数学分析习题课教案

叶胥达　741317822@qq.com

2023 年 9 月 18 日

1　习题解答

20230911

1. 否则设 $\alpha, \beta \in S$ 均为数集 $E \subset S$ 的上确界. 由于 S 有有序集, 且 α, β 不等, 故一定有

$$\alpha > \beta \quad \text{或} \quad \alpha < \beta$$

两种情形之一. 由对称性, 不妨设 $\alpha > \beta$. 由于 α 为 E 的上确界, 故 $\beta < \alpha$ 意味着 β 不是 E 的上界, 与 β 是上确界矛盾! 因此 E 的上确界 $\sup E$ 是唯一的. 类似的, E 的下确界 $\inf E$ 是唯一的.

2. 容易看出 2 是 E 的一个上界, 故 $\sup E \leqslant 2$. 对任何 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$2 - \frac{1}{n} \in E \Longrightarrow \sup E \geqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

由于 n 可以充分大, 因此 $\sup E \geqslant 2$. 故 $\sup E = 2$.

3. 由条件知对任意 $x \in A$, 存在 $y \in B$ 使得

$$x \leqslant y \leqslant \sup B.$$

因此 $\sup B$ 是集合 A 的一个上界, 故 $\sup A \leqslant \sup B$.

类似结果: 设有两个数集 A, B 满足: $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, 都有 $x \leqslant y$, 则有 $\sup A \leqslant \inf B$.

4. 对任意 $x \in A$, 有

$$x + c \in B \Longrightarrow x + c \leqslant \sup B,$$

故 $\sup B - c$ 是 A 的上界, 从而 $\sup A \leqslant \sup B - c$ 即 $\sup B \geqslant \sup A + c$. 反之, 对任意 $y \in B$, 有

$$y - c \in A \Longrightarrow y - c \leqslant \sup A,$$

故 $\sup A + c$ 是 B 的上界, 从而 $\sup B \leqslant \sup A + c$. 综合以上两结果可得

$$\sup B = \sup A + c.$$

类似地, 可以证明 $\inf B = \inf A + c$.

20230913

1. 对任意 $x \in A$, $y \in B$, 有

$$x + y \in C \Longrightarrow x + y \leqslant \sup C.$$

对 $x \in A$ 取上确界, 可得

$$\sup A + y \leqslant \sup C,$$

再对 $y \in B$ 取上确界, 可得

$$\sup A + \sup B \leqslant \sup C. \tag{1}$$

反之, 对任意 $z \in C$, 存在 $x \in A$ 和 $y \in B$ 使得 $z = x + y$, 故

$$x \leqslant \sup A, \quad y \leqslant \sup B \Longrightarrow z = x + y \leqslant \sup A + \sup B.$$

于是 $\sup A + \sup B$ 是集合 C 的一个上界, 从而

$$\sup A + \sup B \geqslant \sup C. \tag{2}$$

综合 (1)(2) 两个结果可以得到 $\sup A + \sup B = \sup C$. 类似地可以得到 $\inf A + \inf B = \inf C$.

2. 如果 $\sqrt{3}$ 是有理数, 则存在互素的正整数 p, q 使得

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Longrightarrow p^2 = 3q^2.$$

故 $3 \mid p^2 \Rightarrow 3 \mid p \Rightarrow 9 \mid 3q^2 \Rightarrow 3 \mid q^2 \Rightarrow 3 \mid q$, 即 3 可以同时整除 p 和 q. 这与 p, q 互素的假设矛盾! 因此 $\sqrt{3}$ 一定是无理数.

推广: 当 n 不是完全平方数时, $\sqrt{n}$ 均为无理数.

2 补充习题

1. 当 n 不是完全平方数时, 证明集合 $E = \{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ 构成一个数域, 并且写出它的乘法规则和逆元表达式.

2. 当 n 不是完全平方数时, 证明函数

$$f(x) = \cos x + \sin \sqrt{n}x$$

不是周期函数.

证明 否则, 假设存在 $T > 0$ 使得

$$\cos x + \sin \sqrt{n}x = \cos(x+T) + \sin\big(\sqrt{n}x + \sqrt{n}T\big)$$

对任何 $x \in \mathbb{R}$ 成立. 由于

$$\cos x - \cos(x+T) = 2\sin\frac{T}{2}\sin\left(x + \frac{T}{2}\right),$$
$$\sin\big(\sqrt{n}x + \sqrt{n}T\big) - \sin\sqrt{n}x = 2\sin\frac{\sqrt{n}T}{2}\cos\left(\sqrt{n}x + \frac{\sqrt{n}T}{2}\right),$$

我们得到

$$\sin\frac{T}{2}\sin\left(x+\frac{T}{2}\right) = \sin\frac{\sqrt{n}T}{2}\cos\left(\sqrt{n}x + \frac{\sqrt{n}T}{2}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

注意到, $\sin\frac{T}{2}$ 和 $\sin\frac{\sqrt{n}T}{2}$ 不能同时为 0. 否则, 存在整数 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{T}{2} = k_1\pi, \qquad \frac{\sqrt{n}T}{2} = k_2\pi \Longrightarrow \sqrt{n} = \frac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Q},$$

这与 $\sqrt{n}$ 是无理数矛盾. 因此, $\sin\frac{T}{2}$ 和 $\sin\frac{\sqrt{n}T}{2}$ 不能同时为 0.

进一步, $\sin\frac{T}{2}$ 和 $\sin\frac{\sqrt{n}T}{2}$ 都不为 0. 否则,

$$\sin\frac{T}{2} = 0 \Longrightarrow \cos\left(\sqrt{n}x + \frac{\sqrt{n}T}{2}\right) \equiv 0,$$
$$\sin\frac{\sqrt{n}T}{2} = 0 \Longrightarrow \sin\left(x + \frac{T}{2}\right) \equiv 0,$$

均有矛盾. 至此, $\sin\frac{T}{2}$ 和 $\sin\frac{\sqrt{n}T}{2}$ 都不为 0, 我们有:

$$\sin\left(x+\frac{T}{2}\right) \text{ 和 } \cos\left(\sqrt{n}x + \frac{\sqrt{n}T}{2}\right) \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上有相同的零点.}$$

但是, 前者的相邻零点的间距为 π, 而后者的相邻零点的间距为 $\pi/\sqrt{n}$, 矛盾! 因此 $f(x) = \cos x + \sin\sqrt{n}x$ 一定不是周期函数.

3. 设 $f(x), g(x) \in C(\mathbb{R})$ 为周期函数, 且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期分别为 $a, b > 0$. 若 $\dfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, 证明 $f(x) + g(x)$ 不是周期函数.

证明 否则, 若 $f(x) + g(x)$ 为周期函数, 则存在 $T > 0$ 使得

$$f(x) + g(x) = f(x+T) + g(x+T), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

于是我们可定义函数

$$h(x) := f(x+T) - f(x) = g(x) - g(x+T).$$

下面证明: $h(x)$ 满足

$$h(x) = h(x+a) = h(x+b), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

事实上, $h(x) = h(x+a)$ 成立的原因是 $f(x)$ 是以 a 为周期的函数, 且

$$f(x+T) - f(x) = f(x+T+a) - f(x+a), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

类似的, 由 $g(x)$ 以 b 为周期可以得到 $h(x) = h(x+b)$. 现在由 (1) 可以得到

$$h(x) = h(x+ka+lb), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

注意到 $\{ka + lb : k, l \in \mathbb{Z}\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上稠密, 且 $h(x)$ 是连续函数, 由 (2) 可知 $h(x) = h(x+y)$ 的任何 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立, 因此 $h(x)$ 为常数函数. 于是存在某常数 C 使得

$$f(x+T) - f(x) = g(x) - g(x+T) = C, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

由于 $f(nT) = f(0) + nC$, 因此 $f(x)$ 的有界性意味着 $C = 0$. 因此, T 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期. 由于 a 和 b 分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最小正周期, T 一定是 a 和 b 的整数倍, 即存在 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ 使得

$$T = k_1 a = k_2 b, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{N}.(3) \tag{2.1}$$

因此由 (3) 可得

$$\frac{a}{b} = \frac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Q}, \tag{2.2}$$

与题目条件矛盾.

注: 非常数的连续周期函数一定由最小正周期.

关于周期函数的一些特例:

(1) 存在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 使得[1]

$$f(x) + g(x) = x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(2) 存在一个最小正周期为 1 的函数 $f(x)$, 使得 $f(x^2)$ 也是周期函数.[2]

[1] https://susam.github.io/blob/lab/math/puzzles/periodic-functions-sum-identity.pdf

[2] https://mathoverflow.net/questions/282756/periodic-function-f-for-which-fx2-is-periodic-too