令 $D=\{(x,y,0)\in\mathbf{R}^3:x^2+y^2\leqslant 16\}$，则$\partial H=\partial D$(即 H 与 D 有相同的边界).根据 Stokes 定理，可知

$$\int_H(\nabla\times F)\mathrm{d}S=\int_{\partial H}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{\partial D}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=\int_{\partial D}(\nabla\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{F})\mathrm{d}S=\iint_D(-2z\boldsymbol{j}+(3y-1)\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(3y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-16\pi.$$